

## Questions de cours

1.  $\mathcal{E}$  est de dimension  $n^2$ , et une base en est la famille des matrices  $E_{i,j}$ .
2. Notons  $P = (p_{x,y}) = E_{i,j}E_{k,l}$ . Tout d'abord,  $p_{x,y}$  est nul dès que la ligne  $x$  de  $E_{i,j}$  ou la colonne  $y$  de  $E_{k,l}$  sont nulles, c'est-à-dire lorsque  $x \neq i$  ou  $y \neq l$ . Il ne reste plus qu'à déterminer  $p_{i,l}$ , qui vaut 0 si  $j \neq k$  et 1 si  $j = k$ .  
Finalement,  $E_{i,j}E_{k,l} = \begin{cases} E_{i,l} & \text{si } j = k. \\ 0_{M_n(\mathbb{R})} & \text{sinon.} \end{cases}$ .
3. Théorème de Cayley-Hamilton : le polynôme caractéristique d'une matrice carrée en est un polynôme annulateur.
4. Une matrice de  $M_n(\mathbb{K})$  est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans  $\mathbb{K}$ .

## Propriétés élémentaires

1. Puisque  $A$  est une matrice nilpotente, il existe un entier naturel  $p$  tel que  $A^p = 0$ ; ainsi  $\det(A^p) = 0$ , et  $\det(A) = 0$  :  $A$  n'est pas inversible.
2. Soit  $(\lambda, X)$  un couple (valeur propre, vecteur propre) de  $A$  dans  $\mathbb{C}$  :  $X \neq 0$  et  $AX = \lambda X$ . Par récurrence sur l'entier naturel  $k$ , on démontre alors que  $A^k X = \lambda^k X$  pour tout  $k$ . En particulier,  $A^p X = 0 = \lambda^p X$ , et, puisque  $X \neq 0$ ,  $\lambda^p = 0$ , soit  $\lambda = 0$  :  $\text{Sp}(A) = \{0\}$ .  
Comme  $\chi_A$  est scindé dans  $\mathbb{C}$ , que son terme de plus haut degré est  $X^n$ , et enfin que  $\chi_A$  n'admet que 0 comme racine,  $\chi_A = X^n$ .
3. Si  $A$  est diagonalisable,  $A$  est semblable à la matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont nuls :  $A$  est la matrice nulle. Ainsi,  $A$  est diagonalisable et nilpotente si et seulement si  $A$  est la matrice nulle.
4.  $\text{Vect}(A)$  est l'ensemble des matrices de la forme  $kA$ , où  $k$  est un réel. Or  $(kA)^p = k^p A^p = 0$  quel que soit le réel  $k$ . Ainsi  $\text{Vect}(A) \subset \mathcal{N}$ .
5.  ${}^t A^p = {}^t (A^p) = {}^t 0 = 0$  :  ${}^t A \in \mathcal{N}$ .
6. Si  $M$  est semblable à  $A$ , il existe une matrice  $P$  de  $\mathcal{E}$ , inversible, telle que  $M = P^{-1}AP$ . On démontre alors que  $M^k = P^{-1}A^kP$  pour tout entier naturel  $k$ , et l'on en déduit que  $M^p = 0$  :  $M \in \mathcal{N}$ .

7. Puisque  $\chi_A = X^n$ ,  $\chi_A$  est scindé dans  $\mathbb{R}$ ,  $A$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure de la forme  

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \bullet & \dots & \bullet \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \bullet \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

On démontre alors par récurrence sur  $n$ , en utilisant par exemple le produit matriciel par blocs, que  $T^n = 0$ , et donc que  $A^n = 0$ .

8. Que dire de plus ?
9. C'est fait, et le rang maximum de  $A$  est celui de la matrice  $T$  ci-dessus, soit  $n - 1$ .
- 10.1. Il existe un entier naturel  $q$  tel que  $(BC)^q = 0$ , ce qui s'écrit encore  $B(CB)^{q-1}C = 0$  par associativité du produit matriciel. Ainsi  $CB(CB)^{q-1}CB = 0$ , soit  $(CB)^{q+1} = 0$ , et  $CB$  est nilpotente.

