CONCOURS INTERNE

et

CONCOURS D'ACCÈS À L'ÉCHELLE DE RÉMUNÉRATION DES PROFESSEURS CERTIFIÉS

SESSION DE 1989

DURÉE : 5 heures

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche — éventuellement programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Matériel à fournir : feuilles de papier quadrillé 5 × 5,
feuilles de papier millimétré.

Ce problème présente des exemples de découpages d'un intervalle conduisant à l'étude conjointe de suites et de fonctions. La première partie exploite de manière élémentaire une situation d'origine géométrique. Dans la deuxième partie, on envisage des découpages du segment [0, 1] par des segments dont les milieux sont fixés. La troisième et la quatrième partie mettent en évidence des comportements oscillants.

PREMIÈRE PARTIE

1. Les données sont : un demi-cercle (C) d'extrémités A et B, la droite D portant A et B.

On pose $N = \varphi(M)$ pour exprimer que M et N sont des points de (C) vérifiant $AN + BM = AB$.

K désigne le point du segment AB tel que $BM = BK$.

1.1. Indiquer par une figure une construction de N lorsque M est donné.

1.2. On désigne par m et n les projections orthogonales sur D des points M et N respectivement. Exprimer, soit par un calcul analytique, soit à l'aide de considérations géométriques, les distances Am et An en fonction de AK et AB. Vérifier que K est le milieu du segment mn.

1.3. Itérés par φ d'un point de (C).

On définit une suite sur (C) par la donnée d'un point M_0 de (C) distinct de A et de B et par la condition $M_{p+1} = \varphi(M_p)$ pour tout entier naturel p.

a. Faire une figure, en prenant $AB = 10$ cm, où l'on construira quatre points M_p successifs.

b. Montrer que M_p tend vers A quand p tend vers $+\infty$.

2. Mise en place de suites numériques.

On suppose dorénavant que $AB = 1$.

À la suite $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de points de (C), on associe la suite $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de points du segment AB définie par :
$AK_p = AM_{p+1}$ pour tout entier naturel p
et les suites numériques $(c_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définies par :
$c_p = AK_p$ et $x_p = Am_p$, où m_p désigne la projection orthogonale de M_p sur D.

On a donc $c_p = \dfrac{1}{2}(x_p + x_{p+1})$.

2.1. Exprimer x_p et x_{p+1} en fonction de c_p puis c_{p+1} en fonction de c_p.

Tournez la page S. V. P.

2.2. Pour x appartenant au segment $[0, 1]$, on pose $u(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ et $v(x) = 2x - x^2$. Représenter, sur un même graphique, ces deux fonctions (axes orthonormés, unité graphique : 10 cm).

En utilisant ce graphique et en partant de $c_0 = \frac{8}{10}$, représenter les points d'abscisses c_1, c_2, x_0, x_1, x_2 et d'ordonnée nulle.

2.3. On s'intéresse aux longueurs des segments $K_p K_{p+1}$. Montrer que, pour tout entier naturel p, $c_p - c_{p+1} = \frac{1}{2}(x_p - x_{p+2})$.

Ceci suggère le calcul de la somme des longueurs des segments $K_p K_{p+1}$ pris de deux en deux.

Calculer $\sum_{p=0}^{p=h} K_{2p} K_{2p+1}$ et en déduire, en fonction de c_0, $L(c_0) = \sum_{p=0}^{+\infty} K_{2p} K_{2p+1}$. Déterminer la limite de $L(c_0)$ lorsque c_0 tend vers 1.

3. Sur la droite D, on donne deux points I et J choisis de telle sorte que le segment IJ contienne le segment AB et que ces deux segments aient le même milieu.

Dans cette question, on pose $N = \varphi(M)$ pour exprimer que M et N sont des points de (C) vérifiant $IN + JM = IJ$.

Peut-on étendre à cette situation l'étude faite dans la question 1 ?

DEUXIÈME PARTIE

1. On donne à présent une application de $\mathbb{Z}$ dans le segment $[0, 1]$, $n \longmapsto c_n$, c'est-à-dire une suite sur $\mathbb{Z}$ de points de $[0, 1]$. Cette application est strictement décroissante (pour tout n dans $\mathbb{Z}$, $c_{n+1} < c_n$) et vérifie :

$$\lim_{n \to +\infty} c_n = 0 \quad , \quad \lim_{n \to -\infty} c_n = 1 .$$

Le but de cette question est d'étudier sur des exemples l'existence d'une suite sur $\mathbb{Z}$, $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, de points du segment $[0, 1]$, strictement décroissante et satisfaisant à la condition :

$$\text{pour tout } n \text{ élément de } \mathbb{Z},\ x_n + x_{n+1} = 2\,c_n .$$

Lorsqu'on peut déterminer une telle suite, on dit qu'à la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, est associé un « pavage » du segment $[0, 1]$ à l'aide des segments $[x_{n+1}, x_n]$.

