Michel Carré, lycée Joffre, Montpellier

Centrale 2017, filière PSI, première épreuve

• Partie I

A.1) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ posons $p(\lambda) = E\left[(\lambda V + U)^2\right] = E(V^2)\lambda^2 + 2E(UV)\lambda + E(U^2)$ (linéarité de l'espérance).
$E(V^2) > 0$ puisque V n'est pas p.s. nulle, donc p est une fonction polynômiale de degré 2, qui est par construction positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ entier. Il en résulte que le discriminant $4\left(E(UV)^2 - E(U^2)E(V^2)\right)$ de p est négatif ou nul ; c'est l'inégalité (de Cauchy-Schwarz) demandée.
Il y a égalité (discriminant nul) ssi p possède une racine réelle, c'est-à-dire ssi il existe λ tel que $\lambda V + U = 0$ p.s.

A.2) a) Pour tout $\tau \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{\tau|X|}$ est bornée puisque X l'est, donc $E(e^{\tau|X|}) < +\infty$.

b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{tX} > 0$, donc dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, $E(e^{tX}) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} e^{tk} p(1-p)^{k-1} = pe^t \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \left((1-p)e^t\right)^j$.

Ainsi : $E(e^{tX}) < +\infty \iff (1-p)e^t < 1 \iff t < -\ln(1-p)$, et en ce cas $E(e^{tX}) = \dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$.

c) De même, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E\left(e^{tX}\right) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} e^{tk} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(\lambda e^t)^k}{k!} = e^{\lambda(e^t-1)} < +\infty$.

A.3) a) Soit $\omega \in \Omega$. Si $X(\omega) \geqslant 0$, alors $e^{tX(\omega)} \leqslant e^{bX(\omega)}$ et si $X(\omega) \leqslant 0$, alors $e^{tX(\omega)} \leqslant e^{aX(\omega)}$.
Dans tous les cas, $e^{tX(\omega)} \leqslant e^{aX(\omega)} + e^{bX(\omega)}$, donc $e^{tX} \leqslant e^{aX} + e^{bX}$.
Par croissance et additivité de l'espérance, on en déduit $E(e^{tX}) \leqslant E(e^{aX}) + E(e^{bX}) < +\infty$.
Ainsi l'ensemble des réels t tels que $E(e^{tX}) < +\infty$ est non vide (il possède 0) et convexe ; c'est un intervalle.

b) $\theta_{k,t,a,b}(y) = \dfrac{y^k e^{(t-b)y}}{e^{(a-b)y}+1}$, avec $t-b<0$ et $a-b<0$, donc $\lim\limits_{+\infty} \theta_{k,t,a,b} = 0$ par croissances comparées.

$\theta_{k,t,a,b}(y) = \dfrac{y^k e^{(t-a)y}}{1+e^{(b-a)y}}$, avec $t-a>0$ et $b-a>0$, donc $\lim\limits_{-\infty} \theta_{k,t,a,b} = 0$ par croissances comparées.

Par définition de la limite, il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|\theta_{k,t,a,b}(y)| \leqslant 1$ pour $y \in]-\infty, -A] \cup [A, +\infty[$.

Étant continue, la fonction $\theta_{k,t,a,b}$ est bornée sur le segment $[-A, A]$. Finalement, elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

c) Notons M un majorant de $|\theta_{k,t,a,b}|$. Il vient $|X|^k e^{tX} \leqslant M\left(e^{aX} + e^{bX}\right)$, d'où comme en a) $E\left(|X|^k e^{tX}\right) < +\infty$.

d) Soit $t \in [c,d]$. Pour $y \in \mathbb{R}_+$, $e^{ty} \leqslant e^{dy}$ et pour $y \in \mathbb{R}_-$, $e^{ty} \leqslant e^{cy}$ donc pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$|\theta_{k,t,a,b}(y)| \leqslant \frac{|y|^k(e^{cy}+e^{dy})}{e^{ay}+e^{by}} = |\theta_{k,c,a,b}(y)| + |\theta_{k,d,a,b}(y)|.$$

Selon b), on peut prendre $M_{k,a,b,c,d} = \|\theta_{k,c,a,b}\|_\infty + \|\theta_{k,d,a,b}\|_\infty$ (qui ne dépend effectivement pas de t).

