

Corrigé de l'épreuve de mathématiques 2003
concours X-Cachan

0. préliminaires

- 1 La norme N vérifie $\forall A, B, N(A.B) \leq N(A).N(B)$ ce qui par récurrence sur k nous donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, N(B^k) \leq (N(B))^k.$$

$\forall B \in \mathcal{M}_n$, $\frac{N(B)^k}{k!}$ est le terme général d'une série convergente de somme $e^{N(B)}$. Comme $\mathcal{M}_n$ est un espace vectoriel de dimension finie donc complet, toute série absolument convergente est convergente, donc $\sum \frac{B^k}{k!}$

est une série absolument convergente (de plus on a : $N\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}\right) \leq e^{N(B)}$).

conclusion : $\forall B \in \mathcal{M}_n$, $\sum \frac{B^k}{k!}$ est une série convergente

- 2 $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n$, $\sum \frac{A^k}{k!}$ et $\sum \frac{B^k}{k!}$ sont deux séries absolument convergentes donc le produit de Cauchy de ces deux séries est une série absolument convergente et sa somme est égale au produit des 2 sommes donc

$$\text{pour } C_k = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} A^i \frac{1}{(k-i)!} B^{k-i} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k C_k^i A^i B^{k-i} = \frac{1}{k!} (A+B)^k \text{ si } A \text{ et } B \text{ commutent.}$$

$$\exp(A+B) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B^k}{k!} \right) = \exp(A) \cdot \exp(B)$$

$$\text{Comme } B \text{ et } -B \text{ commutent, } \begin{cases} \exp(0) = \exp(B + (-B)) = \exp(B) \cdot \exp(-B) \\ \exp(0) = \exp((-B) + B) = \exp(-B) \cdot \exp(B) \end{cases}$$

Comme $\exp(0) = \mathbb{1}$, on en déduit :

$$\forall B \in \mathcal{M}_n, \exp(B) \cdot \exp(-B) = \exp(-B) \cdot \exp(B) = \mathbb{1} \text{ d'où}$$

conclusion : $\exp(B) \in GL_n \text{ et } (\exp(B))^{-1} = \exp(-B)$

- 3 $\forall B \in \mathcal{M}_n, \forall k \in \mathbb{N}, u_k : t \mapsto \frac{t^k B^k}{k!}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $u'_0 : t \mapsto 0, u'_k : t \mapsto \frac{t^{k-1} B^k}{(k-1)!}$ pour $k \geq 1$.

- $\sum u_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+, \|u'_k\|_{\infty}^{[-a,a]} \leq \frac{N(B^k) \cdot a^{k-1}}{(k-1)!} \leq \underbrace{\frac{N(B)^k \cdot a^{k-1}}{(k-1)!}}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série convergente}}} \Rightarrow \sum u'_k \text{ converge normalement sur } [-a, a]$

Nous sommes dans les conditions d'application du théorème de dérivation des séries de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel réel de dimension finie d'où :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [-a, a] \text{ et } \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right)' = \sum_{k=0}^{+\infty} u'_k$$

$$\Rightarrow \Phi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [-a, a], \text{ et } \forall t \in]-a, a[, \Phi'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1} B^k}{(k-1)!} = B \cdot \Phi(t) = \Phi(t) \cdot B.$$

Ce résultat étant valable pour tout réel a de $\mathbb{R}_+$, on a :

conclusion : Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\Phi' : t \mapsto B \cdot \Phi(t) = \Phi(t) \cdot B$

$$4. \text{ on a : } \left. \begin{aligned} & \left(\sum_{k=0}^n \frac{t^k B^k}{k!} \right) \text{ converge vers } \exp(tB) \\ & \forall n \in \mathbb{N}, B. \left(\sum_{k=0}^n \frac{t^k B^k}{k!} \right) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{t^k B^k}{k!} \right) . B. \end{aligned} \right\}$$

Comme l'application $\begin{pmatrix} (A, B) & \mapsto & A.B \\ \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n & \rightarrow & \mathcal{M}_n \end{pmatrix}$ est bilinéaire donc continue car nous sommes en dimension finie, par passage à la limite, on obtient :

$$\text{conclusion : } \boxed{\forall B \in \mathcal{M}_n, \forall t \in \mathbb{R}, B. \exp(tB) = \exp(tB).B}$$

I. ÉQUATION DE LAX

1.(a) Par bilinéarité du produit matriciel, on a :

$$\begin{aligned} & \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall (A_1, A_2) \in \mathcal{M}_n^2, \forall B \in \mathcal{M}_n, [\alpha A_1 + \beta A_2, B] = (\alpha A_1 + \beta A_2).B - B.(\alpha A_1 + \beta A_2) \\ & = \alpha(A_1 B - B.A_1) + \beta(A_2 B - B.A_2) = \alpha[A_1, B] + \beta[A_2, B] \\ & \text{de même, } \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall A \in \mathcal{M}_n, \forall (B_1, B_2) \in \mathcal{M}_n^2, [A, \alpha B_1 + \beta B_2] = \alpha[A, B_1] + \beta[A, B_2] \\ & \text{et } \forall A \in \mathcal{M}_n, [A, A] = A.A - A.A = 0 \end{aligned}$$

$$\text{conclusion : } \boxed{(A, B) \mapsto [A, B] \text{ est bilinéaire alternée.}}$$

$$1.(b) \quad \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n^2, \text{Tr}([A, B]) = \text{Tr}(AB - BA) \underbrace{=}_{\substack{\text{linéarité} \\ \text{de fct tr}}} \text{Tr}(AB) - \underbrace{\text{Tr}(BA)}_{=\text{Tr}(AB)} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{Tr}[A, B] = 0}$$

