

I. Généralités sur les endomorphismes nilpotents

1. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, alors il est trigonalisable (puisque admet un polynôme annulateur scindé sur $\mathbb{R}$) et son spectre est réduit à $\{0\}$, donc $\text{tr}(u) = 0$. De même u^k est nilpotent, donc $\text{tr}(u^k) = 0$.

2. $0 \in \mathcal{N}_B$ de plus si u, v sont deux éléments de $\mathcal{N}_B$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, alors $\text{mat}_B(\lambda u + \mu v) = \lambda \text{mat}_B(u) + \mu \text{mat}_B(v) \in T_n^{++}$, donc $\lambda u + \mu v \in \mathcal{N}_B$.

L'application $f : \mathcal{N}_B \rightarrow T_n^{++}(\mathbb{R})$, $u \mapsto \text{mat}_B(u)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels donc $\dim \mathcal{N}_B = \dim T_n^{++} = \frac{n(n-1)}{2}$.

3. Si $u \in \mathcal{N}(E)$ ou $\mathcal{N}_B$, et p l'indice de nilpotence, alors $p \leq n$ donc $u^n = 0$, donc $1 \leq v(u) \leq n$.

D'autre part si u désigne l'endomorphisme de E de matrice $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans B ,

alors $v(u^k) = k$ pour $1 \leq k \leq n$, donc $\llbracket 1, n \rrbracket$. Donc $\{v(u) / u \in \mathcal{N}(E)\} = \{v(u) / u \in \mathcal{N}_B\} = \llbracket 1, n \rrbracket$.

4. u est nilpotent d'indice n , donc $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre.

Si la famille $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre, alors $u^{q-1}(y) \neq 0$ et donc $(y, u(y), \dots, u^{q-1}(y))$ est libre.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}, \beta_0, \dots, \beta_{q-1}) \in \mathbb{R}^{p+q}$ tel que $\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x) + \sum_{i=0}^{q-1} \beta_i u^i(y) = 0$. On compose par

u^q , ce qui donne $\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^{i+q}(x) = 0$ ou encore $\sum_{i=0}^{p-1-q} \alpha_i u^{i+q}(x) = 0$ puis par indépendance de la

famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ on a $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in \{0, 1, \dots, p-1-q\}$. Donc $\sum_{i=p-q}^{p-1} \alpha_i u^i(x) +$

$\sum_{i=0}^{q-1} \beta_i u^i(y) = 0$ puis on compose par u^{q-1} ce qui donne $\alpha_{p-q} u^{p-1}(x) + \beta_{q-1} u^{q-1}(y) = 0$ (puisque si

$i > p-q$, alors $i+q-1 \geq p$) puis par indépendance de $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$, on a $\beta_{q-1} = \alpha_{p-q} = 0$.

On a donc $\sum_{i=p-q+1}^{p-1} \alpha_i u^{i+q-1}(x) + \sum_{i=0}^{q-2} \beta_i u^{i+q-1}(y) = 0$ puis on compose par u^{q-2} , ce qui donne que $\alpha_{p-q+1} = \beta_{q-2} = 0$.

Supposons que $\alpha_{p-q+i} = \beta_{q-i-1}$, alors par un raisonnement analogue en composant par u^{q-i-1} , on a $\alpha_{p-q+i+1} = \beta_{q-i-2} = 0$. D'où le résultat.

5. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$ de nilindice p , l'inclusion $\text{Im}(u^{p-1}) \subset \text{Im}(u) \cap \ker(u)$ est immédiate ($u^p = 0$ et $p \geq 2$).

Soit y un élément non nul de $\text{Im}(u) \cap \ker(u)$ donc $y = u(a)$ avec $u^2(a) = 0$ pour un certain $a \in E$.

