Corrigé CCP PC maths 2 2007

Partie I

On notera S_I l'ensemble des solutions de (E) sur I.

I.1. Soit y une solution de (E) sur I, y est deux fois dérivable donc fortiori de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
Supposons y de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors de $y'' = -\varphi.y$, comme φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on déduit que y'' est de classe $\mathcal{C}^n$ donc y de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ et donc aussi de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I.
Par récurrence sur n, y est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

I.2. Soit $y \in S_I$. Comme I est symétrique par rapport à 0, on peut définir sur I la fonction $z : x \mapsto y(-x)$ et elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I car y l'est.
De plus, pour tout $x \in I$, $z'(x) = -y'(-x)$ et $z''(x) = y''(-x)$.
De plus, comme φ est une fonction paire,
$\forall x \in I \quad z''(x) + \varphi(x)z(x) = y''(-x) + \varphi(-x).y(-x) = 0$
La fonction z est donc solution de (E) sur I.

I.3. Notons g_0 la fonction définie sur I par : $\forall x \in I,\ g_0(x) = f_0(-x)$.
On a d'aprs la question précédente : $g_0(0) = f_0(0) = 1$, $g_0'(0) = -f_0'(0) = 0$ et $g_0 \in S_I$.
D'après le résultat rappelé en préambule, il existe une unique solution de (E) sur I vérifiant ces conditions initiales : par conséquent $g_0 = f_0$ et la fonction f_0 est paire .

Soit g_1 la fonction définie sur I par $g_1(x) = f_1(-x)$.
D'après I.2, $g_1 \in S_I$. D'autre part, comme (E) est une équation différentielle linéaire homogène, S_I est un espace vectoriel et $-g_1 \in S_I$.
De plus, pour tout $x \in I$,
$-g_1(0) = -f_1(0) = 0$ et $(-g_1)'(0) = f_1'(0) = 1$.
D'après l'unicité de la solution de (E) vérifiant ces conditions initiales, $-g_1 = f_1$ et la fonction f_1 est impaire.

Le théorème utilisé ici est le théorème de Cauchy-Lipschitz pour une équation différentielle linéaire, résoluble dont les coefficients sont des fonctions continues.

(E) est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre, résoluble dont les coefficients sont des fonctions continues sur I : on sait alors que l'ensemble S_I des solutions de (E) sur I est un espace vectoriel de dimension 2.
(f_0, f_1) est un système de solutions de (E) sur I, de cardinal 2. De plus il est libre :
Pour tout $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}2$ tel que $\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 = 0$, en prenant la valeur en 0, $\alpha_0 = 0$ puis comme f_1 n'est pas la fonction nulle, $\alpha_1 = 0$.

On en déduit que (f_0, f_1) est une base de S_I. $S_I = \{\, \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 \mid (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}2 \,\}$, ce que l'on peut encore traduire en disant que la solution générale de (E) est :

$$y = \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 \quad (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}2.$$

Soit $f = \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1$ une solution de (E). Notons g la fonction définie sur I par :
$\forall x \in I \quad g(x) = f(-x)$.
$\forall x \in I, \quad g(x) = \alpha_0 f_0(-x) + \alpha_1 f_1(-x) = \alpha_0 f_0(x) - \alpha_1 f_1(x)$ en utilisant la parité de f_0 et l'imparité de f_1.
Finalement, $g = \alpha_0 f_0 - \alpha_1 f_1$. et $-g = -\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1$
Comme (f_0, f_1) est une base de S_I,
$f = g \iff \alpha_1 = -\alpha_1 \iff \alpha_1 = 0$ et $f = -g \iff \alpha_0 = 0$.

Les solutions de (E) paires sont les fonctions $\alpha_0 f_0$ où $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ et les solutions de (E) impaires sont les fonctions $\alpha_1 f_1$ où $\alpha_1 \in \mathbb{R}$.

I.4.

I.4.1. $u' = \dfrac{f_1' f_0 - f_0' f_1}{f_0 2} = \dfrac{w}{f_0 2}$

w est le Wronskien de (f_0, f_1). Comme (f_0, f_1) est une base de l'espace vectoriel S_I des solutions de (E) sur I, la fonction w ne s'annule pas sur I.

D'autre part, $u'' = \dfrac{w'}{f_0 2} - 2\,\dfrac{f_0'}{f_0 3}$ avec $w' = f_1'' f_0 - f_0'' f_1 = 0$ et $\boxed{\dfrac{u''}{u'} = -2\,\dfrac{f_0'}{f_0}}$

On en déduit alors immédiatement que la fonction w est constante de valeur $w(0) = 1$ sur I et donc que $u' = \dfrac{1}{f_0 2}$. Mais ce n'est pas la méthode envisagée par l'énoncé.

I.4.2. On en déduit que la fonction $f_0^2 u'$ a pour dérivée $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_0^2 u') = f_0^2 u'' + 2 f_0 f_0' u' = 0$ et donc que cette fonction est constante sur I. D'autre part, $f_0 2(0) u'(0) = u'(0) = w(0) = 1$ D'où

$$\boxed{u' = \frac{1}{f_0 2}}$$

I.4.3. Comme $u(0) = 0$, $u = u_0$ et $\boxed{f_1 = f_0 u_0}$

I.5.

I.5.1. Soit $f : x \mapsto \cos 2x$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$\forall x \in I, \quad f'(x) = -2 \sin x \cos x$ et $f''(x) = 2(\sin 2x - \cos 2x)$.

Comme f ne s'annule pas sur I et qu'elle est solution de (E), on a donc :

$\forall x \in I$, $\varphi(x) = -\dfrac{f''(x)}{f(x)} = 2(1 - \tan 2x)$.

On remarque que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. Comme la solution de (E) vérifiant ces conditions initiales est unique (th de Cauchy-Lipschitz), $f_0 = f$.

$$\boxed{\forall x \in I, \quad f_0(x) = \cos 2x \quad \text{et} \quad \varphi(x) = 2(1 - \tan 2x)}$$

I.5.2. On a pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$u_0(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\cos 4t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1 + \tan^2 t}{\cos 2t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x (1 + \tan^2 t) \tan' t \,\mathrm{d}t = \left[\tan(t) + \tfrac{1}{3}\tan 3(t)\right]_0^x$

car $\dfrac{1}{\cos 2t} = 1 + \tan 2t = \tan'(t)$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad u_0(x) = \tan x + \frac{1}{3}\tan 3x$$

I.5.3. D'après **I.4.3**, pour tout $x \in I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$f_1(x) = u_0(x) f_0(x) = (\tan x + \dfrac{1}{3}\tan 3x)\cos 2x = \tan x(\cos 2x + \dfrac{1}{3}\sin 2x)$

$$f_1(x) = \frac{\tan x}{3}(1 + 2\cos 2x)$$

Comme $S_I = \mathrm{Vect}(f_0, f_1) = \mathrm{Vect}(f_0, 3f_1)$, la solution générale de (E) sur I est :

$$\boxed{y(x) = \alpha_0 \cos 2x + \alpha_1 \tan x(1 + 2\cos 2x) \qquad (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}2}.$$

Partie II

II.1. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. D'après **I.1**, y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $\tilde{y} : x \mapsto y(x + 2\pi)$ est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{y}'(x) = y'(x + 2\pi)$ et $\tilde{y}''(x) = y''(x + 2\pi)$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme φ est 2π-périodique,
$\tilde{y}''(x) + \varphi(x)\tilde{y}(x) = y''(x+2\pi) + \varphi(x+2\pi)y(x+2\pi) = 0$.

$$\boxed{\text{Si } y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R},\ \tilde{y} : x \mapsto y(x+2\pi) \text{ l'est également.}}$$

II.3. En particulier les fonctions $\tilde{f_0} : x \mapsto f_0(x+2\pi)$ et $\tilde{f_1} : x \mapsto f_1(x+2\pi)$ sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
Comme (f_0, f_1) est une base de S_I, $\tilde{f_0}$ et $\tilde{f_1}$ sont combinaisons linéaires de f_0 et f_1 ce qui assure l'existence de constantes $(w_{i,j})$ pour $(i,j) \in \{0,1\}2$ telles que :

$$\tilde{f_0} = w_{00}f_0 + w_{10}f_1 \quad \tilde{f_1} = w_{01}f_0 + w_{11}f_1$$

On a alors également : $\tilde{f_0}' = w_{00}f_0' + w_{10}f_1' \quad \tilde{f_1}' = w_{01}f_0' + w_{11}f_1'$
En considérant les valeurs de $\tilde{f_0}$, $\tilde{f_1}$, $z\tilde{f_0}'$ et $\tilde{f_1}'$ en 0, on obtient finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f_0(x+2\pi) = w_{00}f_0(x) + w_{10}f_1(x) \\ f_1(x+2\pi) = w_{01}f_0(x) + w_{11}f_1(x) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} w_{00} = f_0(2\pi) & w_{10} = f_0'(2\pi) \\ w_{01} = f_1(2\pi) & w_{11} = f_1'(2\pi) \end{cases}}$$

II.3. Soit g une solution de (E) et $\tilde{g} : x \mapsto g(x+2\pi)$. Notons (α, β) les coordonnées de g dans la base (f_0, f_1). On a donc $g = \alpha f_0 + \beta f_1$.
Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a d'après II.2.
$g(x+2\pi) = (w_{0,0}\alpha + w_{0,1}\beta)f_0(x) + (w_{1,0}\alpha + w_{1,1}\beta)f_1(x)$.
Les coordonnées $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ de $\tilde{g}$ dans la base (f_0, f_1) vérifient donc $\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$
(i) g est 2π-périodique si, et seulement si, $g = \tilde{g}$ c'est-à-dire $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$
(ii) g n'est pas identiquement nulle si, et seulement si, $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Les conditions (i) et (ii) sont réalisées si, et seulement si, W admet 1 pour valeur propre.
Autre rédaction :
D'après la question **II.1**, on peut considérer $\Psi : \left| \begin{array}{ccc} S_I & \longrightarrow & S_I \\ y & \longmapsto & z : x \mapsto y(x+2\pi) \end{array} \right.$ (Ici $I = \mathbb{R}$)
De plus, Ψ est clairement linéaire. Ψ est donc un endomorphisme de S_I dont la matrice dans la base (f_0, f_1) de S_I est la matrice W.
L'équation (E) admet une solution non nulle 2π-périodique, si et seulement si il existe $g \in S_I$ telle que $g \neq 0$ et $\Psi(g) = g$, ce qui équivaut à dire que 1 est valeur propre de l'endomorphisme Ψ ou encore que 1 est valeur propre de la matrice W de Ψ dans la base (f_0, f_1).

II.4. Soit g une solution de (E) non nulle et 2π-périodique.
D'après la question **I.2**, la fonction $x \mapsto g(-x)$ est encore solution de (E).
De plus comme S_I est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel les fonctions $h : x \mapsto g(x) + g(-x)$ et $k : x \mapsto g(x) - g(-x)$ sont encore solutions de (E).
On constate que h est paire et que k est impaire.
De plus elles sont toutes les deux 2π-périodiques.
Comme $g = \dfrac{1}{2}(h+k)$ et que $g \neq 0$, h est k ne sont pas toutes les deux identiquement nulles.
• Supposons que $h \neq 0$:
Comme h est une fonction paire, élément de S_I,d'après **I.3** il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $h = \alpha.f_0$. De plus $h \neq 0$ donc $\alpha \neq 0$.
On a alors $f_0 = \dfrac{1}{\alpha}h$. Comme h est 2π-périodique, f_0 est 2π-périodique.
Remarque : Dans ce cas, f_0' est également 2π périodique et la première colonne de W est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• Supposons que $k \neq 0$.
Comme k est une fonction impaire élément de S_I, d'après **I.3**, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $k = \beta.f_1$. Comme k est non nulle, $\beta \neq 0$.
Comme k est 2π-périodique, $f_1 = \dfrac{1}{\beta} k$ est 2π-périodique.

Remarque : Dans ce cas, f_1' est également 2π périodique et la deuxième colonne de W est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

II.5.
II.5.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto K(x,t)f_0(t)$ est continue sur $[-\pi, \pi]$ donc F est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus comme pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [-\pi, \pi]$, $K(-x,t) = K(x,t)$, la fonction F est paire.
Notons $f : (x,t) \mapsto K(x,t).f_0(t)$. pat théorèmes d'opérations et composition, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}2$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[-\pi, \pi]$ donc elle y est intégrable.
- f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial 2f}{\partial x2}$ définies par :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}2, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -k\cos t \sin x \mathrm{e}^{k\cos t \cos x} f_0(t) \\ \dfrac{\partial 2f}{\partial x2}(x,t) = k2\cos^2 t \sin 2x \mathrm{e}^{k\cos t \cos x} f_0(t) - k\cos t \cos x \mathrm{e}^{k\cos t \cos x} f_0(t) \end{cases}$$

  - $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial 2f}{\partial x2}(x,t)$ sont continues sur $[-\pi, \pi]$ donc elles y sont intégrables.
  - $\forall t \in [-\pi, \pi]$, $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $x \mapsto \dfrac{\partial 2f}{\partial x2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
  - Domination :
    Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in [-\pi, \pi]$,

$$|\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,| \leq |\,k\,|\mathrm{e}^{|\,k\,|}|\,f_0(t)\,| = h_1(t) \qquad |\,\frac{\partial 2f}{\partial x2}(x,t)\,| \leq (k2 + |\,k\,|).\mathrm{e}^{|\,k\,|}.|\,f_0(t)\,| = h_2(t).$$

    Les fonctions h_1 et h_2 sont continues sur les segments $[-\pi, \pi]$ donc elles y sont intégrables

On déduit du théorème de dérivation des intégrales à paramètre que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F'(x) = \int_{-\pi}^{\pi} -k\cos t \sin x \mathrm{e}^{k\cos t \cos x} f_0(t)\,\mathrm{d}t$$

$$F''(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (k2\cos^2 t \sin 2x - k\cos t \cos x)\mathrm{e}^{k\cos t \cos x} f_0(t)\,\mathrm{d}t$$

II.5.2. $\forall (x,t) \in \mathbb{R}2$,
$\dfrac{\partial 2K}{\partial x2}(x,t) + (a - k2\sin^2 x)K(x,t) = (k2\cos 2t \sin 2x - k\cos t \cos x + a - k2\sin 2x)K(x,t)$
$= [-k2\sin 2x \sin 2t - k\cos t \cos x + a]K(x,t)$.
$\dfrac{\partial K}{\partial t}(x,t) = -k\cos x \sin t K(x,t)$, $\qquad \dfrac{\partial 2K}{\partial t2}(x,t) = (k2\cos 2x \sin 2t - k\cos x \cos t)K(x,t)$ puis
$\dfrac{\partial 2K}{\partial t2}(x,t) + (a - k2\sin 2t)K(x,t) = (k2\cos 2x \sin 2t - k\cos x \cos t + a - k2\sin 2t)K(x,t)$
$= [-k2\sin 2t \sin 2x - k\cos t \cos x + a]K(x,t)$

Finalement

$$\boxed{\forall (x,t)\in\mathbb{R}2\quad \frac{\partial 2K}{\partial x2}(x,t)+(a-k2\sin^2 x)K(x,t)=\frac{\partial 2K}{\partial t2}(x,t)+(a-k2\sin 2t)K(x,t)}$$

En utilisant l'expression de F'' trouvée précédemment,

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathbb{R},\quad F''(x)+(a-k2\sin 2x)F(x) &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial 2F}{\partial x2}(x,t).f_0(t)\,\mathrm{d}t+(a-k2\sin 2x)\int_{-\pi}^{\pi}K(x,t)f_0(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}(\frac{\partial 2K}{\partial x2}(x,t)+(a-k2\sin^2 x)K(x,t))f_0(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}(\frac{\partial 2K}{\partial t2}(x,t)+(a-k2\sin 2t)K(x,t))f_0(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial 2K}{\partial t2}(x,t)f_0(t)\,\mathrm{d}t+\int_{-\pi}^{\pi}(a-k2\sin 2t)K(x,t))f_0(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

x étant fixé, les fonctions $t\mapsto \dfrac{\partial K}{\partial t}(x,t)$ et f_0 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et en intégrant par parties avec $\left\{\begin{array}{ll} u'=\dfrac{\partial 2K}{\partial t2}t(x,t) & u=\dfrac{\partial K}{\partial t}(x,t)\\ v=f_0(t) & v'=f_0'(t)\end{array}\right.$, on obtient :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial 2K}{\partial t2}(x,t)\,f_0(t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{\partial K}{\partial t}(x,t)\,f_0(t)\right]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial K}{\partial t}(x,t).f_0'(t)\,\mathrm{d}t$$

Mais $t\mapsto K(x,t)$ est 2π périodique donc $t\mapsto \dfrac{\partial K}{\partial t}(x,t)$ l'est également et par hypothèse la fonction f_0 est 2π-périodique.