1.(c) Soient A et B deux matrices antisymétriques.

$${}^t[A, B] = {}^t(AB - BA) = {}^t(AB) - {}^t(BA) = {}^t B {}^t A - {}^t A {}^t B = (-B)(-A) - (-A)(-B) = BA - AB = -[A, B]$$

$$\text{conclusion : } \boxed{[A, B] \text{ est antisymétrique.}}$$

1.(d) Soit $(A, B) \in (\mathcal{T}_n)^2$, $C = A.B = (c_{i,j})$, $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$.

$$\text{Soit } j < i, c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}.b_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{i,k}}_{=0 \text{ car } i > k}.b_{k,j} + \sum_{k=i}^n a_{i,k} \underbrace{b_{k,j}}_{=0 \text{ car } k \geq i > j} = 0$$

On a donc : $(\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, j < i \Rightarrow c_{i,j}) \Rightarrow C \in \mathcal{T}_n$.

$$\text{conclusion : } \boxed{\forall A, B \in \mathcal{T}_n, A.B \in \mathcal{T}_n}$$

2.(a) $t \mapsto A(t)$ est de classe C^1 sur I si et seulement si les coefficients de $A(t)$ sont des fonctions de classe C^1 sur I . On a aussi : $A^{-1}(t) = \frac{1}{\det(A(t))} {}^t \text{Com}(A(t))$.

- $t \mapsto \det(A(t))$ est C^1 sur I car $\det(A(t))$ s'exprime comme une somme de produits des coefficients de $A(t)$ donc comme une somme de produits de fonctions de classe C^1 sur I .
- de plus, $\det(A(t))$ ne s'annule pas sur I car $\forall t \in I, A(t) \in GL_n$ d'où $t \mapsto \frac{1}{\det(A(t))}$ est de classe C^1 sur I .
- Tous les coefficients de ${}^t \text{Com}(A(t))$ s'expriment comme des sommes de produits des coefficients de $A(t)$, ils sont donc tous des fonctions de classe C^1 sur I .

Tous les coefficients de $A^{-1}(t)$ sont des fonctions de classe C^1 sur I comme sommes de produits de fonctions de classe C^1 .

$$\text{conclusion : } \boxed{t \mapsto A^{-1}(t) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I}$$

$$\forall t \in I, A(t).A^{-1}(t) = \mathbb{1} \Rightarrow \dot{A}(t).A^{-1}(t) + A(t).\dot{A}^{-1}(t) = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{A}^{-1}(t) = -A^{-1}(t).\dot{A}(t).A^{-1}(t)}$$

$$2.(a) \quad \frac{d}{dt}(A(t)^{-1}.X.A(t)) = \frac{d}{dt}(A(t)^{-1}).X.A(t) + A(t)^{-1}.X.\frac{d}{dt}(A(t)) = -A^{-1}(t).\dot{A}.A^{-1}(t).X.A(t) + A^{-1}(t).X.\dot{A}(t)$$

$$= - \underbrace{A^{-1}(t) \cdot \dot{A}} \cdot \underbrace{A^{-1}(t) \cdot X \cdot A(t)} + \underbrace{A^{-1}(t) \cdot X \cdot A(t)} \cdot \underbrace{A^{-1}(t) \cdot \dot{A}} = [A^{-1}(t) \cdot \dot{A}, A^{-1}(t) \cdot X \cdot A(t)]$$

$$\text{conclusion : } \boxed{\frac{d}{dt} (A(t)^{-1} \cdot X \cdot A(t)) = [A^{-1}(t) \cdot \dot{A}(t), A^{-1}(t) \cdot X \cdot A(t)]}$$

3. On a : $\forall t \in I, \dot{L}(t) = [L(t), M(t)] \Rightarrow \forall t \in I, \underbrace{\text{Tr}(\dot{L}(t))}_{= \text{Tr}(\dot{L}(t)) \text{ par linéarité de Tr}} = \text{Tr}([L(t), M(t)]) = 0$ d'après I.1.b)

$$\Rightarrow \forall t \in I, \text{Tr}(\dot{L}(t)) = 0 \Rightarrow \boxed{\text{Tr}(L(t)) \text{ est constante sur } I}$$

4.a.i) cas $B(0) = \mathbb{1}$: notons $C_i(t)$ le $i^{\text{ième}}$ vecteur colonne de $B(t)$.