1.1. On pose pour tout n élément de $\mathbb{Z}$, $S_n = \sum_{h=0}^{+\infty} (-1)^h c_{n+h}$.

Justifier la convergence de cette série.

Montrer que le problème admet au plus une solution exprimée par $x_n = 2\,S_n$ pour tout n élément de $\mathbb{Z}$.

Montrer qu'il admet exactement une solution lorsque la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est strictement décroissante.

1.2. Exemples.

Dans chacun des trois cas ci-dessous, on observera que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, qui est donnée explicitement, présente une symétrie.

a. Si n appartient à $\mathbb{Z}^+$: $c_n = \frac{1}{2^{n+1}}$, $\quad c_{-n} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$.

Déterminer x_n lorsque n est un élément de $\mathbb{Z}^+$ puis, en utilisant une symétrie, x_{-n}.

Obtient-on un « pavage » du segment $[0, 1]$?

Tournez la page S. V. P.

b. Si n appartient à $\mathbf{Z}^+$: $c_n = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^n}$, $c_{-n} = 1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^{n-1}}$.

Calculer x_0, x_{-1}, x_{-2}. Représenter sur un axe les points d'abscisses c_0, c_{-1}, c_{-2}, x_0, x_{-1}, x_{-2}. Peut-on, dans ce cas, obtenir un « pavage » du segment $[0, 1]$?

c. Si n appartient à $\mathbf{Z}^+$: $c_n = \frac{1}{n+2}$, $c_{-n} = 1 - \frac{1}{n+2}$.

Exprimer x_0 comme somme d'une série.

Montrer que, pour tout t élément du segment $[0, 1]$ et pour tout entier naturel p,

$$(-1)^p \frac{t^{p+1}}{1+t} = 1 - t + t^2 + \dots + (-1)^p t^p - \frac{1}{1+t}.$$

À l'aide d'une intégration, en déduire que :

$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$ et donner une nouvelle expression de x_0.

Pour tout élément n de $\mathbf{Z}^+$, montrer que :

$$x_n = 2 \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\, dt \quad \text{et comparer } x_n \text{ et } x_{n+1}.$$

À la suite $(c_n)_{n \in \mathbf{Z}}$, peut-on associer un « pavage » du segment $[0, 1]$?

2. Une équation fonctionnelle.

2.1. Soit f une bijection continue, strictement croissante, du segment $[0, 1]$ sur lui-même, vérifiant, pour tout élément x de l'intervalle $]0, 1[$, $f(x) < x$.

On considère une suite sur $\mathbf{Z}$ de points de l'intervalle $]0, 1[$, $n \longmapsto c_n$, vérifiant la relation $c_{n+1} = f(c_n)$ pour tout élément n de $\mathbf{Z}$.

Montrer que cette suite est strictement décroissante, que c_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et vers 1 quand n tend vers $-\infty$.

2.2. Dans l'intention d'associer à toute suite $(c_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ ainsi construite un « pavage » du segment $[0, 1]$, on cherche une fonction g, définie sur le segment $[0, 1]$, telle que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad g(x) + g(f(x)) = 2x \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} g(x) = 0.$$

En s'inspirant des résolutions numériques qui précèdent, comment peut-on déterminer une telle fonction ?

Montrer que, si de plus, pour tout élément x de l'intervalle $]0, 1[$, $g(x) > x$, cette fonction g permet effectivement d'associer à chaque suite $(c_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ un « pavage » du segment $[0, 1]$.

TROISIÈME PARTIE

Dans cette partie, a est un réel donné, strictement supérieur à 1.

1. Étude d'une série de fonctions.

1.1. On pose $\psi(t) = \frac{1}{1 + a^t}$, t décrivant $\mathbf{R}$.

Montrer que, pour tout t, $\psi(t) + \psi(-t) = 1$.

Étudier les variations et faire une représentation graphique de la fonction ψ. Montrer que, sur $\mathbf{R}^+$, ψ est une fonction convexe.

1.2. Pour tout réel t, on désigne par $S(t)$ la somme de la série $\psi(t) - \psi(t+1) + \dots + (-1)^n \psi(t+n) + \dots$ dont on justifiera la convergence.

Montrer que la fonction S est positive.

Tournez la page S. V. P.

La fonction S est-elle continue ? Est-elle dérivable ? A-t-elle une limite en $+\infty$?

Montrer qu'il existe un réel t_0 tel que, sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$, S soit décroissante.

Montrer que, pour tout t réel, $S(t) + S(t+1) = \psi(t)$.

