

**CONCOURS COMMUNS
INP****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP**

MATHEMATIQUES 2**Durée : 4 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

| |
|---|
| Les calculatrices sont interdites. |
|---|

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

EXERCICE 1

Pour n entier, $n \geq 2$, on définit le déterminant de Vandermonde de n nombres complexes x_1, x_2, \dots, x_n par :

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

L'objet de cet exercice est de démontrer par récurrence que l'on a : $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

1°. Calculer $V(x_1, x_2)$. Expliquer pourquoi il suffit de faire la démonstration pour n nombres complexes x_1, x_2, \dots, x_n deux à deux distincts.

Dans la suite, x_1, x_2, \dots, x_n sont n nombres complexes deux à deux distincts.

2°. On considère la fonction $t \mapsto P(t) = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t)$.

Démontrer que P est une fonction polynomiale de degré au plus $n - 1$ et justifier que le coefficient de t^{n-1} est un déterminant de Vandermonde.

Démontrer par récurrence que $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

3°. Première application.

Calculer le déterminant de la matrice $A = (i^j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ en faisant apparaître le déterminant de Vandermonde $V(1, 2, \dots, n)$.

4°. Deuxième application.

Donner un exemple de n nombres complexes a_1, a_2, \dots, a_n deux à deux distincts et tous non nuls, tels que $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 0$.

Soit n nombre complexes x_1, x_2, \dots, x_n deux à deux distincts et tous non nuls, démontrer que l'une au moins des sommes $\sum_{k=1}^n x_k, \sum_{k=1}^n x_k^2, \sum_{k=1}^n x_k^3, \dots, \sum_{k=1}^n x_k^n$ est non nulle.

On pourra utiliser un déterminant de Vandermonde non nul.

EXERCICE 2

Dans cet exercice, $\|\cdot\|$ désigne une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une norme vérifiant, pour tout couple (A, B) de matrices de $M_n(\mathbb{R})$, $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

5°. Démontrer que pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$ converge.

On notera e^A sa somme.

6°. Démontrer que l'application $A \mapsto e^A$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$.

7°. Si $H \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice non nulle de la boule de centre 0 et de rayon $r > 0$, déterminer la limite de $\frac{1}{\|H\|} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k$ lorsque H tend vers 0 .

En déduire que l'application $A \mapsto e^A$ est différentiable en la matrice 0 .

On précisera sa différentielle en 0 .

PROBLÈME

Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, on note $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

Dans ce problème, on note S_n l'espace vectoriel des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ symétriques.

On dit que la matrice $A \in S_n$ est symétrique positive lorsque toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.

On note S_n^+ l'ensemble des matrices symétriques positives.

Partie I - Exponentielle d'une matrice symétrique

Pour a et b deux réels, on note :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8°. Démontrer, en détaillant les calculs, que $A \in S_3^+$, si et seulement si, $(a + 2b \geq 0$ et $a \geq b)$.

9°. Calculer J^k pour tout entier k non nul.

Cette relation est-elle valable pour $k = 0$?

En utilisant la relation $A = (a - b)I_3 + bJ$, calculer et expliciter e^A .

On pourra utiliser sans démonstration que, si deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{R})$ commutent, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.

Vérifier que $e^A \in S_3^+$.

10°. Soit P une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$.

Justifier que l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$.

Si $A \in S_n^+$ est semblable à une matrice diagonale D , déterminer une matrice diagonale semblable à la matrice e^A .

En déduire que $e^A \in S_n^+$.

Partie II - Produit de Hadamard de deux matrices

Dans cette partie, pour une matrice $A = (a_{i,j})$ de $M_n(\mathbb{R})$, on note $E(A)$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$, de terme général $e^{a_{i,j}} : E(A) = (e^{a_{i,j}})$.

Nous allons démontrer que si $A \in S_n^+$, alors $E(A) \in S_n^+$.