$\det(B(t))$ = déterminant des vecteurs colonnes de $B(t)$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(\det B(t) - \det B(0)) &= \frac{1}{t} [\det(C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)) - \det(C_1(0), \dots, C_n(0))] \\ &= \frac{1}{t} \left[\sum_{k=1}^n (\det(C_1(0), \dots, C_{k-1}(0), C_k(t), C_{k+1}(t), \dots, C_n(t)) - \det(C_1(0), \dots, C_{k-1}(0), C_k(0), C_{k+1}(t), \dots, C_n(t))) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \det(C_1(0), \dots, C_{k-1}(0), \underbrace{\frac{1}{t}(C_k(t) - C_k(0))}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} C'_k(0)}, \underbrace{C_{k+1}(t)}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} C_{k+1}(0)}, \dots, \underbrace{C_n(t)}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} C_n(0)}) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{t \rightarrow 0} \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & & b'_{1,k}(0) & & & \\ & \ddots & \vdots & & 0 & \\ & & 1 & & \vdots & \\ & & & b'_{k,k}(0) & & \\ & & & \vdots & 1 & \\ 0 & & & \vdots & & \ddots \\ & & b'_{n,k}(0) & & & 1 \end{array} \right| = b'_{k,k}(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\det B(t) - \det B(0)) = \sum_{k=1}^n b'_{k,k}(0) = \text{Tr}(\dot{B}(0))$$

$$\text{conclusion : } \boxed{t \mapsto \det B(t) \text{ est dérivable en 0 de dérivée } \text{Tr}(\dot{B}(0))}$$

ii) cas général :

$$\frac{1}{(t - t_0)} (\det B(t) - \det B(t_0)) = \frac{1}{(t - t_0)} \det B(t_0) (\det((B(t_0)^{-1} B(t)) - \det(\mathbb{1}))$$

En posant $C(h) = (B(t_0))^{-1} \cdot B(t_0 + h)$, on se ramène à la question précédente, d'où :

$$(\det C)'(0) = \text{Tr}(\dot{C}(0)) \Rightarrow (\det(B(t_0)^{-1} \cdot B))'(t_0) = \text{Tr}((B(t_0)^{-1} \cdot \dot{B}(t_0))$$

$$\Rightarrow (\det B)'(t_0) = \det(B(t_0)) \cdot \det(B(t_0)^{-1}) \cdot \text{Tr}((B(t_0)^{-1} \cdot \dot{B}(t_0)) = \text{Tr}(B(t_0)^{-1} \cdot \dot{B}(t_0))$$

$$\text{conclusion : } \boxed{\text{si } B(t_0) \text{ inversible } t \mapsto \det B(t) \text{ est dérivable en } t_0 \text{ de dérivée } \text{Tr}(B(t_0)^{-1} \cdot \dot{B}(t_0))}$$

4.b) • Si $\det L(t) \neq 0, \overline{\det L(t)} = \text{Tr}(L^{-1}(t) \cdot \dot{L}(t)) = \text{Tr}(L^{-1} \cdot [L(t), M])$

$$= \text{Tr}(L^{-1}(t) \cdot L(t) \cdot M - L^{-1}(t) \cdot M \cdot L(t)) = \text{Tr } M - \underbrace{\text{Tr}(L^{-1}(t) \cdot M \cdot L(t))}_{\text{Tr}(M \cdot L(t) \cdot L^{-1}(t)) = \text{Tr}(M)} = 0$$

• Supposons qu'il existe $t \in I / \det L(t) = 0$ et $t < t_0$.

Soit $\alpha = \sup\{t \in I / \det L(t) = 0 \text{ et } t < t_0\}$. Par continuité de la fonction $\det L$, on a $\det L(\alpha) = 0$ et donc

$\alpha < t_0$. Par définition de α , $\det L$ ne s'annule pas sur $] \alpha, t_0]$ et comme, d'après ce qui précède, $\overline{\det L}$ est nulle

sur ce même intervalle, $\det L$ est constante égale à $\det L(t_0)$ sur $]\alpha, t_0]$ $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \alpha^+} \det L(t) = \det L(t_0) \neq 0 = \det L(\alpha) \Rightarrow \det L$ non continue en α (contradiction). D'où $\det L$ non nulle sur $]-\infty, t_0] \cap I$. De même, on

prouve que $\det L$ non nulle sur $[t_0, +\infty[\cap I \Rightarrow \overline{\det L}$ nulle sur $I \Rightarrow \boxed{\det L \text{ constante égale à } \det L(t_0) \text{ sur } I}$

• En tous les points t en lesquels $\det(L(t) - \lambda \mathbb{I}) \neq 0$, on a :

$$\overline{\det(L - \lambda \mathbb{I})} \dot{t} = \text{Tr}((L(t) - \lambda \mathbb{I})^{-1} \cdot \overline{(L - \lambda \mathbb{I})} \dot{t}(t)) = \text{Tr}((L(t) - \lambda \mathbb{I})^{-1} \cdot \dot{L}(t))$$

Or $\dot{L}(t) = [L(t), M] = L(t) \cdot M - M \cdot L(t) = (L(t) \cdot \lambda \mathbb{I}) \cdot M - M \cdot (L(t) - \lambda \mathbb{I})$. En posant $B(t) = L(t) - \lambda \mathbb{I}$, on a :

$$\overline{\det(L - \lambda \mathbb{I})} \dot{t} = \text{Tr}((B(t))^{-1} \cdot (B(t) \cdot M - M \cdot B(t))) = \text{Tr}(M) - \text{Tr}(B^{-1} M B(t)) = 0$$

De la même façon que précédemment, si $\det(L(t_0) - \lambda \mathbb{I}) \neq 0$ alors $t \mapsto \det(L(t) - \lambda \mathbb{I})$ ne s'annule pas sur I et si $t \mapsto \det(L(t) - \lambda \mathbb{I})$ s'annule en un point de I alors elle s'annule sur I tout entier.