A.4) a) On sait déjà par **3)**a) que l'ensemble considéré est un intervalle I.
De plus, pour $t \in [-\tau, \tau]$, $e^{tX} \leqslant e^{|t||X|} \leqslant e^{\tau|X|}$, donc $E(e^{tX}) \leqslant E(e^{\tau|X|}) < +\infty$, donc $[-\tau, \tau] \subset I$.

b) Si $X(\Omega)$ est fini, X est bornée, donc $I = \mathbb{R}$ d'après **2)**a) et **4)**a) et pour $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} P(X=x)\, e^{xt}$.
φ_X est de classe C^∞ comme combinaison linéaire de fonctions de classe C^∞.

c) Pour $t \in I$, $\sum p_n e^{x_n t}$ converge et $\varphi_X(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n e^{x_n t}$

Notons $u_n(t) = p_n e^{x_n t}$. Chaque fonction u_n est de classe C^∞ sur I avec pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_n^{(k)}(t) = p_n x_n^k\, e^{x_n t}$.
- Soit d'abord $[a,b]$ un segment de I. Pour $t \in [a,b]$ on a comme en **3)**a) $0 \leqslant u_n(t) \leqslant u_n(a) + u_n(b)$, qui est le terme général d'une série convergente indépendante de t.
Ainsi, $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment de I, donc, par théorème, φ_X est continue sur I.

- Soient maintenant $k \in \mathbb{N}^*$ et $[c,d]$ un segment de $\mathring{I}$. Fixons $(a,b) \in I^2$ tel que $a < c$ et $d < b$.
Selon **3)**d), pour $t \in [c,d]$, $|u_n^{(k)}(t)| = \left|p_n(e^{ax_n} + e^{bx_n})\theta_{k,t,a,b}(x_n)\right| \leqslant M_{k,a,b,c,d}\left(u_n(a) + u_n(b)\right)$, qui est le terme général d'une série convergente indépendante de t.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur tout segment de $\mathring{I}$.

Par théorème, φ_X est de classe C^∞ sur $\mathring{I}$ et pour tout $(k,t) \in \mathbb{N} \times \mathring{I}$:

$$\varphi_X^{(k)}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^{(k)}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x_n^k\, e^{x_n t} = E\left(X^k e^{tX}\right).$$

d) Égalité déjà établie au c).

e) *Il y a ici une petite erreur d'énoncé : ψ_X n'est a priori définie que sur $\overset{\circ}{I}$.*

$\psi_X'(t)$ a le même signe que $\varphi_X''(t)\varphi_X(t) - \varphi_X'(t)^2 = E\left(X^2 e^{tX}\right) E\left(e^{tX}\right) - E\left(Xe^{tX}\right)^2 = E(U^2)E(V^2) - E(UV)^2$, où on a posé $U = Xe^{tX/2}$ et $V = e^{tX/2}$.

V n'est pas p.s. nulle donc selon **A.1)**, ψ_X' est positive ou nulle, et par suite ψ_X est croissante sur $\overset{\circ}{I}$.

De plus, si X n'est pas presque sûrement constante, il n'existe pas de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda V + U$ soit presque sûrement nulle donc, encore d'après A.1), ψ_X' est strictement positive et ψ_X est strictement croissante sur $\overset{\circ}{I}$.

B.1) $E(S_n) = nE(X)$ par additivité de l'espérance et $V(S_n) = nV(X)$ par indépendance des X_k.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour S_n donne alors $P\left(|S_n - nE(X)| \geqslant n\delta\right) \leqslant \dfrac{nV(X)}{(n\delta)^2} = \dfrac{V(X)}{n\delta^2}$.

B.2) On peut écrire $\pi_n = 1 - P\left((S_n < nu) \cup (S_n > nv)\right)$. Posons $\delta = \min\left(E(X) - u,\, v - E(X)\right) > 0$.

$(S_n < nu) \cup (S_n > nv)$ est inclus dans $\left(|S_n - nE(X)| \geqslant n\delta\right)$ donc, selon **1)**, $1 \geqslant \pi_n \geqslant 1 - \dfrac{V(X)}{n\delta^2}$.

Par encadrement, on en déduit que la suite (π_n) converge vers 1.

C.1) *Une autre petite erreur d'énoncé : la comparaison demandée n'est possible que pour $q \in \mathbb{N}^*$.*

Une récurrence évidente sur q montre que $u_{mq} \geqslant qu_m$ pour tout $q \in \mathbb{N}^*$.