Si $(u^{p-1}(x), u(a))$ est libre, alors par la question précédente la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), a, u(a))$ est une famille libre de E de cardinal $p+2 > n$, ce qui est absurde, la famille $(u^{p-1}(x), u(a))$ est liée, par suite $y = u(a) \in \text{Vect}\{u^{p-1}(x)\}$, donc $\text{Im}(u) \cap \ker(u) = \text{Vect}\{u^{p-1}(x)\} \subset \text{Im}(u^{p-1})$.

Ce qui donne $\text{Im}(u) \cap \ker(u) = \text{Im}(u^{p-1}) = \text{Vect}\{u^{p-1}(x)\}$. En particulier $\dim \text{Im}(u^{p-1}) = 1$.

II. Endomorphisme de rang 1 d'un espace euclidien.

6. Soit $x \in E \setminus \{0\}$, pour tout $(a, b) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a:

$$\forall z \in E, ((\lambda a + b) \otimes x)(z) = (\lambda a + b | z)x = \lambda(a | z)x + (b | z)x = \lambda(a \otimes x)(z) + (b \otimes x)(z)$$

Donc

$$(a + \lambda b) \otimes x = \lambda(a \otimes x) + (b \otimes x)$$

D'où la linéarité de $a \mapsto (a \otimes x)$.

Par définition de $(a \otimes x)$, on a $\text{Im}((a \otimes x)) \subset \text{Vect}(x)$.

Si $(a \otimes x) = (b \otimes x)$, alors pour tout $z \in E$, $(a | z)x = (b | z)x$ donc $(a - b | z) = 0$ pour tout $z \in E$. Ainsi $b - a \in E^\perp = \{0\}$ donc $a = b$, ce qui assure l'injectivité de $a \mapsto (a \otimes x)$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Im}(u) \subset \text{Vect}(x)$.

Si $u = 0$, alors $u = (0 \otimes x)$.

Si $u \neq 0$, alors $\text{Im}(u) = \text{Vect}(x)$, on a $\dim \ker(u) = n - 1$. Considérons une base orthonormée de $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ de $\ker(u)$ qu'on complète en une b.o.n $(e_1, \dots, e_n)$ de E .

Si $z = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, alors $u(z) = \alpha_n u(e_n) = \lambda \alpha_n x$ où $u(e_n) = \alpha_n x$. Posons $\lambda e_n = a$.

Donc $u(z) = (z | \lambda e_n)x = (a | z)x = (a \otimes x)(z)$ pour tout $z \in E$. Donc $u = (a \otimes x)$

D'où la surjectivité.

7. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E , alors

$$\text{Tr}((a \otimes x)) = \sum_{i=1}^n ((a \otimes x)(e_i) | e_i) = \sum_{i=1}^n (a | e_i)(x | e_i) = (a | x)$$

III Deux lemmes

8. Supposons que $(u + tv)^k = \sum_{i=0}^k t^i f_i^{(k)}$, alors en écrivant $(u + tv)^{k+1} = (u + tv)^k (u + tv)$ on a:

$$(u + tv)^{k+1} = \left(\sum_{i=0}^k t^i f_i^{(k)} \right) (u + tv) = f_0^{(k)}u + \sum_{i=1}^k t^i (f_i^{(k)}u + f_{i-1}^{(k)}v)$$

Posons $f_0^{(k+1)} = f_0^{(k)}u$ et $f_i^{(k+1)} = f_i^{(k)}u + f_{i-1}^{(k)}v$.

Supposons qu'il existent une autre famille d'endomorphisme $(g_i^{(k)})$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^k t^i f_i^{(k)} =$

$\sum_{i=0}^k t^i g_i^{(k)}$, alors pour $t = 0$, $f_0^{(k)} = g_0^{(k)}$. Supposons que $f_i^{(k)} = g_i^{(k)}$ pour $i \leq p - 1$, alors

pour tout $t \neq 0$, on a $\sum_{i=p}^k t^{i-p} f_i^{(k)} = \sum_{i=p}^k t^{i-p} g_i^{(k)}$ puis on passe à la limite en 0 ce qui donne que

$$f_p^{(k)} = g_p^{(k)}.$$

D'où l'unicité de l'écriture.