On définit le produit de Hadamard de deux matrices $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ de $M_n(\mathbb{R})$ noté $*$ par :

$$A * B = (a_{i,j} b_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R}).$$

On note le produit usuel de deux matrices A et B par AB .

On confond une matrice de $M_{1,1}(\mathbb{R})$ avec son terme réel.

11°. Vérifier que, lorsque la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in S_3^+$, la matrice $E(A) \in S_3^+$.

12°. Si D est une matrice diagonale dont tous les termes sont positifs ou nuls et si Y est matrice de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, quel est le signe de ${}^t Y D Y$?

En déduire qu'une matrice A de S_n appartient à S_n^+ si, et seulement si, pour toute matrice $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ on a ${}^t X A X \geq 0$.

13°. Si A et B sont deux matrices de S_n^+ et α, β deux réels positifs, démontrer, en utilisant la question Q12, que $\alpha A + \beta B$ est une matrice de S_n^+ .

Si A et B sont deux matrices de S_n^+ , a-t-on nécessairement $AB \in S_n^+$?

14°. Si $A \in \mathbf{S}_n^+$, démontrer qu'il existe une matrice $R \in \mathbf{S}_n^+$ telle que $A = R^2$.

15°. Si A et B sont deux matrices de \mathbf{S}_n^+ , si on pose $A = U^2$ et $B = V^2$ avec $U = (u_{i,j}) \in \mathbf{S}_n^+$, $V = (v_{i,j}) \in \mathbf{S}_n^+$ et si $A * B = (c_{i,j})$, vérifier que, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $c_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^n u_{k,i} u_{k,j} \right) \left(\sum_{l=1}^n v_{l,i} v_{l,j} \right)$

En déduire que, si A et B sont deux matrices de \mathbf{S}_n^+ , on a $A * B \in \mathbf{S}_n^+$.

16°. Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ et pour tout entier naturel $p \geq 2$, on note A^{*p} la matrice $A * A * \dots * A$ (p fois).

On note $A^{*0} = (\mathbf{1})$ la matrice dont tous les termes sont égaux à $\mathbf{1}$ et $A^{*1} = A$.

Soit une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, déterminer la limite de la suite de matrices (T_N) définie pour

tout entier naturel N non nul par $T_N = \sum_{p=0}^N \frac{1}{p!} A^{*p}$.

17°. Pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, justifier que l'application $M \mapsto {}^t X M X$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$, puis démontrer que \mathbf{S}_n^+ est une partie fermée de \mathbf{S}_n .

En déduire que si $A \in \mathbf{S}_n^+$ alors $E(A) \in \mathbf{S}_n^+$.

FIN

CORRIGÉ

EXERCICE 1

1°. On a $V(x_1, x_2) = x_2 - x_1$.

Si $\exists i \neq j$ tel que $x_i = x_j$, alors ce déterminant est nul, car ses colonnes sont liées.

2°. Si on développe se déterminant $P(t)$ suivant sa dernière colonne, on obtient $P(t)$ est un polynôme de degré au plus $n-1$, dont son coefficient dominant est $V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ si ce nombre est non nul.

La propriété est vraie pour $n = 2$.

Soit $n \geq 2$, on suppose qu'elle est vraie à l'ordre $n-1$.

On a $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_n)$, mais comme $P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_{n-1}) = 0$.

Alors $(t - x_1)(t - x_2)\dots(t - x_{n-1})$ divise $P(t)$, et comme elle est de degré au plus $n-1$, alors $P(t) = \lambda(t - x_1)(t - x_2)\dots(t - x_{n-1})$, où λ est son coefficient dominant, donc $P(t) = (t - x_1)(t - x_2)\dots(t - x_{n-1})V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$.

Donc :

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_n) = (x_n - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1})V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

la récurrence s'applique est le résultat est vraie pour tout $n \geq 2$.