10.2. Il existe un entier naturel  $q$  tel que  $B^q = 0$ . On calcule alors  $(AB)^{\max(p,q)} = A^{\max(p,q)} B^{\max(p,q)} = 0$ , et  $(A+B)^{p+q}$  que l'on développe par la formule du binôme, puisque  $A$  et  $B$  commutent :

$$\begin{aligned}(A+B)^{p+q} &= \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k} + \sum_{k=p}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k}.\end{aligned}$$

La première somme vaut 0 puisque les puissances de  $B$  y sont supérieures à  $q$ , et la seconde car les puissances de  $A$  sont supérieures à  $p$ .

11. Une matrice symétrique réelle étant toujours diagonalisable, elle n'est nilpotente que si elle est nulle (3.).

12.1. On vérifie facilement que  $A^2$  est symétrique, et nilpotente...

12.2. On se souvient que  $\text{tr}(^tAA)$  est la somme des carrés de tous les éléments de  $A$ . Mais c'est aussi  $-\text{tr}(A^2)$ , soit 0...

## Exemples

1.1. 0 est valeur propre de  $M$ , d'ordre de multiplicité  $n$ . La dimension du sous-espace propre de  $M$  associé à la valeur propre 0 est  $n - \text{rg}(M) = n - (n-1) = 1$ .

1.2.  $M + {}^tM$  est une matrice symétrique non nulle : elle n'est pas nilpotente.

$S = J - I_n$ , où  $J$  est la matrice de  $E$  dont tous les éléments valent 1. On vérifie aisément que  $J^2 = nJ$ , et, puisque  $J$  et  $I_n$  commutent,  $S^2 = nJ + I_n - 2J = I_n + (n-2)J = (n-2)S + (n-1)I_n \in \text{Vect}(I_n, S)$ .

Les valeurs propres de  $S$  sont donc à chercher parmi les racines du polynôme annulateur  $X^2 - (n-2)X - (n-1) = (X+1)(X-(n-1))$ . Comme  $S$  est diagonalisable et n'est pas une matrice d'homothétie,  $-1$  ET  $n-1$  sont valeurs propres de  $S$ , la première avec comme sous-espace propre l'hyperplan d'équation  $x_1 + \dots + x_n = 0$ , la seconde la droite engendrée par  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ .

1.3.  $M$  et  ${}^tM$  sont toutes deux nilpotentes (cf I.7), mais leur somme ne l'est pas :  $\mathcal{N}$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{E}$ .

2.1. Ici,  $\chi_M = X^2 - \text{tr}(M)X + \det(M)$ . Puisque  $M$  est de rang 1,  $\det(M) = 0$ , et le théorème de Cayley-Hamilton permet d'écrire  $M^2 = \text{tr}(M)M$ .

Si  $\text{tr}(M) = 0$ ,  $M$  est nilpotente. Sinon,  $M$  annule le polynôme scindé à racines simples  $X(X - \text{tr}(M))$ , et  $M$  est diagonalisable.

2.2.  $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  doit convenir.

2.3. Soit  $A \in M_2(\mathbb{R})$ , nilpotente et non nulle. D'après I.9.,  $A$  est de rang 1 et, d'après la question précédente, de trace nulle. Finalement, les matrices nilpotentes de  $M_2(\mathbb{R})$  sont les matrices de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$  avec  $a^2 + bc = 0$ .

## Sous-espace engendré par $\mathcal{N}$

1.  $T_0$  est le noyau de la forme linéaire non nulle trace : c'est un hyperplan de  $\mathcal{E}$ , de dimension  $n^2 - 1$ .