On en déduit que si $n = mq + r$ avec $(q, m, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, alors $u_n \geqslant u_{mq} + u_r \geqslant qu_m + u_r$.

En retranchant $ns = qms + rs$ aux deux membres, on obtient l'autre inégalité demandée (dont l'utilité ne saute pas aux yeux).

C.2) Supposons $n \geqslant m$ et prenons pour q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de n par m, de sorte que $n = mq + r$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![0,\, m-1]\!]$. Posons aussi $M = \max\limits_{k=0}^{m-1} |u_k|$.

Selon **1)**, $\dfrac{u_m}{m} - \dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{u_m}{m} - \dfrac{qu_m + u_r}{n} = \dfrac{ru_m - mu_r}{mn} \leqslant \dfrac{r|u_m| + m|u_r|}{mn} \leqslant \dfrac{|u_m| + M}{n}$.

Le majorant obtenu tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il est donc inférieur ou égal à ε pour n supérieur à un entier N convenable, que l'on peut supposer supérieur ou égal à m.

Finalement, $\frac{u_m}{m} - \frac{u_n}{n} \leqslant \varepsilon$ pour tout $n > N$, ce que l'on voulait.

C.3) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par définition (ou caractérisation) de la borne supérieure, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{u_m}{m} \geqslant s - \varepsilon$.

Un tel m étant fixé, il existe selon **2)** un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{u_n}{n} \geqslant \frac{u_m}{m} - \varepsilon$ pour tout $n > N$.

Finalement, pour $n > N$, on a $s \geqslant \frac{u_n}{n} \geqslant s - 2\varepsilon$. Par définition de la limite, $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge vers s.

• Partie II

A.1) - Pour le sens $\Longleftarrow$ il suffit de prendre $n = 1$. En effet, $S_1 = X_1$, qui a la même loi que X.

- Pour le sens $\Longrightarrow$ on remarque que $(S_n \geqslant na) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} (X_k \geqslant a)$, d'où $P(S_n \geqslant na) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} P(X_k \geqslant a)$.

Mais X_k a la même loi que X, donc $P(X_k \geqslant a) = P(X \geqslant a) = 0$. Finalement, $P(S_n \geqslant na) = 0$.

A.2) a) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $S_{m+n} - S_m = \sum\limits_{k=m+1}^{m+n} X_k = \sum\limits_{k=1}^{n} X_{m+k}$. Les X_k sont indépendantes et suivent la même loi ; or, on sait que la loi d'une fonction (ici la somme) de n variables aléatoires indépendantes ne dépend que des lois de ces variables. Il en résulte que S_n et $S_{m+n} - S_m$ ont la même loi.

b) On remarque cette fois que $(S_m \geqslant mb) \cap (S_{m+n} - S_m \geqslant nb) \subset \left(S_{m+n} \geqslant (m+n)b\right)$ et par conséquent que $P\left(S_{m+n} \geqslant (m+n)b\right) \geqslant P\left((S_m \geqslant mb) \cap (S_{m+n} - S_m \geqslant nb)\right)$.

Les X_k étant indépendantes, $S_m = \sum\limits_{k=1}^{m} X_k$ et $S_{m+n} - S_m = \sum\limits_{k=m+1}^{m+n} X_k$ le sont aussi (lemme des coalitions), donc $P\left((S_m \geqslant mb) \cap (S_{m+n} - S_m \geqslant nb)\right) = P(S_m \geqslant mb)\, P(S_{m+n} - S_m \geqslant nb)$.

Enfin, selon a), $P(S_{m+n} - S_m \geqslant nb) = P(S_n \geqslant nb)$, d'où le résultat.

A.3) Selon **1)**, $P(S_n \geqslant na) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc la suite envisagée par l'énoncé est bien définie.
Posons $u_0 = 0$ et $u_n = \ln\big(P(S_n \geqslant na)\big)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
En passant au logarithme, 2.b) appliqué avec $b = a$ donne $u_{m+n} \geqslant u_m + u_n$ (c'est évident si m ou n est nul).
De plus, la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ est majorée par 0 donc, par application du **I.C.3)**, elle converge vers sa borne supérieure, notée γ_a, qui est bien négative ou nulle puisque c'est son plus petit majorant.
Enfin, l'inégalité $\frac{u_n}{n} \leqslant \gamma_a$ se réécrit $P(S_n \geqslant na) \leqslant e^{n\gamma_a}$ en repassant à l'exponentielle.