3°. On a

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \dots & 3^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ n & n^2 & \dots & n^n \end{vmatrix} = n!V(1, 2, \dots, n).$$

Mais $V(1, 2, \dots, n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) = n!(n-1)! \dots (2)!(1)! = \prod_{k=1}^n k!$.

4°. Posons $\omega_k = \exp\left(\frac{2i\pi k}{n}\right)$, on a $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$, donc $\sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 = 0$, avec $a_k = \exp\left(\frac{i\pi k}{n}\right)$.

Par l'absurde, si on suppose que $\sum_{k=0}^{n-1} x_k = 0$, $\sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 = 0$, $\sum_{k=0}^{n-1} x_k^3 = 0 \dots$ et $\sum_{k=0}^{n-1} x_k^n = 0$, ceci peut s'écrire matriciellement :

$$(*) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & \dots & x_n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mais la matrice

$$V = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & \dots & x_n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \text{ est de déterminant égale à } x_1 x_2 \cdot x_3 \dots x_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Alors $\det V = x_1 x_2 \dots x_n V(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$, donc inversible, alors le système (*) est équiva-

lente à
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix},$$
 ce qui est absurde. Ainsi le résultat s'en déduit.

EXERCICE 2

5°. Par récurrence, on a $\forall k \in \mathbb{N}, \|A^k\| \leq \|A\|^k$, or la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \|A\|^k$ est convergente de somme

$\exp \|A\|$, donc la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \|A^k\|$ converge absolument, donc convergente car l'espace $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie.

6°. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On a $\exp A = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$, posons $f_k(A) = \frac{1}{k!} A^k$.

- Les applications f_k sont continues sur $M_n(\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- Soit $r > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, on a $\|f_k(A)\| \leq \frac{1}{k!} r^k$ pour tout $A \in B(0, r)$, et $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} r^k$ est convergente de somme e^r .

Alors la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} f_k$ converge normalement sur toute boule $B(0, r) \subset M_n(\mathbb{R})$, alors sa somme $A \mapsto \exp A$ est continue.

7°. • Par la continuité de la norme, on a,

$$\left\| \frac{1}{\|H\|} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k \right\| \leq \frac{1}{\|H\|} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|H\|^k \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \|H\|^{k-1} = \frac{\|H\|}{1 - \|H\|}; \quad \text{série géométrique}$$

Or $\frac{\|H\|}{1 - \|H\|}$ tend vers 0 quand H tend vers 0. Donc $\frac{1}{\|H\|} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k$ tend vers 0 lorsque H tend vers 0.

- Soit $H \in M_n(\mathbb{R})$, on a $\exp(0 + H) - \exp 0 = H + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k$, et d'après ce qui précède la quantité

$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k$ est un $o(\|H\|)$ et l'application $H \mapsto H$ est linéaire, ce qui signifie que $A \mapsto \exp A$ est différentiable en 0 et sa différentielle est l'application $id_{M_n(\mathbb{R})}, H \mapsto H$.

PROBLÈME

Partie I - Exponentielle d'une matrice symétrique

8°. On a $\chi_A = \begin{vmatrix} X - a & -b & -b \\ -b & X - a & -b \\ -b & -b & X - a \end{vmatrix}$

Avec l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, on obtient :

$$\chi_A = (X - (a + 2b)) \begin{vmatrix} 1 & -b & -b \\ 1 & X - a & -b \\ 1 & -b & X - a \end{vmatrix}$$

Avec les opérations, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient :

$$\chi_A = (X - (a + 2b)) \begin{vmatrix} 1 & -b & -b \\ 0 & X - a + b & 0 \\ 0 & 0 & X - a + b \end{vmatrix} = (X - (a + 2b))(X - (a - b))^2$$

Les valeurs propres de A sont $\{a + 2b, a - b\}$, alors :

$A \in \mathcal{S}_n^+$, si et seulement si, $a + 2b \geq 0$ et $a - b \geq 0$.