4.c Soit $t_0 \in I$ et $\lambda \in \text{Sp}(L(t_0))$ (où $\text{Sp}(L(t_0))$ désigne le spectre de $L(t_0)$), on a :

$$\det(L(t_0) - \lambda \mathbb{I}) = 0 \Rightarrow \forall t \in I, \det(L(t) - \lambda \mathbb{I}) = 0 \Rightarrow \forall t \in I, \lambda \in \text{Sp}(L(t))$$

$$\text{d'où } \forall (t, t_0) \in I^2, \text{Sp}(L(t_0)) \subset \text{Sp}(L(t)) \Rightarrow \forall (t, t_0) \in I^2, \text{Sp}(L(t_0)) = \text{Sp}(L(t))$$

conclusion : $\boxed{\text{Le spectre de } L \text{ ne varie pas avec } t}$

5.a $L(0) = X$ et X possède n valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

D'après la question **4.c**, $\forall t \in I$, $L(t)$ possède n valeurs propres réelles distinctes qui sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

$\Rightarrow \forall t \in I$, $L(t)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n$ et est semblable dans $\mathcal{M}_n$ à la matrice $\text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ tout comme la matrice X

$\Rightarrow \forall t \in I$, $L(t)$ et X sont semblables dans $\mathcal{M}_n$

$\Rightarrow \boxed{\text{pour tout réel } t \text{ de } I, \text{ il existe une matrice } A(t) \text{ inversible telle que } L(t) = A(t)^{-1} \cdot X \cdot A(t)}$

Il n'y a pas unicité car si la matrice $A(t)$ convient alors la matrice $B(t) = 2 \cdot A(t)$ convient aussi.

5.b $L(t) = A(t)^{-1} \cdot X \cdot A(t) \Rightarrow \dot{L}(t) = \frac{d}{dt} (A(t)^{-1} \cdot X \cdot A(t)) = [A(t)^{-1} \cdot X \cdot A(t), A(t)^{-1} \cdot \dot{A}(t)]$ d'après **2.b**

$$\Rightarrow [L(t), M] = [L(t), A(t)^{-1} \cdot A(t)].$$

conclusion : $\boxed{A \text{ satisfait à l'équation différentielle } \begin{cases} A(0)^{-1} \cdot X \cdot A(0) = X \\ [A(t)^{-1} \cdot X \cdot A(t), M] = [A(t)^{-1} \cdot X \cdot A(t), A(t)^{-1} \cdot \dot{A}(t)] \end{cases}}$

5.c Si $A(0) = \mathbb{I}$, on a bien $A(0)^{-1} \cdot X \cdot A(0) = X$

Si $\dot{A} = AM$ alors $A^{-1} \cdot \dot{A} = M \Rightarrow [A^{-1} \cdot X \cdot A, M] = [A^{-1} \cdot X \cdot A, A^{-1} \cdot \dot{A}]$.

conclusion : $\boxed{\text{toute solution du système } \begin{cases} \dot{A} = AM \\ A(0) = \mathbb{I} \end{cases} \text{ est solution de l'équation différentielle du } \mathbf{5.b}}$

• $\dot{A} = AM$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, d'après le théorème de Cauchy Lipschitz, il y a existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy $A(0) = \mathbb{I}$.

• Pour construire les solutions de (1), on commence par résoudre le système (2) pour trouver une solution $t \mapsto A(t)$, ce qui nous donnera $L : t \mapsto A(t)^{-1} \cdot X \cdot A(t)$ solution du système (1).

• Si X n'a pas toutes ses valeurs propres distinctes ???

6 quand M est une matrice constante, d'après les préliminaires, $A : t \mapsto \exp(tM)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\dot{A} : t \mapsto \exp(tM) \cdot M$ et $A(0) = \mathbb{I}$ d'où $A : t \mapsto \exp(tM)$ est solution dans $\mathcal{M}_n$ de (2) et d'après **I.5.c**

$\boxed{L : t \mapsto \exp(-tM) \cdot X \cdot \exp(tM) \text{ est la solution de (1).}$

II.1.a On montre facilement que $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{T}_n$ sont des parties non vides de $\mathcal{M}_n$ stables par combinaisons linéaires, ce sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n$.

$\dim \mathcal{A}_n = \frac{n(n-1)}{2}$ ($\mathcal{A}_n$ admet les $E_{i,j} - E_{j,i}$ pour $i > j$ comme base où les $E_{i,j}$ forment la base canonique de $\mathcal{M}_n$)

$\dim \mathcal{T}_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ($\mathcal{A}_n$ admet les $(E_{i,j})_{j \leq i}$ comme base)

0 est la seule matrice à la fois triangulaire inférieure et antisymétrique d'où $\mathcal{A}_n \cap \mathcal{T}_n = \{0\}$.

$\left. \begin{array}{l} \mathcal{A}_n \cap \mathcal{T}_n = \{0\} \\ \dim \mathcal{A}_n + \dim \mathcal{T}_n = n^2 = \dim \mathcal{M}_n \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{A}_n \text{ et } \mathcal{T}_n \text{ sont supplémentaires dans } \mathcal{M}_n.$

conclusion : $\boxed{\mathcal{A}_n \oplus \mathcal{T}_n = \mathcal{M}_n}$

II.1.b ($\forall M \in O_n, {}^t M.M = \mathbb{1} \Rightarrow M \in GL_n$) $\Rightarrow O_n \subset GL_n$

${}^t \mathbb{1}.\mathbb{1} = \mathbb{1}.\mathbb{1} = \mathbb{1} \Rightarrow \mathbb{1} \in O_n \Rightarrow O_n$ partie non vide de GL_n .