B.1) $e^{tS_n} = \prod_{k=1}^{n} e^{tX_k}$. Les e^{tX_k} sont positives et indépendantes (car les X_k le sont), donc $E(e^{tS_n}) = \prod_{k=1}^{n} E(e^{tX_k})$.
Mais e^{tX_k} a même loi que e^{tX} puisque X_k a même loi que X, donc $E(e^{tS_n}) = \big(E(e^{tX})\big)^n = \big(\varphi_X(t)\big)^n$.
Comme $t \geqslant 0$, il vient ensuite $P(S_n \geqslant na) \leqslant P\left(e^{tS_n} \geqslant e^{nta}\right) \leqslant \dfrac{\varphi_X(t)^n}{e^{nta}}$ d'après l'inégalité de Markov.

B.2) a) Pour $n = 1$, l'inégalité du **1)** donne $\varphi_X(t)\,e^{-ta} \geqslant P(X_1 \geqslant a) = P(X \geqslant a) > 0$, donc $\chi(t) \geqslant \ln\big(P(X \geqslant a)\big)$.

b) $0 \in \overset{\circ}{I}$ d'après **I.A.4)**a) donc, par **I.A.4)**c) et d), χ est dérivable en 0 et $\chi'(0) = \dfrac{\varphi'_X(0)}{\varphi_X(0)} - a = E(X) - a < 0$.
Comme $\chi(0) = 0$ et $\chi'(0) \neq 0$, $\chi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \chi'(0)\,t$, donc $\chi(t) < 0$ pour $t > 0$ assez petit. On en déduit que $\eta_a < 0$.

c) L'inégalité du **1)** se réécrit $P(S_n \geqslant na) \leqslant e^{n\chi(t)}$, et cela pour tout $t \in I \cap \mathbb{R}_+$.
On sait qu'il existe une suite (t_k) d'éléments de $I \cap \mathbb{R}_+$ telle que la suite $\big(\chi(t_k)\big)$ converge vers η_a.
Le passage à la limite quand k tend vers $+\infty$ dans l'inégalité $P(S_n \geqslant na) \leqslant e^{n\chi(t_k)}$ donne $P(S_n \geqslant na) \leqslant e^{n\eta_a}$.
Cette dernière inégalité se réécrit $\dfrac{\ln\big(P(S_n \geqslant na)\big)}{n} \leqslant \eta_a$.
Compte tenu du **A.3)**, le passage à la limite donne $\gamma_a \leqslant \eta_a$, d'où enfin $\gamma_a < 0$ d'après b).

d) i. On suppose que $X \sim \mathscr{B}(p)$. D'abord, $\big[P(X \geqslant a) > 0 \text{ et } a > E(X)\big] \iff a \in]p, 1]$.
Ensuite, $I = \mathbb{R}$ et $\chi(t) = \ln(1 - p + pe^t) - ta$. $\chi'(t)$ a le signe de $(1-a)p\,e^t - a(1-p)$, d'où deux cas :
- si $a = 1$, χ est décroissante, donc $\eta_1 = \lim\limits_{+\infty} \chi = \ln p$.
- si $p < a < 1$, χ est minimale au point $t_a = \ln \dfrac{a(1-p)}{(1-a)p}$ et $t_a > 0$ puisque $a > p$ et $1 - p > 1 - a$.
On calcule alors $\eta_a = \chi(t_a) = a \ln \dfrac{p}{a} + (1-a)\ln \dfrac{1-p}{1-a}$.

ii. On suppose que $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. $\big[P(X \geqslant a) > 0 \text{ et } a > E(X)\big] \iff a \in]\lambda, +\infty[$.
On a vu en **I.A.2)**c) que $I = \mathbb{R}$ et que $\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$, donc $\chi(t) = \lambda(e^t - 1) - ta$.
$\chi'(t) = \lambda e^t - a$, donc χ est minimale en $t_a = \ln \dfrac{a}{\lambda} > 0$, donc $\eta_a = \chi(t_a) = a - \lambda - a \ln \dfrac{a}{\lambda}$.