D'après la relation $f_0^{(k+1)} = f_0^{(k)}u$, on a à l'aide d'une récurrence immédiate que $f_0^{(k)} = u^k$.

On a $f_1^{(k+1)} = f_1^{(k)}u + f_0^{(k)}v = f_1^{(k)}u + u^k v$, avec $f_1^{(1)} = v$.

Supposons que $f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$, alors

$$f_1^{(k+1)} = \left(\sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i} \right) u + u^k v = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-i} + u^k v = \sum_{i=0}^k u^i v u^{k-i}$$

9. $\mathcal{V}$ est un sous-espace nilpotent donc $u + tv \in \mathcal{V}$. Par définition de $p = \max_{u \in \mathcal{V}} \nu(u)$, on a $(u + tv)^p = 0$

Donc $\sum_{i=0}^p t^i f_i^{(p)} = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui donne (par unicité établi en **9.**), que $f_i^{(p)} = 0$ pour tout $i \leq p$.

En particulier $f_1^{(p)} = 0$ ce qui donne la relation $\sum_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = 0$.

10. D'après la question **8.**, on a $\text{tr} \left(f_1^{(k)} \right) = \sum_{i=0}^{k-1} \text{tr} (u^i v u^{k-1-i}) = \sum_{i=0}^{k-1} \text{tr} (u^{k-1-i} u^i v) = k \text{tr} (u^{k-1} v)$.

On a $\text{tr}((u + tv)^p) = 0$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=0}^k t^i \text{tr} \left(f_i^{(k)} \right) = 0$ donc $\text{tr} \left(f_i^{(k)} \right) = 0$ (unicité du développement limité).

On a $\text{tr} \left(f_1^{(k+1)} \right) = 0$, donc $0 = \text{tr} \left(f_1^{(k+1)} \right) = (k+1) \text{tr} (u^k v)$, ce qui donne $\text{tr} (u^k v) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

11. Soit $a \in K(\mathcal{V})^\perp$, on a $(u + tv)^{p-1}(y) \in K(\mathcal{V})$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(a | (u + tv)^{p-1}(y)) = 0$.

Puis à l'aide de la question **8.**, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=0}^k t^i (a | f_i^{(k)}(y)) = 0$, puis $(a | f_1^{(p-1)}(y)) = 0$

pour tout $a \in K(\mathcal{V})^\perp$, donc $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$.

On a $u \left(f_1^{(p-1)}(y) \right) = \sum_{i=0}^{p-2} u^{i+1} v u^{p-2-i}(y) = \sum_{j=1}^{p-1} u^j v u^{p-1-j}(y)$, puis à l'aide de la question **9.** on a

$$u \left(f_1^{(p-1)}(y) \right) = \sum_{i=0}^{p-2} u^{i+1} v u^{p-2-i}(y) = -v u^{p-1}(y) = -v(u^{p-1}(y))$$

Pour $x \in \text{Im}(u^{p-1})$, il existe $y \in E$ tel que $y = u^{p-1}(x)$. Par l'égalité

$$v(x) = v(u^{p-1}(y)) = -u \left(f_1^{(p-1)}(y) \right)$$

$f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$, donc $v(x) \in u(K(\mathcal{V}))$.

12. Soit $x \in \mathcal{V}^* \setminus \{0\}$ tel que $K(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(x) + \mathcal{V}x$.

Par récurrence sur k .

Pour $k = 0$, $\lambda_0 = 0$ et $y_0 = y \in K(\mathcal{V})$. Supposons que qu'il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$ et $y_k \in K(\mathcal{V})$ tel que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$. $y_k \in K(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(x) + \mathcal{V}x$, donc on peut écrire $y_k = \mu_k x + v(x)$ où $v \in \mathcal{V}$.

On a $x \in \text{Im}(u^{p-1})$ donc pour $k \geq 1$, on a $u^k(x) \in \text{Im}(u^{k+p-1}) = 0$ (puisque $u^p = 0$).