Soit $(M_1, M_2) \in O_n^2, {}^t(M_1.M_2^{-1}).(M_1.M_2^{-1}) = {}^t M_2^{-1}.\underbrace{{}^t M_1.M_1}_{=\mathbb{1}}.M_2^{-1} = {}^t M_2^{-1}.M_2^{-1}$.

Or ${}^t M_2.M_2 = \mathbb{1} \Rightarrow M$ inversible et $M_2^{-1} = {}^t M_2$ d'où ${}^t(M_1.M_2^{-1}).(M_1.M_2^{-1}) = \mathbb{1} \Rightarrow (M_1.M_2^{-1}) \in O_n$

conclusion : $\left. \begin{array}{l} O_n \text{ partie non vide de } GL_n \\ \forall (M_1, M_2) \in O_n^2, M_1.M_2^{-1} \in O_n \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{O_n \text{ sous groupe de } (GL_n, \circ)}$

($\forall M = (m_{i,j}) \in \mathcal{P}_n, \det M = \prod_{i=1}^n m_{i,i} > 0 \Rightarrow M \in GL_n$) d'où $\mathcal{P}_n \subset GL_n$

$\forall (M_1, M_2) \in \mathcal{P}_n$ et soit $M = M_1 M_2 = (m_{i,j})$ $M_1 = m_{i,j}^1, M_2 = m_{i,j}^2$

$$m_{i,j} = \sum_{k=1}^n m_{i,k}^1.m_{k,j}^2 = \sum_{k=1}^i m_{i,k}^1.m_{k,j}^2 + \sum_{k=i+1}^n \underbrace{m_{i,k}^1}_{=0} m_{k,j}^2$$

Or $m_{k,j} = 0$ si $j > k$ d'où $m_{i,j} = \left\{ \begin{array}{l} = 0 \text{ si } j > i \\ = m_{i,i}^1.m_{i,i}^2 \text{ si } i = j(*) \\ = \sum_{k=j}^i m_{i,k}^1.m_{k,j}^2 \text{ si } j < i \end{array} \right\} \Rightarrow M_1.M_2 \in \mathcal{P}_n$ ($\mathcal{P}_n$ est stable par produit.)

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ de M est un polynôme annulateur de M (de plus $a_0 = \det M$).

$P(M) = 0 = \sum_{k=1}^n a_k M^k + \det M \mathbb{1} \Rightarrow M. \left(\sum_{k=1}^n a_k M^{k-1} \right) = -\det M \mathbb{1} \Rightarrow M^{-1} = -\frac{1}{\det M} \left(\sum_{k=1}^n a_k M^{k-1} \right) \Rightarrow$

M^{-1} est une matrice triangulaire inférieure comme combinaisons linéaires de matrices triangulaires inférieures.

Si $M = (m_{i,j})$ et $M^{-1} = (m'_{i,j})$ d'après (*) $\forall i, m_{i,i}.m'_{i,i} = 1 \Rightarrow m'_{i,i} = \frac{1}{m_{i,i}} > 0 \Rightarrow M^{-1} \in \mathcal{P}_n$

conclusion : $\left. \begin{array}{l} \mathcal{P}_n \text{ partie non vide de } GL_n \\ \forall (M_1, M_2) \in \mathcal{P}_n^2, M_1.M_2 \in \mathcal{P}_n \text{ et } M_1^{-1} \in \mathcal{P}_n \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_n \text{ sous groupe de } (GL_n, \circ)}$

II.1.c Soit $A \in \mathcal{A}_n, {}^t(\exp(M)) = {}^t \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k \right)$ Or $M \mapsto {}^t M$ étant linéaire donc continue car nous

sommes en dimension finie : ${}^t \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} {}^t \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} {}^t(M^k)$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} ({}^t M^k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (-M)^k = \exp(-M) = (\exp M)^{-1}$

$\Rightarrow {}^t(\exp M) = (\exp M)^{-1} \Rightarrow \exp M \in O_n$

conclusion : $\boxed{\forall M \in \mathcal{A}_n, \exp M \in O_n}$

Soit $M \in \mathcal{T}_n$, $\mathcal{T}_n$ étant stable par produit, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $M^k \in \mathcal{T}_n$ (de plus $M^0 = \mathbb{1} \in \mathcal{T}_n$).

Si M est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ X & & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors M^k est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ X & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$.

$\exp M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$ est de la forme $\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ X & & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ X & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_n$

conclusion : $\boxed{\forall M \in \mathcal{T}_n, \exp M \in \mathcal{P}_n}$

1.d $\forall t \in I, R(t) \in O_n \Rightarrow \forall t \in I, {}^tR(t).R(t) = \mathbb{1} \Rightarrow \forall t \in I, \dot{{}^tR}(t).R(t) + {}^tR(t).\dot{R}(t) = 0$

Or, par linéarité de la transposition $\dot{{}^tR}(t) = {}^t\dot{R}(t)$, d'où

$\forall t \in I, {}^t({}^tR(t).\dot{R}(t)) = -{}^tR(t).\dot{R}(t) \Rightarrow \forall t \in I, {}^t(R(t)^{-1}.\dot{R}(t)) = -R(t)^{-1}.\dot{R}(t)$ car ${}^tR(t) = R(t)^{-1}$