2. Une matrice nilpotente de  $\mathcal{E}$  est semblable à une matrice triangulaire à éléments diagonaux nuls : sa trace est nulle, de même que la trace de toute combinaison linéaire de matrices nilpotentes.

$$3.1. F_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 & & & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 0 & & & 0 \end{pmatrix} \text{ est une matrice de rang 1. Donc } F_j^2 = \text{tr}(F_j)F_j = 0 \text{ puisque } \text{tr}(F_j) = 0.$$

3.2.  $F_j$ ,  $E_{1,j}$  et  $E_{j,1}$  sont nilpotentes.  $G_j$  est donc une combinaison linéaire de matrices nilpotentes, et  $G_j \in V$ .

3.3. On remarque que  $G_k = E_{k,k} - E_{1,1}$ . Une combinaison linéaire nulle de matrices de la famille  $\mathcal{F}$  est donc une combinaison linéaire nulle des matrices élémentaires, avec les mêmes coefficients concernant celles autres que  $E_{1,1}$ . Ces coefficients, qui sont ceux de la combinaison initiale, sont donc tous nuls, et  $\mathcal{F}$  est libre, dans  $V$  puisque que toutes les matrices de  $\mathcal{F}$  sont dans  $V$ .

3.4.  $V$  est donc un sous-espace de  $T_0$  de dimension au moins  $n^2 - 1$  :  $V = T_0$ .

## Sous-espaces de dimension maximale contenus dans $\mathcal{N}$

1. Une base de  $T_1$  est la famille  $(E_{i,j})_{j>i}$ , de cardinal  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

2. Déjà fait en I.7.

3. Tout d'abord,  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap T_1 = \{0_{M_n(\mathbb{R})}\}$ . Ensuite la somme des dimensions de ces deux sous-espaces de  $\mathcal{E}$  vaut  $n^2$ , soit la dimension de  $\mathcal{E}$ . Ainsi,  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $T_1$  sont supplémentaires dans  $\mathcal{E}$ .

4.1. Par l'absurde, si on suppose que  $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) = 0$ , alors  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $F$  sont en somme directe, et la dimension de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus F$  est égale à  $\frac{n(n+1)}{2} + d > n^2$ , ce qui n'est guère raisonnable pour un sous-espace de  $\mathcal{E}$ . Donc  $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) > 0$ , mézalors il y a dans  $F$  des matrices symétriques, nilpotentes, autres que la matrice nulle. C'est à nouveau absurde, et cette fois, c'est l'hypothèse  $d > \frac{n(n-1)}{2}$  qui est fausse.

Finalement (ouf),  $d \leq \frac{n(n-1)}{2} \dots$

4.2. La dimension d'un sous-espace de  $\mathcal{E}$  contenu dans  $\mathcal{N}$  est inférieure à  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Puisque  $T_1$  est un sous-espace de  $\mathcal{E}$  contenu dans  $\mathcal{N}$  et de dimension  $\frac{n(n-1)}{2}$ , la dimension maximale d'un sous-espace de  $\mathcal{E}$  contenu dans  $\mathcal{N}$  est exactement  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

## Un peu de topologie

1. Soit  $(A_k)$  une suite convergente d'éléments de  $\mathcal{N}$ . Notons  $A$  sa limite. Pour tout  $k$ ,  $A_k^n = 0$  d'après I.7., et, par continuité de l'application  $X \in \mathcal{E} \mapsto X^n$ , polynômiale en les éléments de  $X$ ,  $A^n = 0$ . Tout point adhérent à  $\mathcal{N}$  est dans  $\mathcal{N}$ , et  $\mathcal{N}$  est une partie fermée de  $\mathcal{E}$ .

2.  $I_n + \alpha A$  est semblable à une matrice  $I_n + \alpha T$ , où  $T \in T_1$ . Cette matrice, triangulaire avec des 1 sur la diagonale, est de déterminant 1.