9°. Par récurrence $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $J^k = 3^{k-1}J$ et cette relation n'est pas valable pour $k = 0$.

Les matrices J et I_3 commutent, et $e^{(a-b)I_3} = e^{(a-b)}I_3$, de plus

$$e^{bJ} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} b^k J^k = I_3 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} b^k J^k = I_3 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} b^k 3^{k-1} J = I_3 + \frac{1}{3}(e^{3b} - 1)J$$

Donc

$$e^A = e^{(a-b)} \left(I_3 + \frac{1}{3}(e^{3b} - 1)J \right) = e^{(a-b)} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{3}(e^{3b} - 1) & \frac{1}{3}(e^{3b} - 1) & \frac{1}{3}(e^{3b} - 1) \\ \frac{1}{3}(e^{3b} - 1)b & 1 + \frac{1}{3}(e^{3b} - 1) & \frac{1}{3}(e^{3b} - 1) \\ \frac{1}{3}(e^{3b} - 1) & \frac{1}{3}(e^{3b} - 1) & 1 + \frac{1}{3}(e^{3b} - 1) \end{pmatrix}$$

Posons $a' = e^{(a-b)} \left(1 + \frac{1}{3}(e^{3b} - 1) \right)$ et $b' = \frac{e^{(a-b)}}{3}(e^{3b} - 1)$, alors $e^A = \begin{pmatrix} a' & b' & b' \\ b' & a' & b' \\ b' & b' & a' \end{pmatrix}$

D'après la question 1 les valeurs propres de A sont $a' + 2b' = e^{a+2b}$ et $a' - b' = e^{a-b}$.

Il apparait bien que $e^A \in \mathcal{S}_n^+$, car ses valeurs propres sont positifs.

10°. L'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire sur l'espace $M_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, donc continue.

Supposons que $A = PDP^{-1}$, alors :

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} P D^k P^{-1}$$

et la continuité de l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ assure que :

$$e^A = P \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k \right) P^{-1} = P e^D P^{-1}$$

Or si $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors $e^D = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$, ce qui signifie que e^A est semblable à une matrice diagonale.

Remarque: La matrice A de la question 8 est symétrique réelle, donc en particulier diagonalisable et ses valeurs propres sont $a+2b$ et $a-b$, alors e^A est diagonalisable et ses valeurs propres d'après la question 10 sont e^{a+2b} et e^{a-b} .

Partie II - Produit de Hadamard de deux matrices

$$11°. \text{ On a } E(A) = \begin{pmatrix} e^a & e^b & e^b \\ e^b & e^a & e^b \\ e^b & e^b & e^a \end{pmatrix}$$

Donc ses valeurs propres sont $e^a + 2e^b$ et $e^a - e^b$, donc si $A \in \mathcal{S}_n^+$, alors en particulier $a \geq b$, alors $e^a + 2e^b$ et $e^a - e^b$ sont positifs, et $e^A \in \mathcal{S}_n^+$.

12°. Posons $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors :

$${}^t Y D Y = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2 \geq 0$$

Soit $S \in S_n$, alors $\exists P$ orthogonale et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = P D P^{-1}$ et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur colonne réelle, alors en posant $Y = P^{-1} X$, on a :

$${}^t X A X = {}^t X P D P^{-1} X = {}^t Y D Y$$

• Supposons maintenant que $A \in S_n^+$, alors ses valeurs propres sont positifs, donc d'après ce qui précède ${}^t X A X = {}^t Y D Y \geq 0$.

• Réciproquement supposons $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X A X \geq 0$.

Soit λ une valeur propre de A , donc $\exists X$ un vecteur propre colonne non nul telle que $A X = \lambda X$, alors

$${}^t X A X = \lambda {}^t X X = \lambda \sum_{k=1}^n x_k^2 \geq 0$$

Donc $\lambda = \frac{{}^t X A X}{\sum_{k=1}^n x_k^2}$, car $X \neq 0$ et X est réelle, donc $\lambda \geq 0$, d'où l'équivalence.