$\Rightarrow \forall t \in I, R(t)^{-1}.\dot{R}(t) \in \mathcal{A}_n$

conclusion : $\boxed{\text{Si } R : I \rightarrow O_n \text{ de classe } C^1 \text{ alors } R^{-1}.\dot{R} \text{ à valeurs dans } \mathcal{A}_n}$

$\forall t \in I, T(t) \in \mathcal{P}_n \Rightarrow \forall t \in I, T(t)$ est inversible et $T(t)^{-1} \in \mathcal{P}_n$ (car $\mathcal{P}_n$ sous-groupe de GL_n)

De plus, si $T(t) = (a_{i,j}(t))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, on a : $\forall t \in I, \forall i, j, i < j \Rightarrow a_{i,j}(t) = 0 \Rightarrow \dot{a}_{i,j}(t) = 0$ d'où $\dot{T}(t) \in \mathcal{T}_n$

$T(t) \in \mathcal{P}_n$ et $\dot{T}(t) \in \mathcal{T}_n \Rightarrow T(t)^{-1}.\dot{T}(t) \in \mathcal{T}_n$ ($\mathcal{P}_n \subset \mathcal{T}_n$ et $\mathcal{T}_n$ stable par produit).

conclusion : $\boxed{\text{Si } T : I \rightarrow \mathcal{P}_n \text{ de classe } C^1 \text{ alors } T^{-1}.\dot{T} \text{ à valeurs dans } \mathcal{T}_n}$

2.a Soit $B \in GL_n$. Soit $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de B .

B étant inversible $(C_n, \dots, C_1)$ est une base $\mathbb{R}^n$. En considérant $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel, on applique le procédé d'orthonormalisation de Schmidt pour trouver une base orthonormale $(C_n^R, \dots, C_1^R)$ qui vérifie $\begin{cases} \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket & \text{Vect}(C_{n-k}, \dots, C_n) = \text{Vect}(C_{n-k}^R, \dots, C_n^R) \\ & (C_k | C_k^R) > 0 \end{cases}$.

Si on note $T_k = \begin{pmatrix} t_{1,k} \\ \vdots \\ t_{n,k} \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des coordonnées de C_k dans la base $(C_1^R, \dots, C_n^R)$.

Comme $C_k \in \text{Vect}(C_k^R, \dots, C_n^R)$, on a : $t_{1,k} = t_{2,k} = \dots = t_{k-1,k} = 0$ ceci pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$ d'où la matrice T dont les vecteurs colonnes sont les T_k appartient à $\mathcal{T}_n$ et comme pour tout entier k de $\llbracket 1, n \rrbracket$ $(C_k | C_k^R) > 0$ on a $t_{k,k} > 0$ ce qui nous donne $T \in \mathcal{P}_n$.

R la matrice dont les vecteurs colonnes sont les C_k^R est orthogonale car les vecteurs colonnes forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

En représentant les matrices par leurs colonnes ou leurs coefficients il vient :

$R.T = (C_1^R, \dots, C_n^R).(t_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = \left(\sum_{i=1}^n t_{i,1} C_i^R, \sum_{i=1}^n t_{i,2} C_i^R, \dots, \sum_{i=1}^n t_{i,n} C_i^R \right) = (C_1, \dots, C_n) = B$.

conclusion : $\boxed{\forall B \in GL_n, \exists R \in O_n, \exists T \in \mathcal{P}_n \mid B = RT}$

2.b unicité de la décomposition

Soit $B \in GL_n$, soit $(R_1, R_2) \in O_n^2$ et $(T_1, T_2) \in \mathcal{P}_n^2/B = R_1 T_1 = R_2 T_2$.

On a donc $\underbrace{R_2^{-1}R_1}_{\in O_n} = \underbrace{T_2.T_1^{-1}}_{\in \mathcal{P}_n} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ d'après **II.1.b**.

Si on note $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de $R_2^{-1}.R_1 (= T_2.T_1^{-1})$ qui est triangulaire inférieure.

$$\left. \begin{array}{l} (C_n | C_n) = 1 = a_{n,n}^2 \Rightarrow |a_n| \Rightarrow a_{n,n} = 1 \text{ car } R_2^{-1}.R_1 \in \mathcal{P}_n \\ (C_{n-1} | C_{n-1}) = 1 \\ (C_{n-1} | C_n) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_{n-1,n-1}^2 + a_{n,n-1}^2 = 1 \\ a_{n,n-1} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_{n-1,n-1}^2 = 1 \\ a_{n,n-1} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_{n-1,n-1} = 1 \\ a_{n,n-1} = 0 \end{array} \right\} \text{ car } a_{n-1,n-1} > 0$$

On montre en réitérant le procédé que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{k,k} = 1 \text{ et } \forall i, j, i \neq j, a_{i,j} = 0 \text{ soit } R_2^{-1}.R_1 = \mathbb{I} \Rightarrow R_2 = R_1 \text{ et } T_2 = T_1.$$

conclusion : Il y a unicité de la décomposition du **II.2.a**)

2.c Si on note $(C_1^R(t), \dots, C_n^R(t))$ les vecteurs colonnes de $R(t)$, nous avons vu qu'ils sont obtenus à partir du procédé d'orthonormalisation de Schmidt à partir des vecteurs colonnes $(C_1(t), \dots, C_n(t))$ de $B(t)$. Ainsi

$$C_k^R(t) = \frac{1}{\|C_k(t)\|} \cdot C_k(t) \text{ et récursivement } C_k^R(t) = \frac{C_k(t) - \sum_{i=k+1}^n (C_i^R(t) | C_k(t)) C_i^R(t)}{\left\| C_k(t) - \sum_{i=k+1}^n (C_i^R(t) | C_k(t)) C_i^R(t) \right\|}$$

$t \mapsto C_n(t)$ étant de classe C^1 et ne s'annulant pas sur I on a : $C_n^R : t \mapsto \frac{1}{\|C_n(t)\|} \cdot C_n(t)$ de classe C^1 sur I .