On peut donc écrire $y = \lambda_k x + u^k(v(x))$. D'après la question **11**, $v(x) \in u(K(\mathcal{V}))$, donc $u^k(v(x)) \in u^{k+1}(K(\mathcal{V}))$, donc il existe $y_{k+1} \in K(\mathcal{V})$ tel que $u^k(v(x)) = u^{k+1}(y_{k+1})$.

Par suite $y = \lambda_{k+1}x + u^{k+1}(y_{k+1})$. (avec $\lambda_{k+1} = \lambda_k$).

Pour $k = p$, on a $u^p = 0$, donc $y = \lambda_p x \in K(\mathcal{V})$.

On a $x \in \text{Im}(u^{p-1}) \subset K(\mathcal{V})$, donc $v(x) \in v(K(\mathcal{V})) \subset K(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(x)$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $v(y) = \alpha x$. α est donc une valeur propre de v donc $\alpha = 0$. Ainsi $v(y) = 0$.

IV Démonstration du théorème de Gerstenhaber

13. Les applications $f : \mathcal{V} \rightarrow E, v \mapsto v(x)$ est linéaire, $\mathcal{V}_x = \text{Im}(f)$ et $\ker(f) = \mathcal{W}$ sont des sous-espaces respectives de E et $\mathcal{V}$.

l'application $g : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{L}(H), u \mapsto \bar{u}$ est linéaire, donc $\ker(g) = \mathcal{Z}$ et $\text{Im}(g) = \bar{\mathcal{V}}$ sont des sous-espaces vectoriels respectives de $\mathcal{W}$ et $\mathcal{L}(H)$.

14. D'après la formule du rang,

$$\dim \mathcal{V} = \dim \ker(\mathcal{V}_x) + \dim \mathcal{W} \text{ et } \dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{Z} + \dim \bar{\mathcal{V}}.$$

Donc $\dim \mathcal{V} = \dim \ker(\mathcal{V}_x) + \dim \mathcal{Z} + \dim \bar{\mathcal{V}}$.

15. D'après la question **6.**, il suffit de montrer que si $u \in \mathcal{Z}$, alors $\text{Im}(u) \subset \text{Vect}(x)$.

Si $u \in \mathcal{Z}$, alors $\bar{u} = 0$ donc pour tout $z \in H, \pi \circ u(z) = 0$ ce qui est équivalent à $u(z) \in H^\perp = \text{Vect}(x)$.

D'autre part l'application $\varphi : a \mapsto a \otimes x$ est un isomorphisme de E sur l'espace vectoriel $\{u \in \mathcal{L}(E) : \text{Im}(u) \subset \text{Vect}(x)\}$.
Posons $L = \varphi^{-1}(\mathcal{Z})$, alors, par isomorphisme, on a $\dim \mathcal{Z} = \dim L$ et $\mathcal{Z} = \varphi(L) = \{\varphi(a) : a \in L\} = \{a \otimes x : a \in L\}$.

Soit $y \in L$ et $\varphi(y) = y \otimes x \in \mathcal{Z}$, donc $y \otimes x \in \mathcal{W}$ en particulier $(y \otimes x)(x) = 0$ qui se traduit par $(y | x)x = 0$ avec $x \neq 0$ donc $(y | x) = 0$.

On a établi que pour tout $y \in L, (y | x) = 0$. donc $x \in L^\perp$.

16. Soit $u \in \mathcal{V}$ et $a \in L$. On a $a \otimes x \in \mathcal{Z}$ donc $a \otimes x \in \mathcal{W}$ en particulier $v = a \otimes x \in \mathcal{V}$.

D'après le lemme **A**, on a $\text{Tr}(u^k v) = 0$.