13°. Supposons que $A, B \in S_n^+$, et soit X un vecteur colonne réelle, alors d'après la question 12;

$${}^t X (\alpha A + \beta B) X = \alpha {}^t X A X + \beta {}^t X B X \geq 0$$

D'après la question 12, la matrice $\alpha A + \beta B$ est dans S_n^+ .

Si on prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ qui n'est même pas symétrique, et pourtant les matrices A et B sont dans S_2^+ .

14°. Supposons que A est symétrique réelle donc orthogonalement diagonalisable, Posons $A = P D P^{-1}$, avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$.

Posons $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et ceci à un sens car les λ_i sont positifs,

Posons $R = P \Delta P^{-1}$, on a bien R est symétrique, car P orthogonale, et $R \in S_n^+$ car ses valeurs propres sont ≥ 0 .

On a bien $R^2 = A$.

15°. On a, $A * B = (c_{i,j})$, avec $c_{i,j} = a_{i,j} b_{i,j}$,

$a_{i,j} = \sum_{k=1}^n u_{i,k} u_{k,j} = \sum_{k=1}^n u_{k,i} u_{k,j}$, car U est symétrique, de même $b_{i,j} = \sum_{k=1}^n v_{i,k} v_{k,j} = \sum_{k=1}^n v_{k,i} v_{k,j}$, car V est symétrique : D'où l'égalité demandée.

Comme $u_{k,i} u_{k,j} = u_{k,j} u_{k,i}$ et $v_{k,i} v_{k,j} = v_{k,j} v_{k,i}$ alors $c_{i,j} = c_{j,i}$, et la matrice AB est donc symétrique.

Pour montrer que $A * B \in S_n^+$, on utilise la question 12, et on prend $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Par calcul matricielle, on a :

$$\begin{aligned}
{}^t X(A * B)X &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i c_{ij} x_j \\
&= \sum_{1 \leq i, j, k, l \leq n} x_i u_{k,i} u_{k,j} v_{l,i} v_{l,j} x_j \\
&= \sum_{1 \leq k, l \leq n} \left(\sum_{i=1}^n x_i u_{k,i} v_{l,i} \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j u_{k,j} v_{l,j} \right) \\
&= \sum_{1 \leq k, l \leq n} \left[\sum_{i=1}^n x_i u_{k,i} v_{l,i} \right]^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Car

$$\sum_{i=1}^n x_i u_{k,i} v_{l,i} = \sum_{j=1}^n x_j u_{k,j} v_{l,j}$$

Donc

$$A * B \in \mathcal{S}_n^+$$

16°. Par définition, on a $\frac{1}{p!} A^{*p} = \left(\frac{1}{p!} a_{i,j}^p \right)$, donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} T_N = E(A)$$

17°. • L'application $M \mapsto {}^t XMX$ est linéaire sur l'espace $M_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, donc continue.

• On note ϕ_X l'application précédente, alors

$$\mathcal{S}_n^+ = \bigcap_{X \in M_{n,1}(\mathbb{R})} \phi_X^{-1}([0, +\infty[) \cap \mathcal{S}_n$$

Alors \mathcal{S}_n^+ est un fermé de \mathcal{S}_n .

• Soit $A \in \mathcal{S}_n^+$, alors d'après la question 15, la matrice $A^{*p} \in \mathcal{S}_n^+$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Par la question 13 la matrice T_N est dans \mathcal{S}_n^+ pour tout $N \in \mathbb{N}$, alors sa limite qui est $E(A)$ est dans \mathcal{S}_n^+ , car \mathcal{S}_n^+ est un fermé de \mathcal{S}_n .

Conclusion $E(A) \in \mathcal{S}_n^+$.

FIN

Pour vos remarques

sadikoulmeki@yahoo.fr