Puis récursivement, on démontre que $D_k : t \mapsto C_k(t) - \sum_{i=k+1}^n (C_i^R(t) | C_k(t)) C_i^R(t)$ est de classe C^1 sur I

comme somme de produits de fonction de classe C^1 et ne s'annule pas sur I car $C_k(t) \notin \text{Vect}(C_{k+1}^R(t), \dots, C_n^R(t))$

d'où $C_k^R : t \mapsto \frac{1}{\|D_k(t)\|} D_k(t)$ est de classe C^1 sur $I \Rightarrow \boxed{t \mapsto R(t) \text{ est } C^1 \text{ sur } I}$.

$\Rightarrow t \mapsto (R(t))^{-1}$ est C^1 sur I d'après **I.2.a** $\Rightarrow t \mapsto T(t) = (R(t))^{-1}.B(t)$ est C^1 sur I (les coefficients de $T(t)$ s'expriment comme des sommes de produits des coefficients de $R(t)^{-1}$ et de $B(t)$).

conclusion : $t \mapsto T(t)$ est C^1 sur I

3.a $\left\{ \begin{array}{l} \dot{L} = [L, \pi_1(L)] \\ L(0) = X \end{array} \right.$ avec $L = A(t)^{-1}.X.A(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}(A(t)^{-1}.X.A(t)) = [A(t)^{-1}.X.A(t), A(t)^{-1}.\dot{A}(t)] = [L, \pi_1(L)] = [A(t)^{-1}.X.A(t), \pi_1(L)]$
Si $\left\{ \begin{array}{l} A^{-1}.\dot{A} = \pi_1(L) \\ A(0) = \mathbb{I} \end{array} \right.$ alors $L = A^{-1}.X.A$ satisfait à (3).

conclusion : L'équation différentielle cherchée est : $\left\{ \begin{array}{l} \dot{A} = A.\pi_1(A^{-1}.X.A) \\ A(0) = \mathbb{I} \end{array} \right.$

3.b posons $X_1 = \pi_1(X)$ et $X_2 = \pi_2(X)$ (on a $X = X_1 + X_2$)

si X_1 et X_2 commutent : on peut montrer que : $\exp(tX) = \exp(tX_1 + tX_2) = \exp(tX_1).\exp(tX_2)$

or $\left. \begin{array}{l} X_1 \in \mathcal{A}_n \Rightarrow \forall t \in I, tX_1 \in \mathcal{A}_n \Rightarrow \forall t \in I, \exp(tX_1) \in O_n \\ X_2 \in \mathcal{T}_n \Rightarrow \forall t \in I, tX_2 \in \mathcal{T}_n \Rightarrow \forall t \in I, \exp(tX_2) \in \mathcal{P}_n \end{array} \right\} \Rightarrow \Pi_1(\exp(tX)) = \exp(tX_1) = \exp(t\pi_1(X))$

$$\Rightarrow A(t) = \exp(tX_1) \Rightarrow \dot{A}(t) = \exp(tX_1).X_1 \Rightarrow A(t)^{-1}.X.A(t) = \exp(-tX_1)(X_1 + X_2).\exp(tX_1)$$

Or comme X_1 et X_2 commutent, on peut montrer que $\exp(tX_1)$ et X_2 commutent d'où :

$A(t)^{-1}.X.A(t) = X \Rightarrow \pi_1(A(t)^{-1}.X.A(t)) = \pi_1(X) = X_1$. On a bien A solution de $\dot{A} = A.\pi_1(A^{-1}.X.A)$. De plus $A(0) = \Pi_1(\exp(0)) = \Pi_1(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$ car $\mathbb{I} = \mathbb{I}.\mathbb{I}$ avec $\mathbb{I} \in O_n$ et $\mathbb{I} \in \mathcal{P}_n$.

si X_1 et X_2 ne commutent pas : ?????

III.1 On considère :

$$f : \left(\begin{array}{c} \mathbb{R}^{2n} \\ (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \mathbb{R}^{2n} \\ (-2e^{2(y_1-y_2)}, -2e^{2(y_2-y_3)} + 2e^{2(y_1-y_2)}, \dots, 2e^{2(y_{n-1}-y_n)}, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right).$$

En posant $X = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$, on cherche à résoudre l'équation différentielle du premier ordre $\dot{X} = f(X)$ et

$$X(0) = \begin{pmatrix} \bar{p}_1 \\ \vdots \\ \bar{p}_n \\ \bar{q}_1 \\ \vdots \\ \bar{q}_n \end{pmatrix}.$$

f étant définie continue sur $\mathbb{R}^{2n}$, les conditions d'applications du théorème de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites, donc on a l'existence et l'unicité d'une solution locale à notre problème.

<u>conclusion</u> : $\exists \varepsilon, \exists X :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ de classe C^1 telle que $\forall t \in]\varepsilon, \varepsilon[, \dot{X} = f(X(t))$ et $X(0) = \begin{pmatrix} \bar{p}_1 \\ \vdots \\ \bar{p}_n \\ \bar{q}_1 \\ \vdots \\ \bar{q}_n \end{pmatrix}$
--

III.2
$$\begin{aligned} H(q(t), p(t)) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2(t) + \sum_{i=1}^{n-1} e^{2(q_i(t)-q_{i+1}(t))} \\ &= \frac{d(H(q(t), p(t)))}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n 2p_i(t)\dot{p}_i(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(2\dot{q}_i(t)e^{2(q_i(t)-q_{i+1}(t))} - 2q_{i+1}(t)e^{2(q_i(t)-q_{i+1}(t))} \right) \\ &= p_1(t)(-2e^{2(q_1(t)-q_2(t))}) + \sum_{i=2}^{n-1} p_i(t) \left(-2e^{2(q_i(t)-q_{i+1}(t))} + 2e^{2(q_{i-1}(t)-q_i(t))} \right) + p_n(t)(-2e^{2(q_{n-1}(t)-q_n(t))}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \left(2p_i(t)e^{2(q_i(t)-q_{i+1}(t))} - 2p_{i+1}(t)e^{2(q_i(t)-q_{i+1}(t))} \right) \\ &= 2 \sum_{i=2}^n p_i(t)e^{2(q_{i-1}(t)-q_i(t))} - 2 \sum_{i=1}^{n-1} p_i(t)e^{2(q_i(t)-q_{i+1}(t))} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} p_i(t)e^{2(q_i(t)-q_{i+1}(t))} - 2 \sum_{i=2}^n p_i(t)e^{2(q_{i-1}(t)-q_i(t))} \\ &= 0 \Rightarrow t \mapsto H(q(t), p(t)) \text{ a une dérivée nulle sur l'intervalle } I \\ &\Rightarrow \boxed{t \mapsto H(q(t), p(t)) \text{ est constante sur } I}. \end{aligned}$$

III.3
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(P(q(t), p(t))) &= \sum_{i=1}^n \dot{p}_i(t) = -2e^{2(q_1(t)-q_2(t))} + \sum_{i=2}^{n-1} \left(-2e^{2(q_i(t)-q_{i+1}(t))} + 2e^{2(q_{i-1}(t)-q_i(t))} \right) + 2e^{2(q_{n-1}(t)-q_n(t))} \\ &= -2e^{2(q_1(t)-q_2(t))} + \sum_{i=2}^{n-1} -2e^{2(q_i(t)-q_{i+1}(t))} + \sum_{i=2}^{n-1} 2e^{2(q_{i-1}(t)-q_i(t))} + 2e^{2(q_{n-1}(t)-q_n(t))} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} -2e^{2(q_i(t)-q_{i+1}(t))} + \sum_{i=1}^{n-2} 2e^{2(q_i(t)-q_{i+1}(t))} + 2e^{2(q_{n-1}(t)-q_n(t))} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{P : (q, p) \mapsto \sum_{i=1}^n p_i \text{ est une intégrale première}}$$

III.4 Soit $R : t \mapsto Q(q(t), p(t)) - tP(q(t), p(t))$.

$$\text{On a } R'(t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i(t) - P(q(t), p(t)) - t \underbrace{\frac{d}{dt}(P(q(t), p(t)))}_{=0 \text{ d'après III.3}} = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i(t) - \sum_{i=1}^n p_i(t) = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{t \mapsto Q(q(t), p(t)) - tP(q(t), p(t)) \text{ est une fonction constante sur } I}$$

III.5 On remarque que $L = M + (L - M)$ avec $L \in \mathcal{A}_n$ et $(L - M) \in \mathcal{P}_n$. On a donc $\pi_1(L) = M \Rightarrow [L, \pi_1(L)] =$

$$LM - ML = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

On a $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j} = \sum_{k=1}^n l_{i,k} m_{k,j} - \sum_{k=1}^n m_{i,k} l_{k,j}$ et

$$\dot{L} = (\dot{l}_{i,j}) \text{ avec } \dot{l}_{i,j} = \begin{cases} \dot{p}_i & \text{si } i = j \\ (\dot{q}_i - q_{i+1})e^{q_i - q_{i+1}} & \text{si } j = i + 1 \\ (\dot{q}_j - q_{j+1})e^{q_j - q_{j+1}} & \text{si } i = j + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} -2e^{2(q_1 - q_2)} & \text{si } i = j = 1 \\ -2e^{2(q_i - q_{i+1})} + 2e^{2(q_{i-1} - q_i)} & \text{si } i = j \text{ et } 1 < i < n \\ -2e^{2(q_{n-1} - q_n)} & \text{si } i = j = n \\ (p_i - p_{i+1})e^{q_i - q_{i+1}} & \text{si } j = i + 1 \\ (p_j - p_{j+1})e^{q_j - q_{j+1}} & \text{si } i = j + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie par le calcul que $\dot{L} = LM - ML = [L, \pi_1(L)]$ et donc que L satisfait une équation de Lax de type

$$(3). \text{ Ici } L(0) = X = \begin{pmatrix} \overline{p_1} & e^{\overline{q_1} - \overline{q_2}} & & & \\ e^{\overline{q_1} - \overline{q_2}} & \overline{p_2} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \overline{p_{n-1}} & e^{\overline{q_{n-1}} - \overline{q_n}} \\ & & & e^{\overline{q_{n-1}} - \overline{q_n}} & \overline{p_n} \end{pmatrix}$$