On en déduit que $t\mapsto \dfrac{\partial K}{\partial t}(x,t)\,f_0(t)$ est 2π-périodique puis que $\left[\dfrac{\partial K}{\partial t}(x,t)\,f_0(t)\right]_{-\pi}^{\pi}=0$.

On a donc $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial 2K}{\partial t2}(x,t)\,f_0(t)\,\mathrm{d}t=-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial K}{\partial t}(x,t).f_0'(t)\,\mathrm{d}t$

On effectue une nouvelle intégration par parties : $\left\{\begin{array}{ll} u'=-\dfrac{\partial K}{\partial t}(x,t) & u=-K(x,t)\\ v=f_0'(t) & v'=f_0''(t)\end{array}\right.$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial 2K}{\partial t2}(x,t)\,f_0(t)\,\mathrm{d}t=[-K(x,t).f_0'(t)]_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}K(x,t)f_0''(t)\,\mathrm{d}t.$$

x étant fixé la fonction $t\mapsto -K(x,t)f_0'(t)$ est 2π-périodique en tant que produit de deux fonctions 2π-périodiques et donc $[-K(x,t).f_0'(t)]_{-\pi}^{\pi}=0$.

Finalement,

$$\begin{aligned}
F''(x)+(a-k2\sin 2x)F(x) &= \int_{-\pi}^{\pi}K(x,t)f_0''(t)\,\mathrm{d}t+\int_{-\pi}^{\pi}(a-k2\sin 2t)K(x,t))f_0(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}(f_0''(t)+(a-k2\sin 2t)f_0(t))K(x,t)\,\mathrm{d}t\\
&= 0\quad \text{car } f_0 \text{ est solution de } (E).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad F''(x)+(a-k2\sin 2x)F(x)=0}$$

II.5.3. La fonction F est paire et solution de (E) sur $\mathbb{R}$. D'après **I.3**, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $F=\lambda f_0$, ce qui s'écrit encore :

$$\boxed{\exists\lambda\in\mathbb{R}\quad\forall x\in\mathbb{R}\quad\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{k\cos t\cos x}f_0(t)\,\mathrm{d}t=\lambda f_0(x)}$$

Remarque : On aurait pu utiliser les conditions initiales... On note $\lambda=F(0)$ et on remarque que $F'(0)=0$ donc $F=\lambda f_0+0f_1$...

Partie III

On note toujours S_I l'ensemble des solutions de (E) sur I avec ici $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

III.1. $(E) \quad y'' + \omega 2y = 0$ avec $\omega > 0$.
La solution générale de (E) sur I est :

$$\boxed{y(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x \qquad (A, B) \in \mathbb{R}2}$$

Compte tenu des conditions initiales f_0 et f_1 sont définies sur I par :

$$\boxed{\forall x \in I \quad f_0(x) = \cos\omega x \qquad f_1(x) = \frac{1}{\omega}\sin\omega x.}$$

III.2. L'application $\quad \Phi : \left| \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow &]-1, 1[\\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \right.$ est un $\mathcal{C}^\infty$-diffeomorphisme .
Si z est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ l'application y définie sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par:
$y(x) = z(\sin x)$ est de clase $\mathcal{C}^\infty$ sur I. De plus,

$$\forall x \in I \quad y'(x) = z'(\sin x).\cos x \qquad y''(x) = \cos 2x z''(x) - \sin x z'(\sin x)$$

$$\begin{aligned} y \in S_I &\iff \forall x \in I \quad (1 - \sin 2x)z''(\sin x) - \sin x z'(\sin x) + \omega 2z(\sin x) = 0 \\ &\iff \forall X \in]-1, 1[\quad (1 - X2)z''(X) - Xz'(X) + \omega^2 z(X) = 0 \qquad (E') \end{aligned}$$

car Φ est une bijection.

III.3.
III.3.1. z est developpable en série entière sur $]-1, 1[$ donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$. De plus, pour tout $X \in]-1, 1[$,

$z(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$

$z'(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n X^{n-1} \qquad Xz'(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n X^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n X^n$ car pour $n = 0$, $n a_n = 0$. $z''(X) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n X^{n-2} \qquad X2z''(X) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n X^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n X^n$ car pour $n = 1$ et $n = 0$, $n(n-1)a_n = 0$.
De plus en effectuant le changement d'indice $k = n - 2$,
$z''(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}X^k = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}X^n.$
z est solution de (E') si et seulement si pour tout $X \in]-1, 1[$,
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - n a_n + \omega 2a_n]X^n = \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n2 - \omega 2)a_n]X^n = 0.$
Par unicité du developpement en série entière de la fonction nulle, cette égalité équivaut à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n2 - \omega 2)a_n = 0$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)(n+1) \neq 0$, $z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ est solution de (E') si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{n2 - \omega 2}{(n+2)(n+1)}\, a_n \quad (\mathcal{R})$$

Soit (a_n) une suite vérifiant $(\mathcal{R})$
En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a_{2p} = \dfrac{(2p-2)2 - \omega 2)}{(2p)(2p-1)}\, a_{2p-2}$, puis par récurrence sur p :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad a_{2p} = \frac{a_0}{(2p)!} \prod_{k=0}^{p-1} (4k2 - \omega 2). \quad (1)$$

En effet pour $p = 1$, $\dfrac{a_0}{(2p)!} \displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} (4k2 - \omega 2) = \dfrac{-\omega 2}{2} a_0 = a_1$.
Si l'égalité est vraie pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$,
$a_{2p+2} = \dfrac{4p2 - \omega 2}{(2p+2)(2p+1)} \cdot \dfrac{a_0}{(2p)!} \displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} (4k2 - \omega 2) = \dfrac{a_0}{(2p+2)!} \cdot \displaystyle\prod_{k=0}^{p} (4k2 - \omega 2)$.
L'égalité est vraie au rang $p + 1$: la récurrence est établie.

De même, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a_{2p+1} = \dfrac{(2p-1)2 - \omega 2}{(2p+1)(2p)} a_{2p-1}$. Par récurrence sur p, on a alors

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad a_{2p+1} = \frac{a_1}{(2p+1)!} \cdot \prod_{k=0}^{p-1} ((2k+1)2 - \omega 2) \quad (2)$$

Réciproquement, une suite (a_n) vérifiant **(1)** et **(2)** vérifie $(\mathcal{R})$.

Si (E') admet une solution polynomiale z non nulle, elle est développable en série entière sur $] -1, 1 [$, $z(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ où les coefficients a_n sont nuls à partir d'un certain rang et non tous nuls. En particulier si $\deg(z) = N$, $a_N \neq 0$ et $\forall k \geq N + 1$, $a_k = 0$.
Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{k+2} = 0 \iff a_k = 0$ ou $\omega 2 = k2$.
Comme $\omega > 0$, $a_{k+2} = 0 \iff a_k = 0$ ou $\omega = k$.
Comme $a_{n+2} = 0$ et $a_N \neq 0$, necessairement $\omega = N$.
Réciproquement si $\omega = N \in \mathbb{N}^*$.
• Si $N = 2q$:

pour tout $p \in \mathbb{N}$ posons $a_{2p} = \begin{cases} a_0 \in \mathbb{R}^* & \text{si } p = 0 \\ \dfrac{a_0}{(2p)!} \displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} (4k2 - 4q2) & \text{si } 1 \leq p \leq q \\ 0 & \text{si } p > q \end{cases}$ et $a_{2p+1} = 0$.

Soit pour tout $X \in \mathbb{R}$, $z(X) = \displaystyle\sum_{p=0}^{q} a_{2p} X^{2p} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$. z est une fonction polynôme non nulle.
La suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie les relations de récurrence $(\mathcal{R})$ donc z est solution de l'équation (E').

On utilise ici, comme dans la question suivante l'équivalence entre z solution de (E') et les relations de récurrence $(\mathcal{R})$. Le texte est ambigu car il ne fait établir que l'implication : si z est solution de (E') alors (a_n) vérifie $(\mathcal{R})$.

Remarque : pour tout $p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq q$, on a encore $a_{2p} = \dfrac{(-1)^p 4^p}{(2p)!} \dfrac{q}{q+p} \dfrac{(q+p)!}{(q-p)!} a_0$

• Si $N = 2q + 1$ avec $q \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, posons $a_{2p} = 0$ et $a_{2p+1} = \begin{cases} a_1 \in \mathbb{R}^* & \text{si } p = 0 \\ \dfrac{a_1}{(2p+1)!} \displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} ((2k+1)2 - (2q+1)2) & \text{si } 1 \leq p \leq q \\ 0 & \text{si } p > q \end{cases}$.