D'autre part pour tout $z \in E, u^k \circ v(z) = u^k((a | z)x) = (a | z)u^k(x) = (a \otimes u^k(x))(z)$, donc

$$u^k \circ v = a \otimes u^k(x)$$

A l'aide de la question **7**, on a $\text{Tr}(u^k v) = \text{Tr}(a \otimes u^k(x)) = (a | u^k(x))$ donc $(a | u^k(x)) = 0$ et ceci pour tout $a \in L$. Donc $u^k(x) \in L^\perp$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $u \in \mathcal{V}$.

17. S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\lambda x \in \mathcal{V}x$, alors il existe $v \in \mathcal{V}$ tel que $\lambda x = v(x)$. v est nilpotent donc son spectre est réduit à $\{0\}$ par suite $\lambda = 0$ ce qui est absurde.

On a d'après **16**, $\mathcal{V}x \subset L^\perp$ et d'après **17** cette inégalité est stricte puisque $x \in L^\perp$ et $x \notin \mathcal{V}x$.

Donc $\dim \mathcal{V}x < \dim L^\perp$ ce qui donne que :

$$\dim \mathcal{V}_x + \dim L < \dim L^\perp + \dim L = n$$

Donc $\dim \mathcal{V}_x + \dim L \leq n - 1$.

18. L'expression de la projection orthogonale sur $H = \text{Vect}(x)^\perp$ est : $\pi(z) = z - \frac{(z | x)}{\|x\|^2}x$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, $\pi(u^k(z)) = u^k(z) - \frac{(u^k(z) | x)}{\|x\|^2}x$ donc $u(\pi(u^k(z))) = u^{k+1}(z)$ ($u(x) = 0$ puisque $u \in \mathcal{W}$), ce qui donne que $u\pi u^k = u^{k+1}$ donne $u \circ \overline{u^k} = u^{k+1}$ puis $\pi \circ u \circ \overline{u^k} = \pi \circ u^{k+1}$ ce qui donne $\overline{u} \circ \overline{u^k} = \overline{u^{k+1}}$ ou encore $\overline{u^{k+1}} = \overline{u^{k+1}} = \pi \circ u^{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

u étant nilpotent, donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$, et donc $\overline{u^k} = \pi \circ u^k = 0$.

Donc $\overline{u}$ est nilpotent. Ainsi $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(H)$ dont tous les éléments sont nilpotents, c'est-à-dire que $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace nilpotent de $\mathcal{L}(H)$.

19. D'après l'hypothèse de récurrence appliqué à H , on a $\dim \overline{\mathcal{V}} \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Et d'après les questions **14** et **15**, on a :

$$\dim \mathcal{V} = \dim(\mathcal{V}x) + \dim \mathcal{Z} + \dim \overline{\mathcal{V}} \leq n-1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

20. Supposons que $\dim \mathcal{V} = \frac{n(n-1)}{2}$, alors l'inégalité précédente est en faite une égalité donc :

$$\frac{n(n-1)}{2} = \dim \mathcal{V} = \dim(\mathcal{V}x) + \dim L + \dim \overline{\mathcal{V}} \leq n-1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Puis à l'aide des questions **17** et **19**, on a :

$$0 \leq \dim(\mathcal{V}x) + \dim L - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \dim \overline{\mathcal{V}} \leq 0$$

Donc $\dim(\mathcal{V}x) + \dim L - (n-1) = 0 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \dim \overline{\mathcal{V}}$ ce qui donne que

$$\dim(\mathcal{V}x) + \dim L = (n-1) \text{ et } \dim \overline{\mathcal{V}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

D'autre part par la question **14**. et en utilisant que $\dim \mathcal{Z} = \dim L$, on a

$$\dim \mathcal{V}x + \dim L = \dim \mathcal{V} - \dim \overline{\mathcal{V}} = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n-1$$

Donc $\dim(\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x) + \dim L = 1 + \dim \mathcal{V}x + \dim L = n$.