C.1) a) $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} \dfrac{e^{tx}}{E(e^{tX})} P(X = x) = \dfrac{1}{E(e^{tX})} \sum\limits_{x \in X(\Omega)} e^{tx} P(X = x) = 1$ (théorème de transfert).

b) Pour $x \in X(\Omega) = X'(\Omega)$, $xP(X' = x) = \dfrac{1}{E(e^{tX})}\, xe^{tx} P(X = x)$. Selon **I.A.4)**d), Xe^{tX} admet une espérance, donc la famille $\big(xe^{tx}P(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, de somme $E(Xe^{tX})$; la famille $\big(x\,P(X' = x)\big)_{x \in X'(\Omega)}$ l'est donc aussi et $E(X') = \sum\limits_{x \in X'(\Omega)} xP(X' = x) = \dfrac{1}{E(e^{tX})} \sum\limits_{x \in X(\Omega)} xe^{tx} P(X = x) = \dfrac{E(Xe^{tX})}{E(e^{tX})} = \dfrac{\varphi'_X(t)}{\varphi_X(t)}$.
D'autre part, on sait que χ est dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, avec $\chi' = \psi_X - a$; comme χ atteint par hypothèse sa borne inférieure sur $I \cap \mathbb{R}_+$ en un point σ intérieur à $I \cap \mathbb{R}_+$, $\chi'(\sigma) = 0$, *i.e.* $\psi_X(\sigma) = a$.
Enfin, ψ_X est strictement croissante sur $\overset{\circ}{I}$ (**I.A.4)**e)) et $t > \sigma$, donc $\psi_X(t) > \psi_X(\sigma)$, *i.e.* $E(X') > a$.

C.2) a) On remarque tout d'abord que, f étant l'application introduite dans l'énoncé, $f(X_1, \ldots, X_n) = 1_{(na \leqslant S_n \leqslant nb)}$ et $f(X'_1, \ldots, X'_n) = 1_{(na \leqslant S'_n \leqslant nb)}$. Par conséquent, l'égalité admise dans l'énoncé donne dans ce cas :
$$P(na \leqslant S'_n \leqslant nb) = E(1_{(na \leqslant S'_n \leqslant nb)}) = \frac{E(1_{(na \leqslant S_n \leqslant nb)} e^{tS_n})}{\varphi_X(t)^n}.$$
Mais $1_{(na \leqslant S_n \leqslant nb)} e^{tS_n} \leqslant 1_{(na \leqslant S_n)} e^{ntb}$ donc $E(1_{(na \leqslant S_n \leqslant nb)} e^{tS_n}) \leqslant e^{ntb} E(1_{(na \leqslant S_n)}) = P(S_n \geqslant na)\, e^{ntb}$.
Finalement, on obtient bien $P(na \leqslant S'_n \leqslant nb) \leqslant \dfrac{P(S_n \geqslant na)\, e^{ntb}}{\varphi_X(t)^n}$.

b) $a < E(X') = \psi_X(t) < b$ donc, selon **I.B.2)**, la suite de terme général $\pi'_n = P(na \leqslant S'_n \leqslant nb)$ converge vers 1.

D'autre part, **II.A.3)** et le a) donnent $\pi'_n \leqslant \dfrac{e^{n\gamma_a} e^{ntb}}{\varphi_X(t)^n}$, d'où en passant au logarithme et en divisant par n :

$$\frac{1}{n} \ln \pi'_n \leqslant \gamma_a + tb - \ln\big(\varphi_X(t)\big) = \gamma_a + t(b-a) - \chi(t),$$

puis, en passant à la limite quand n tend vers l'infini : $0 \leqslant \gamma_a + t(b-a) - \chi(t)$, ou $\gamma_a \geqslant \chi(t) + t(a-b)$.

Cette dernière inégalité est valable pour tout $t \in \overset{\circ}{I}$ tel que $t > \sigma$ et pour tout $b \in \mathbb{R}$ tel que $b > \psi_X(t)$.

On passe d'abord à la limite, pour t fixé, lorsque b tend vers $\psi_X(t)$; on obtient $\gamma_a \geqslant \chi(t) + t\big(a - \psi_X(t)\big)$.

χ et ψ_X étant continues, on passe ensuite à la limite quand t tend vers σ ; on obtient $\gamma_a \geqslant \chi(\sigma) + \sigma\big(a - \psi_X(\sigma)\big)$.

Mais $\chi(\sigma) = \eta_a$ par définition et on a vu au **C.1)**b) que $\psi_X(\sigma) = a$; on a donc $\gamma_a \geqslant \eta_a$.