Soit z définie par $\forall X \in \mathbb{R}$, $z(X) = \displaystyle\sum_{p=0}^{q} a_{2p+1} X^{2p+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$. z est une fonction polynôme non nulle solution de (E') car, comme précédemment, la suite (a_n) vérifie la relation $(\mathcal{R})$.

Remarque Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut écrire $a_{2p+1} = \dfrac{4^p (-1)^p}{(2p+1)!} \cdot \dfrac{(q+p)!}{(q-p)!}$

Soit (a_n) une suite vérifiant les relations **(1)** et **(2)**. Montrons que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ est supérieur ou égal à 1.

- Si $\omega \in \mathbb{N}$, d'après ce qui précède , la suite (a_n) est stationnaire de valeur 0 donc $R = +\infty$.
- Si $\omega \notin \mathbb{N}$

Etude de $\sum_{p\geq 0} a_{2p} X^{2p}$.

Si $a_0 \neq 0$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} \neq 0$. On a alors pour $X \neq 0$,
$\dfrac{a_{2p+2}X^{2p+2}}{a_{2p}X^{2p}} = \dfrac{(2p)2 - \omega 2}{(2p+2)(2p+1)} X2$, $\lim_{p\to+\infty} \left| \dfrac{a_{2p+2}X^{2p+2}}{a_{2p}} X^{2p} \right| = |\, X2 \,|$.
D'après le théorème de d'Alembert, si $|\, X \,| < 1$, la série $\sum_{p\geq 0} a_{2p}X^{2p}$ est absolument convergente, et si $|\, X \,| > 1$, elle est grossièrement divergente : le rayon de convergence de $\sum_{p\geq 0} a_{2p}X^{2p}$ est 1.
Si $a_0 = 0$: pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = 0$ et la série entière $\sum_{p\geq 0} a_{2p}X^{2p}$ est la série nulle de rayon de convergence infini :
Dans tous les cas, si $|\, X \,| < 1$, la série $\sum_{p\geq 0} a_{2p}X^{2p}$ est absolument convergente

Etude de $\sum_{p\geq 0} a_{2p+1} X^{2p+1}$.

Si $a_1 \neq 0$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} \neq 0$. On a alors pour tout $X \neq 0$,
$\dfrac{a_{2p+3}X^{2p+3}}{a_{2p+1}X^{2p+1}} = \dfrac{(2p+1)2 - \omega 2}{(2p+3)(2p+2)} X2$, $\lim_{p\to+\infty} \left| \dfrac{a_{2p+3}X^{2p+3}}{a_{2p+1}} X^{2p+1} \right| = |\, X2 \,|$.
D'après le théorème de D'alembert, si $|\, X \,| < 1$, la série $\sum_{p\geq 0} a_{2p+1}X^{2p+1}$ est absolument convergente, et si $|\, X \,| > 1$, elle est grossièrement divergente : le rayon de convergence de $\sum_{p\geq 0} a_{2p+1}X^{2p+1}$ est 1.
Si $a_1 = 0$: pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$ et la série entière $\sum_{p\geq 0} a_{2p+1}X^{2p+1}$ est la série nulle de rayon de convergence infini :
Dans tous les cas, si $|\, X \,| < 1$, la série $\sum_{p\geq 0} a_{2p+1}X^{2p+1}$ est absolument convergente.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, notons $\alpha_{2p} = a_{2p}$, $\alpha_{2p+1} = 0$, $\beta_{2p} = 0$ et $\beta_{2p+1} = a_{2p+1}$.
Soit $X \in \mathbb{R}$ tel que $|\, X \,| < 1$:
$\sum_{n\geq 0} \alpha_n X^n = \sum_{p\geq 0} a_{2p}X^{2p}$ et $\sum_{n\geq 0} \beta_n X^n = \sum_{p\geq 0} a_{2p+1}X^{2p+1}$ sont absolument convergentes.
Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\, a_n X^n \,| = |\, \alpha_n X^n + \beta_n X^n \,| \leq |\, \alpha_n X^n \,| + |\, \beta_n X^n \,|$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ est absolument convergente.
On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ est supérieur ou égal à 1.

III.3.2. Toujours en utilisant l'équivalence z solution de (E') et les relations de récurrence $(\mathcal{R})$, on déduit de ce qui précède que
les fonctions $z_0 : X \mapsto 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2p)!} \prod_{k=0}^{p-1} (4k2 - \omega 2) X^{2p}$ et $z_1 : X \mapsto X + \sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2p+1)!} . \prod_{k=0}^{p-1} ((2k+1)2 - \omega 2)$
sont définies sur $]-1, 1[$ et solutions de (E') sur cet intervalle.