Si S a une limite en $-\infty$, quelle est cette limite ?

2. Étude de suites. Dans cette question, n est un entier naturel.

2.1. Suite $n \longmapsto S(-n)$.

Montrer que : $S(-1) = \frac{1}{2} - S(2)$

$S(-2) = \frac{1}{2} - S(3)$ et que, pour tout entier naturel n,

$S(-n) = \frac{1}{2} - S(n+1)$.

Étudier la suite de terme général $S(-n)$.

2.2. Suite $n \longmapsto S\left(\frac{1}{2} - n\right)$.

Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1,

$$S\left(\frac{1}{2} - 2n\right) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \psi\left(k - \frac{1}{2}\right) + S\left(\frac{1}{2}\right)$$

puis que

$$S\left(\frac{1}{2} - 2n\right) = 2\,S\left(\frac{1}{2}\right) - S\left(2n + \frac{1}{2}\right).$$

Étudier chacune des deux suites $n \longmapsto S\left(\frac{1}{2} - 2n\right)$ et $n \longmapsto S\left(\frac{1}{2} - (2n+1)\right)$.

À quelle condition la suite $n \longmapsto S\left(\frac{1}{2} - n\right)$ est-elle convergente ?

QUATRIÈME PARTIE

Étude de $S\left(\frac{1}{2}\right)$ selon la valeur de a.

On rappelle que a est un réel strictement supérieur à 1.

On a $S\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{1 + a^{n+\frac{1}{2}}}$.

On pose $b = \sqrt{a}$ et $\sigma(b) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{1 + b^{2n+1}}$.

1. Montrer que, pour tout b strictement supérieur à 1, $\sigma(b) < \frac{1}{1+b}$.

Que peut-on en déduire concernant la suite $\left(S\left(\frac{1}{2} - n\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque a est supérieur ou égal à 9 ?

Tournez la page S.V.P.

2. **Calculer une valeur décimale approchée de $\sigma(2)$ à 10^{-3} près.**

   Pour $a = 4$, comparer $S\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\frac{1}{4}$.

3. **On désire comparer $S\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\frac{1}{4}$ lorsque a est compris entre 4 et 9.**

   On pose $\sigma(b) = \dfrac{1}{1+b} - \dfrac{1}{1+b^3} + R(b)$.

   Montrer que, pour tout entier naturel n :
   $$\frac{1}{1+b^{4n+1}} - \frac{1}{1+b^{4n+3}} < \frac{1}{b^{4n+1}} - \frac{1}{b^{4n+3}}.$$

   En déduire l'inégalité $R(b) < \dfrac{1}{b^3\,(1+b^2)}$.

   Montrer qu'on a aussi $\sigma(b) < \dfrac{1}{1+b} - \dfrac{1}{1+b^3} + \dfrac{1}{b^2\,(1+b^3)}$.

   Comparer, pour b strictement supérieur à 2, $\sigma(b)$ et $\frac{1}{4}$.

4. Un encadrement de $\sigma(b)$.

   4.1. On pose, pour tout entier naturel n :
   $$\alpha_n = \frac{1}{1+b^{2n+1}} - \frac{2}{1+b^{2n+3}} + \frac{1}{1+b^{2n+5}}.$$

   Étudier le signe de α_n.

   4.2. Démontrer les égalités :
   $$2\sigma(b) = \frac{1}{1+b} + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n}$$
   et
   $$2\sigma(b) = \frac{2}{1+b} - \frac{1}{1+b^3} - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n+1}.$$

   En déduire que, pour tout réel b strictement supérieur à 1, on a :
   $$\frac{1}{2\,(1+b)} < \sigma(b) < \frac{1}{1+b} - \frac{1}{2\,(1+b^3)}.$$

   4.3. On prolonge σ en 1 en posant $\sigma(1) = \frac{1}{4}$.

   Montrer que la fonction ainsi définie est continue en 1, puis, en comparant par exemple $\sigma(b)$ et $\dfrac{3}{4\,(1+b)} - \dfrac{1}{4\,(1+b^3)}$, qu'elle y est dérivable.

5. Fonction f associée à S.

   On pose $x = \psi(t)$ [voir III.1.1] donc, lorsque t décrit $\mathbb{R}$, x décrit l'intervalle $]0, 1[$.

   Déterminer la fonction f, définie et continue sur le segment $[0, 1]$, sachant qu'on a $f(x) = \psi(t+1)$ lorsque $x = \psi(t)$. Vérifier que f satisfait aux conditions du II.2.1.

   On associe à f la fonction g comme au II.2.2. Lorsque a est supérieur ou égal à 4, a-t-on, pour tout x élément de l'intervalle $]0, 1[$, $g(x) > x$?

• FIN •