L'inégalité $\gamma_a \leqslant \eta_a$ ayant été établie au **B.2)**c), on conclut que $\gamma_a = \eta_a$.

C.3) a) Prenons pour X une variable de Bernoulli de paramètre $1/2$; alors, S_n suit la loi binômiale $\mathscr{B}(n, 1/2)$, qui est symétrique par rapport à $n/2$ (*i.e.* $P(S_n = k) = P(S_n = n-k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$).

Posons $a = \alpha + 1/2 \in]1/2, 1[$; on a bien $a > 1/2 = E(X)$ et $P(X \geqslant a) = 1/2 > 0$.

Selon **II.C.2)**b) et **II.B.2)**d)i., $\gamma_a = \eta_a = \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \ln \dfrac{1/2}{1/2 - \alpha} + \left(\frac{1}{2} + \alpha\right) \ln \dfrac{1/2}{1/2 + \alpha}$

$$= \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \ln(1 - 2\alpha) - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \ln(1 + 2\alpha).$$

$$2\,P(S_n \geqslant na) = 2\,P(S_n \geqslant n/2 + \alpha n) = P(S_n \geqslant n/2 + \alpha n) + P(S_n \leqslant n/2 - \alpha n) = P\big(|S_n - n/2| \geqslant \alpha n\big)$$

$$= \sum_{k \in A_n} P(S_n = k) = \sum_{k \in A_n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} = \frac{1}{2^n} U_n.$$

Par suite, $\dfrac{\ln U_n}{n} = \dfrac{(n+1)\ln 2}{n} + \dfrac{\ln\big(P(S_n \geqslant an)\big)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln 2 + \gamma_a$ (*cf* A.3)).

En repassant à l'exponentielle on obtient : $U_n^{1/n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2\, e^{\gamma_a} = 2\, \dfrac{(1 - 2\alpha)^{\alpha - 1/2}}{(1 + 2\alpha)^{\alpha + 1/2}}$.

b) Prenons maintenant pour X une variable de Poisson de paramètre λ ; on sait alors que S_n suit la loi de Poisson de paramètre $n\lambda$ (c'est classique, et immédiat par les fonctions génératrices).

On a $\alpha > \lambda = E(X)$ et bien sûr $P(X \geqslant \alpha) > 0$.

Selon **II.C.2)**b) et **II.B.2)**d)ii., $\gamma_\alpha = \eta_\alpha = \alpha - \lambda - \alpha \ln \dfrac{\alpha}{\lambda}$.

$$T_n = \sum_{k \geqslant \alpha n} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \sum_{k \geqslant \alpha n} e^{n\lambda} P(S_n = k) = e^{n\lambda} P(S_n \geqslant \alpha n).$$

Par suite, $\dfrac{\ln T_n}{n} = \lambda + \dfrac{\ln\big(P(S_n \geqslant \alpha n)\big)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda + \gamma_\alpha = \alpha - \alpha \ln \dfrac{\alpha}{\lambda}$, donc $T_n^{1/n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^\alpha \left(\dfrac{\lambda}{\alpha}\right)^\alpha$.

Annexe **: justification de l'égalité admise en II.C.2).**

Pour alléger, notons $V_n = (X_1, \ldots, X_n)$ et $V'_n = (X'_1, \ldots, X'_n)$.

Par le théorème de transfert, $E\big(f(V'_n)\big) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)^n} f(x)\, P(V'_n = x) = \sum_{x \in X(\Omega)^n} f(x)\, P\left(\bigcap_{k=1}^n (X'_k = x_k)\right)$.

Par indépendance des X'_k :

$$E\big(f(V'_n)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)^n} f(x) \left(\prod_{k=1}^n P(X'_k = x_k)\right) = \frac{1}{\varphi_X(t)^n} \sum_{x \in X(\Omega)^n} f(x) \exp\left(t \sum_{k=1}^n x_k\right) \left(\prod_{k=1}^n P(X_k = x_k)\right).$$

Par indépendance des X_k : $E\big(f(V'_n)\big) = \dfrac{1}{\varphi_X(t)^n} \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)^n} f(x) \exp\left(t \sum_{k=1}^n x_k\right) P(V_n = x)$.

Enfin $E\big(f(V'_n)\big) = \dfrac{1}{\varphi_X(t)^n}\, E\big(f(V_n)\, e^{tS_n}\big)$ par le théorème de transfert.