(E') est une équation différentielle linéaire du second ordre, homogène, sans points singuliers dans $]-1,1[$. On sait alors que l'ensemble des solutions de (E') sur $]-1,1[$ est un espace vectoriel de dimension 2. Comme (z_0, z_1) est un système libre de solutions de (E') sur $]-1,1[$, c'est une base de cet espace.

Plus précisément, pour toute solution z de (E') sur $]-1,1[$,
il existe $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}2$ tel que $z = a_0 z_0 + a_1 z_1$.
En évaluant $z(0)$ et $z'(0)$, on a :

$$z = z(0)z_0 + z'(0)z_1$$

D'après **III.2**, comme $f_0 : x \mapsto \cos \omega x$ est solution de (E), la fonction $Z_0 : X \mapsto \cos(\omega \arcsin X)$ est solution de (E') sur $]-1,1[$.
Or $Z(0) = 1$ et $Z'(0) = 0$: $Z_0 = z_0$:

$$\boxed{\forall x \in I, \quad \cos \omega x = z_0(\sin x)}$$

De la même faon , on associe à $y_1 : x \mapsto \sin \omega x$ la solution de (E') : $Z_1 : X \mapsto \sin(\omega \arcsin X)$.
Comme $Z_1(0) = 0$ et $Z_1'(0) = \omega$, $Z_1 = \omega z_1$

$$\boxed{\forall x \in I, \quad \sin \omega x = \omega z_1(\sin x)}$$

III.3.3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$

Si on considère $\omega = 2m$, d'après la question **III.3.1**, $z_0 : X \mapsto 1 + \sum_{p=1}^{m} \frac{4^p}{(2p)!} \prod_{k=0}^{p-1} (k2 - m2) X^{2p}$

On a alors en utilisant les égalités précédentes :

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad \cos(2mx) = 1 + \sum_{p=1}^{m} \frac{4^p}{(2p)!} \prod_{k=0}^{p-1} (k2 - m2)(\sin x)^{2p}$$

Soit P_m la fonction polynomiale $P_m : t \mapsto 1 + \sum_{p=1}^{m} \frac{4^p}{(2p)!} \prod_{k=0}^{p-1} (k2 - m2) t^{2p}$ et $g_m = P_m \circ \sin$ (définie sur $\mathbb{R}$). $\deg(P_m) = 2m$ car $\frac{4^m}{(2m)!} \prod_{k=0}^{m-1} (k2 - m2) \neq 0$

Les deux fonctions $c_m : x \mapsto \cos(2mx)$ et g_m sont continues sur $\mathbb{R}$ et elles concident sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: par passage à la limite, elles sont égales sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
De plus ces deux fonctions sont π périodiques : l'égalité $c_m = g_m$ est valable sur $\mathbb{R}$.

On peut faire la même chose en prenant $\omega = 2m + 1$:
On a alors $z_1 : X \mapsto X + \sum_{p=1}^{m} \frac{1}{(2p+1)!} \prod_{k=0}^{p-1} ((2k+1)2 - (2m+1)2)) X^{2p+1}$ puis,

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad \sin((2m+1)x) = (2m+1)\sin x + (2m+1)\sum_{p=1}^{m} \frac{1}{(2p+1)!} \prod_{k=0}^{p-1} ((2k+1)2 - (2q+1)2))(\sin x)^{2p+1}$$

Soit Q_m la fonction polynomiale : $Q_m : t \mapsto (2m+1)t + \sum_{p=1}^{m} \frac{2m+1}{(2p+1)!} \prod_{k=0}^{p-1} ((2k+1)2 - (2m+1)2)) t^{2p+1}$
et h_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_m = Q_m \circ \sin$.
$\deg(Q_m) = 2m + 1$ car $\frac{2m+1}{(2m+1)!} \prod_{k=0}^{m-1} ((2k+1)2 - (2m+1)2)) \neq 0$.

Notons $s_m : x \mapsto \sin((2m+1)x)$.
Les fonctions s_m et h_m sont continues, π antipériodiques et concident sur l'intervalle ouvert de longueur π I : Par continuité elles concident sur $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$ puis en utilisant leur π-antipériodicité, elles concident sur $\mathbb{R}$.