Toute les normes étant équivalentes, je décide d'utiliser sur  $\mathcal{E}$  la norme  $M = (m_{i,j}) \mapsto \max(|m_{i,j}|)$ , pour laquelle  $I_n$  est de norme 1. Soit  $r$  un réel strictement positif, et  $t \in ]-r, r[$  non nul. La matrice  $A + tI_n$  est à une distance de  $A$  égale à  $|t|$ , donc inférieure strictement à  $r$ , et appartient à la boule ouverte de centre  $A$  et de rayon  $r$ . Son déterminant vaut  $t^n$ , c'est une matrice inversible, c'est-à-dire de rang  $n$ , et donc non nilpotente. On en déduit qu'aucun point de  $\mathcal{N}$  n'est intérieur à  $\mathcal{N}$ , ou encore que  $\mathcal{N}$  est d'intérieur vide.

3. On considère un sous-espace  $F$  de  $\mathcal{E}$  d'intérieur non vide :  $F$  contient une boule ouverte,  $B(M, r)$ .

Soit alors  $\widetilde{M} \in \mathcal{E}$ , différente de  $M$ . Notons  $\alpha$  la distance de  $M$  à  $\widetilde{M}$ . La matrice  $M + t(\widetilde{M} - M)$  appartient à  $B(M, r)$  dès que  $|t| < \frac{r}{\alpha}$ .

Prenons  $t \neq 0$  vérifiant cette condition. Alors  $\widetilde{M} = \frac{1}{t} \cdot (M + t(\widetilde{M} - M)) + \frac{t-1}{t} \cdot M$ , qui est une combinaison linéaire d'éléments de  $F$ . Ainsi  $\widetilde{M} \in F$  et  $F = \mathcal{E}$ .

Supposons alors  $N$  d'intérieur non vide. Le sous-espace  $V$  engendré par  $N$ , contient  $N$ , et est donc lui aussi d'intérieur non vide. C'est donc  $\mathcal{E}$ , ce qui contredit les résultats de la partie III.

## Deux autres résultats

1. Puisque  $I_n$  et  $A$  commutent,  $I_n - (-\alpha A)^p = (I_n + \alpha A)(I_n - \alpha A + \alpha^2 A^2 + \dots + (-\alpha)^{p-1} A^{p-1})$ . Compte tenu de ce que  $A^p = 0$ , il vient  $M \cdot (I_n - \alpha A + \alpha^2 A^2 + \dots + (-\alpha)^{p-1} A^{p-1}) = I_n$  :  $M$  est inversible et son inverse est  $I_n - \alpha A + \alpha^2 A^2 + \dots + (-\alpha)^{p-1} A^{p-1}$ .

2. Pour tout réel  $\alpha$ , et tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ .

Lorsque  $\alpha = \frac{1}{2}$ , et pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1) \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-3) \dots (-(2n-3)) \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n-3)(2n-2)}{2 \cdot 4 \dots (2n-4)(2n-2)} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot \frac{(2n-2)!}{2^{n-1} \cdot (n-1)!} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}, \end{aligned}$$

et, finalement,  $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \cdot \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^n$  pour tout  $x \in ]-1, 1[$ .

3. On serait tenté de prendre  $B = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}} \cdot \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} \alpha^k A^k$ .

Premier problème : la convergence de cette série. En fait, la somme reste finie, puisque les puissances de  $A$  sont nulles à partir du rang  $p$ .

Deuxième problème : avec  $B = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}} \cdot \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} \alpha^k A^k$ , a-t-on bien  $B^2 = M$  ?

Notons  $\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ . Pour tout  $k$ ,  $a_k = \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}} \cdot \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}$ . Puisque  $\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1+x} = 1+x$ , par unicité des DSE, et en utilisant le produit de Cauchy,

$$\sum_{l=0}^k a_l a_{k-l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \text{ ou } 1. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On calcule alors  $B^2$  :

$$\begin{aligned} B^2 &= \left( \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}} \cdot \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} \alpha^k A^k \right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \left( \sum_{l=0}^k a_l a_{k-l} \right) \alpha^k A^k \\ &= I_n + \alpha A \\ &= M \end{aligned}$$