Des question **15** et **16**, on déduit que $\mathcal{V}x + \text{Vect}(x) \subset L^\perp$ et cette somme est directe d'après la question **17**. D'autre part, par la question **20**, on a $\dim(\mathcal{V}x \oplus \text{Vect}(x)) = n - \dim L = \dim L^\perp$

Donc $\mathcal{V}x \oplus \text{Vect}(x) = L^\perp$.

D'après la question **16**, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v^k(x) \in L^\perp = \mathcal{V}x \oplus \text{Vect}(x)$.

21. On fait une récurrence sur n , pour $n = 2$ rien à vérifier, supposons que la propriété pour $n-1$. On a $\dim \overline{\mathcal{V}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. D'après **2** et **3**., il existe un endomorphisme $\overline{u} \in \overline{\mathcal{V}}$ d'indice de nilpotence $n-1$. On a $\overline{u}^{n-2} \neq 0$ donc $u^{n-2} \neq 0$ ($\overline{u}^{n-2} = \pi \circ u^{n-2}$) par suite l'indice de nilpotence de $u > n-2$ donc nilindice générique de $\mathcal{V}$ est $\geq n-1$.

Si $\mathcal{V}x = \{0\}$ alors $L^\perp = \text{Vect}(x)$, donc $L = H$.

On a $\dim \bar{\mathcal{V}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ donc d'après l'hypothèse de récurrence il existe une base $\mathcal{B}_1 = (e_2, e_3, \dots, e_n)$ de H dans laquelle tout les éléments de $\bar{\mathcal{V}}$ sont représentés par une matrice triangulaire supérieure stricte.

On considère la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ où $e_1 = x$.

Si $u \in \mathcal{V}$, on a $\mathcal{V}x = \{0\}$, donc $u(x) = 0$ et pour $2 \leq i \leq n$, on a $u(e_i) \in \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{i-1})$ puisque $\bar{u} \in \bar{\mathcal{V}}$. Donc la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure stricte.

22. v est nilpotent et $p \geq n-1$, donc d'après la question **5**, $\dim \text{Im}(v^{p-1}) = 1$ et $\text{Im } v^{p-1} = \text{Vect}(v^{p-1}(x))$

D'autre part, d'après la question **20**, en prenant $k = p-1$, on a $v^{p-1}(x) \in \text{Vect}(x) + \mathcal{V}x$.

Donc $\text{Im}(v^{p-1}) \subset \text{Vect}(x) + \mathcal{V}x$.

23. On choisit $t \in \mathbb{R}$ tel que $(v + tv_0)(x) \neq 0$ (un tel réel existe puisque $v(x) \neq 0$), puis la question précédente on a

$$\text{Im}(v + tv_0)^{p-1} \subset \text{Vect}(x) + \mathcal{V}x.$$

Soit $y \in \text{Im}(v^{p-1})$, $y = v^{p-1}(z)$, à partir d'un certain rang n_0 , on a $\left(v + \frac{1}{n}v_0\right)(x) \neq 0$

donc pour tout $n \geq n_0$, $y_n = \left(v + \frac{1}{n}v_0\right)^{p-1}(z) \in \text{Vect}(x) + \mathcal{V}x$.

D'autre part $\text{Vect}(x) + \mathcal{V}x$ est fermé (puisque c'est un espace vectoriel de dimension finie), donc $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n \in \text{Vect}(x) + \mathcal{V}x$ ce qui donne que : $\text{Im}(v^{p-1}) \subset \text{Vect}(x) + \mathcal{V}x$.

24. Si $\forall v \in \mathcal{V}$, $v(x) = 0$ c'est fini.

Sinon il existe $v_0 \in \mathcal{V}$ tel que $v_0(x) \neq 0$, alors d'après **23**. on a pour tout $v \in \mathcal{V}$, $\text{Im}(v^{p-1}) \subset \text{Vect}(x) + \mathcal{V}x$.

Donc $K(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(x) + \mathcal{V}x$.

Par la question **12**, on a $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$, puis par le résultat de la question **21** on assure l'existence d'une base dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire.