

Banque PT – Math I-B

QUESTION PRÉLIMINAIRE

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On note :

- $\chi_A(X)$ le polynôme caractéristique de A ;
- $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de A ;
- $E_A(\lambda)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ ;
- $m_A(\lambda)$ l'ordre de multiplicité de λ .

On a la condition nécessaire et suffisante suivante :

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\left\{ \begin{array}{l} \chi_A(X) \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X]; \\ \forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A), \dim E_A(\lambda) = m_A(\lambda). \end{array} \right.$

Compte tenu de ce que l'on a, d'une manière générale, $1 \leq \dim E_A(\lambda) \leq m_A(\lambda)$, il en résulte immédiatement que si $\chi_A(X)$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et n'a que des racines simples, alors A est diagonalisable.

PARTIE I : ALGORITHME DE BABYLONE

1. En posant $\rho_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, les relations $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$ équivalent à $\rho_{n+1} = A \rho_n$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = (X - 1)^2 - 2$. Les valeurs propres de A sont donc $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$.

D'après la condition suffisante rappelée ci-dessus, A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

3. Montrons par récurrence que u_n et v_n sont strictement positifs pour tout n :

- c'est vrai pour $n = 0$: $u_0 = v_0 = 1$.
- supposons que pour $n \geq 0$ fixé, $u_n > 0$ et $v_n > 0$; alors, $u_{n+1} = u_n + 2v_n > 0$ et $v_{n+1} = u_n + v_n > 0$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n et v_n sont strictement positifs.

4. Notons $r_n = \frac{u_n}{v_n}$. La suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie pour tout n , et ses termes sont strictement positifs.

On a : $r_0 = 1$, et pour tout $n \geq 0$, $r_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{u_n + v_n} = 1 + \underbrace{\frac{v_n}{u_n + v_n}}_{> 0}$ donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\frac{u_n}{v_n} \geq 1$.

De plus, pour tout $n \geq 0$: $r_{n+1} = \frac{u_n/v_n + 2}{u_n/v_n + 1} = \frac{r_n + 2}{r_n + 1}$ (1).

Si la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, sa limite est une solution positive de l'équation $\ell = \frac{\ell + 2}{\ell + 1}$ (2).

(2) équivaut à $\ell^2 = 2$, donc la limite éventuelle de $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $\ell = \sqrt{2}$.

(1) – (2) donne $r_{n+1} - \ell = \frac{(r_n + 2)(\ell + 1) - (\ell + 2)(r_n + 1)}{(r_n + 1)(\ell + 1)} = \frac{\ell - r_n}{(r_n + 1)(\ell + 1)}$

Comme $r_n \geq 1$ et $\ell = \sqrt{2}$, on a : $|r_{n+1} - \ell| = \frac{|\ell - r_n|}{(r_n + 1)(\ell + 1)} \leq \frac{|r_n - \ell|}{2(1 + \sqrt{2})}$ et a fortiori :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{2} \left| \frac{u_n}{v_n} - \sqrt{2} \right|.$$

5. Montrons par récurrence que $\left| \frac{u_n}{v_n} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{2^n} \left| \frac{u_0}{v_0} - \sqrt{2} \right|$.

C'est vrai si $n = 0$; si cette inégalité est vraie pour $n \geq 0$ fixé, alors :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{2} \left| \frac{u_n}{v_n} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{2} \frac{1}{2^n} \left| \frac{u_0}{v_0} - \sqrt{2} \right| = \frac{1}{2^{n+1}} \left| \frac{u_0}{v_0} - \sqrt{2} \right|.$$

On a donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\left| \frac{u_n}{v_n} - \sqrt{2} \right| < \frac{\sqrt{2}-1}{2^n}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}-1}{2^n} = 0$, on peut conclure :

La suite $\left(\frac{u_n}{v_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$.

6. Comme $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$, on a encore $\left| \frac{u_n}{v_n} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{2^{n+1}}$ ce qui signifie que le rationnel $\frac{u_n}{v_n}$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à moins de $\frac{1}{2^{n+1}}$ près.

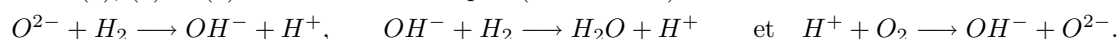
Pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près, il suffit de calculer $\frac{u_n}{v_n}$ à un rang n tel que $\frac{1}{2^{n+1}} < 10^{-2}$ ce qui est réalisé si $n = 6$.

Une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près peut s'obtenir avec $\frac{u_n}{v_n}$ où n vérifie $\frac{1}{2^{n+1}} < 10^{-4}$; c'est le cas à partir de $n = 13$.

N.B. Si on avait minoré au 4. $(r_n + 1)(\ell + 1)$ par $\frac{1}{4}$ au lieu de $\frac{1}{2}$, on aurait pu s'apercevoir que $n = 3$ et $n = 7$ suffisaient pour les valeurs approchées à 10^{-2} et 10^{-4} près respectivement; et un calcul montre que la précision 10^{-2} (resp. 10^{-4}) n'est effectivement atteinte que pour $n = 3$ (resp. $n = 5$).

PARTIE II : ÉTUDE D'UNE RÉACTION CHIMIQUE

1. Notons (1), (2) et (3) les réactions chimiques (dans l'ordre) :



À l'instant $n = 0$, on a $o_0 = 1$, $(oh)_0 = 0$ et $h_0 = 0$, d'où $\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

À l'instant $n = 1$, seule la réaction (1) a eu lieu, puisque les radicaux OH^- et H^+ ne sont pas encore présents.

On a bien, comme indiqué, $o_1 = 0$ (l'unique radical O^{2-} a réagi), $(oh)_1 = 1$ et $h_1 = 1$, d'où $\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

À l'instant $n = 2$, seules les réactions (2) et (3) ont eu lieu, car à l'instant $n = 1$ il n'y avait plus de radical O^{2-} . Les radicaux OH^- et H^+ ont disparu, pour donner naissance à une molécule H_2O , et un radical de

chaque sorte. On a donc $o_2 = 1$, $(oh)_2 = 1$ et $h_2 = 1$, d'où $\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

À l'instant $n = 3$, les trois réactions ont eu lieu, faisant disparaître les radicaux O^{2-} , OH^- et H^+ présents et donnant naissance à une molécule H_2O , et deux radicaux OH^- , deux radicaux H^+ , et un radical O^{2-} . On a bien

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. o_2 , $(oh)_2$ et h_2 sont tous trois supérieurs ou égaux à 1.

Supposons que o_n , $(oh)_n$ et h_n soient tous trois supérieurs ou égaux à 1. Alors, entre l'instant n et l'instant $n+1$ les trois réactions ont bien lieu, et :

- (1) fait disparaître les o_n radicaux O^{2-} présents et augmente $(oh)_n$ et h_n de o_n ;
- (2) fait disparaître les $(oh)_n$ radicaux OH^- présents et augmente h_n de $(oh)_n$;
- (3) fait disparaître les h_n radicaux H^+ présents et augmente $(oh)_n$ et o_n de h_n .

On a donc, globalement :
$$\begin{cases} o_{n+1} = h_n \\ (oh)_{n+1} = o_n + h_n \\ h_{n+1} = o_n + (oh)_n \end{cases}$$

ce qui montre que o_{n+1} , $(oh)_{n+1}$ et h_{n+1} sont tous trois supérieurs ou égaux à 1 (donc, par récurrence, que pour tout $n \geq 2$, o_n , $(oh)_n$ et h_n sont tous trois supérieurs ou égaux à 1)

et ce qui se traduit matriciellement par $\rho_{n+1} = A \rho_n$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. On en déduit que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\rho_n = A^n \rho_0$.

Examinons la diagonalisabilité de A :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \begin{vmatrix} -X & 0 & 1 \\ 1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftarrow \overline{C_1} - C_3} \begin{vmatrix} -X-1 & 0 & 1 \\ 0 & -X & 1 \\ 1+X & 1 & -X \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow \overline{L_3} + L_1} (1+X) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -X & 1 \\ 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= -(X+1)(X^2 - X - 1) = -(X+1) \left(X - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \left(X - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

Donc A est diagonalisable et il existe une matrice inversible P telle que $A = P D P^{-1}$, avec

$$D = \text{diag} \left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right).$$

On a alors : $A^n = P D^n P^{-1}$, avec $D^n = \text{diag} \left((-1)^n, \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$

Comme $\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ρ_n est le premier vecteur colonne de A^n .

Et comme o_n est la première coordonnée de ρ_n , o_n est le coefficient $(1, 1)$ de A^n .

L'expression $A^n = P D^n P^{-1}$ montre que o_n est, comme tous les coefficients de A^n , une combinaison linéaire de $(-1)^n$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Il existe des constantes réelles α , β et γ telles que, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$o_n = \alpha (-1)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \gamma \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

4. On peut trouver α , β et γ grâce aux premières valeurs trouvées au 1.

Notons pour abréger $\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\bar{\phi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Comme ce sont les racines du polynôme $X^2 - X - 1$, on a : $\phi^2 = \phi + 1$, $\bar{\phi}^2 = \bar{\phi} + 1$, $\phi + \bar{\phi} = 1$ et $\phi \bar{\phi} = -1$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} o_0 = 1 \\ o_1 = 0 \\ o_2 = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ -\alpha + \beta\phi + \gamma\bar{\phi} = 0 \\ \alpha + \beta\phi^2 + \gamma\bar{\phi}^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ -\alpha + \beta\phi + \gamma\bar{\phi} = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma + \beta\phi + \gamma\bar{\phi} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ -\alpha + \beta\phi + \gamma\bar{\phi} = 0 \\ \beta\phi + \gamma\bar{\phi} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha = 0 \\ \beta\phi + \gamma\bar{\phi} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 1 \\ \beta\phi + \gamma\bar{\phi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma = \frac{\phi}{\phi - \bar{\phi}} \neq 0 \end{aligned}$$

et comme $\phi < 0$ et $\bar{\phi} > 0$, on a : $\gamma > 0$.

(On pouvait achever le calcul et trouver $(\alpha, \beta, \gamma) = \left(0, \frac{5+\sqrt{5}}{10}, \frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)$.)

5. On a $\phi \in]-1, 0[$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta \phi^n = 0$; et $\bar{\phi} > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma \bar{\phi}^n = +\infty$.

Par opérations élémentaires sur les suites (sans connaître la valeur de α , la suite $(\alpha(-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée),

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} o_n = +\infty.}$$

PARTIE III : DIFFUSION D'UN GAZ

1. Notons p_{ij} (resp. $(PB_n)(i, j)$, $(PB)(i, j)$) le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice P (resp. des matrices PB_n , PB).

On a : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $(PB_n)(i, j) = \sum_{k=1}^n p_{ik} b_{kj}(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n p_{ik} b_{kj} = (PB)(i, j)$.

On montre de même que, pour tout (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, $(B_n P)(i, j) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (BP)(i, j)$.

Si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers B , alors $(PB_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers PB et $(B_n P)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers BP .

2. Étudions la réduction de $Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$: $\chi_Q(X) = (X - 1/3)^2 - 1/4 = (X - 5/6)(X + 1/6)$.

D'après la condition suffisante rappelée dans la partie préliminaire, Q est diagonalisable, et semblable à $D = \text{diag}(5/6, -1/6)$.

$D^n = \text{diag}((5/6)^n, (-1/6)^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} O$ (matrice nulle), et il existe une matrice de passage P telle que $Q^n = P D^n P^{-1}$.

En utilisant le 1. on obtient $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} Q^n = O.}$

3. Les calculs du 2. montrent que $1 \notin \text{Sp}_{\mathbb{R}}(Q)$, donc $\boxed{\text{la matrice } I - Q \text{ est inversible.}}$

Notons $S_n = I + Q + Q^2 + \dots + Q^n$.

$(I - Q)S_n = (I + Q + Q^2 + \dots + Q^n) - (Q + Q^2 + \dots + Q^{n+1}) = I - Q^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I$

donc, en utilisant le 1.

$S_n = (I - Q)^{-1} (I - Q^{n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (I - Q)^{-1}$ et on a bien :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (I + Q + Q^2 + \dots + Q^n) = (I - Q)^{-1}.}$$

4. La matrice A se décompose en blocs carrés d'ordre 2 de la façon suivante : $A = \begin{pmatrix} Q & O \\ R & I \end{pmatrix}$

On calcule A^2 (produit par blocs) : $A^2 = \begin{pmatrix} Q^2 & O \\ R(I+Q) & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^2 & O \\ RS_1 & I \end{pmatrix}$.

Montrons par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} Q^n & O \\ RS_{n-1} & I \end{pmatrix}$.

Cette égalité est vraie pour $n = 1$; si elle est vraie pour $n \geq 1$ fixé, alors

$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} Q^n & O \\ RS_{n-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & O \\ R & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^{n+1} & O \\ RS_{n-1}Q + R & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^{n+1} & O \\ RS_n & I \end{pmatrix}$

qui est bien de la forme attendue.

Les calculs précédents montrent que A^n possède une limite qui est $\begin{pmatrix} O & O \\ R(I - Q)^{-1} & I \end{pmatrix}$.

Déterminons-en les coefficients : $I - Q = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/2 \\ -1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$ d'où $(I - Q)^{-1} = \frac{1}{4/9 - 1/4} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$

et $R(I - Q)^{-1} = \frac{6}{7} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4/7 & 3/7 & 1 & 0 \\ 3/7 & 4/7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Notons, pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $r_{i,n}$ la quantité de gaz au bout de n heures dans le réservoir R_i .

En discrétisant le phénomène de diffusion du gaz heure par heure, et en suivant les données, on obtient :

$$\begin{cases} r_{1,n+1} = r_{1,n} - \frac{1}{2} r_{1,n} - \frac{1}{6} r_{1,n} + \frac{1}{2} r_{2,n} \\ r_{2,n+1} = r_{2,n} + \frac{1}{2} r_{1,n} - \frac{1}{2} r_{2,n} - \frac{1}{6} r_{2,n} \\ r_{3,n+1} = r_{3,n} + \frac{1}{6} r_{1,n} \\ r_{4,n+1} = r_{4,n} + \frac{1}{6} r_{2,n} \end{cases} \iff \begin{cases} r_{1,n+1} = \frac{1}{3} r_{1,n} + \frac{1}{2} r_{2,n} \\ r_{2,n+1} = \frac{1}{2} r_{1,n} + \frac{1}{3} r_{2,n} \\ r_{3,n+1} = \frac{1}{6} r_{1,n} + r_{3,n} \\ r_{4,n+1} = \frac{1}{6} r_{2,n} + r_{4,n} \end{cases}$$

Explication : dans le réservoir R_1 , il y a la quantité à l'instant n , moins ce qui s'échappe dans R_2 et R_3 plus ce qui revient de R_2 , etc.

En notant $C_n = \begin{pmatrix} r_{1,n} \\ r_{2,n} \\ r_{3,n} \\ r_{4,n} \end{pmatrix}$, on a donc $C_{n+1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1 \end{pmatrix} C_n = A C_n$.

On en déduit $C_n = A^n C_0$, et les calculs du 4. montrent que la répartition du gaz dans les réservoirs tend

vers une limite qui est $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4/7 & 3/7 & 1 & 0 \\ 3/7 & 4/7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4/7 \\ 3/7 \end{pmatrix}$.

À la limite, R_1 et R_2 sont vides, R_3 et R_4 contiennent respectivement les $4/7$ et $3/7$ de la quantité initiale de gaz.

PARTIE IV : UN CAS PLUS GÉNÉRAL

1. $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \iff \det(A - \lambda I) = 0 \iff \det({}^t(A - \lambda I)) = 0 \iff \det({}^tA - \lambda I) = 0 \iff \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}({}^tA)$.

A et tA ont les mêmes valeurs propres.

2. Soit x (resp. y) un vecteur propre de A (resp. tA) associé à la valeur propre λ (resp. μ) :

$$\left. \begin{aligned} Ax = \lambda x &\Rightarrow {}^t y Ax = \lambda {}^t y x \\ {}^t A y = \mu y &\Rightarrow {}^t ({}^t A y) = {}^t y A = \mu {}^t y \Rightarrow {}^t y Ax = \mu {}^t y x \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\lambda - \mu) {}^t y x = 0 \quad \text{et comme } \lambda \neq \mu,$$

$$\boxed{{}^t y x = 0.}$$

3. (a) Dans la notation ${}^t x y$, on confond, comme c'est l'usage, la matrice $(1, 1)$ avec son unique élément. L'application $(\cdot | \cdot)$ de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(x, y) \mapsto (x | y) = {}^t y x$ est :

– linéaire à gauche : $\forall (\lambda, x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad (\lambda x_1 + x_2 | y) = {}^t y (\lambda x_1 + x_2) = \lambda {}^t y x_1 + {}^t y x_2 = \lambda (x_1 | y) + (x_2 | y)$

– symétrique : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad (y | x) = {}^t x y = {}^t ({}^t x y) = {}^t y x = (x | y)$ car la matrice $(1, 1)$ ${}^t x y$ est égale à sa transposée.

– définie positive : $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0_{\mathbb{R}^d}\}$, en notant $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ (coordonnées de x dans la base de $\mathbb{R}^d$ fixée par

l'énoncé), on a ${}^t x x = \sum_{i=1}^d x_i^2 > 0$ car les x_i ne sont pas tous nuls.

L'application $(x, y) \mapsto (x | y) = {}^t y x$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$.

(b) La matrice A possède d valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable; il s'ensuit que

la famille $(x_1, x_2, \dots, x_d)$ est une base de $\mathbb{R}^d$.

(c) Soit $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ fixé, et H_i l'hyperplan vect($x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d$).

D'après le 2. y_i est orthogonal à x_j pour tout $j \neq i$ (pour le produit scalaire précédemment défini), donc $y_i \in H_i^\perp$. Soit u_i un vecteur unitaire de la droite vectorielle $H_i^\perp$. Il existe un réel α_i tel que $y_i = \alpha_i u_i$. La condition ${}^t y_i x_i = 1$ équivaut à $\alpha_i {}^t u_i x_i = 1$ et comme $x_i \notin H_i$, ${}^t u_i x_i \neq 0$, donc il existe bien un réel α_i (d'ailleurs unique : $\alpha_i = \frac{1}{{}^t u_i x_i}$) tel que $\alpha_i {}^t u_i x_i = 1$. Comme i est arbitrairement fixé :

On peut choisir la famille $(y_1, y_2, \dots, y_d)$ de sorte que pour tout i de $\llbracket 1, d \rrbracket$ on ait ${}^t y_i x_i = 1$.

4. Pour tout $i \neq j$, $A_i A_j = (x_i {}^t y_i) (x_j {}^t y_j) = x_i \underbrace{({}^t y_i x_j)}_{=0 \text{ car } \lambda_i \neq \lambda_j} {}^t y_j = 0$

Pour tout i de $\llbracket 1, d \rrbracket$, $A_i^2 = (x_i {}^t y_i) (x_i {}^t y_i) = x_i \underbrace{({}^t y_i x_i)}_{=1} {}^t y_i = x_i {}^t y_i = A_i$.

En utilisant le symbole de Kronecker $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ on peut conclure :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, d \rrbracket^2, \quad A_i A_j = \delta_{ij} A_i.$$

5. Pour tout j de $\llbracket 1, d \rrbracket$, $\left(\sum_{i=1}^d A_i \right) x_j = \sum_{i=1}^d A_i x_j = \sum_{i=1}^d (x_i {}^t y_i) x_j = \sum_{i=1}^d x_i ({}^t y_i x_j) = \sum_{i=1}^d x_i \delta_{ij} = x_j = I x_j$

Les matrices $\sum_{i=1}^d A_i$ et I ont même image de la base $(x_1, x_2, \dots, x_d)$ de $\mathbb{R}^d$, donc sont égales.

De même, pour tout j de $\llbracket 1, d \rrbracket$,

$$\left(\sum_{i=1}^d \lambda_i A_i \right) x_j = \sum_{i=1}^d \lambda_i A_i x_j = \sum_{i=1}^d \lambda_i (x_i {}^t y_i) x_j = \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i ({}^t y_i x_j) = \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i \delta_{ij} = \lambda_j x_j = A x_j$$

$$\sum_{i=1}^d A_i = I \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^d \lambda_i A_i = A.$$

6. Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $A^n = \sum_{i=1}^d \lambda_i^n A_i$.

L'égalité est vraie pour $n = 1$. Si elle est vraie pour n , alors

$$A^{n+1} = A^n A = \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i^n A_i \right) \left(\sum_{j=1}^d \lambda_j A_j \right) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \lambda_i^n \lambda_j A_i A_j = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \lambda_i^n \lambda_j \delta_{ij} A_i = \sum_{i=1}^d \lambda_i^{n+1} A_i.$$

$$A^n = \sum_{i=1}^d \lambda_i^n A_i.$$

7. $\frac{1}{\lambda_1^n} A^n = A_1 + \sum_{i=2}^d \frac{\lambda_i^n}{\lambda_1^n} A_i$ et pour tout $i \geq 2$, $\frac{\lambda_i^n}{\lambda_1^n} = \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ car $\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right| < 1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^n} A^n = A_1.$$

8. Montrons : $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow \lambda_1 \in]-1, 1]$.

La condition est suffisante :

- si $\lambda_1 = 1$, alors d'après la question précédente, $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = A_1$;
- si $\lambda_1 \in]-1, 1[$, alors comme $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_d|$, tous les λ_i sont dans $] -1, 1[$, et $A^n = \sum_{i=1}^d \lambda_i^n A_i$ tend vers 0.

La condition est nécessaire :

si $|\lambda_1| > 1$, ou si $\lambda_1 = -1$ alors $A^n = \lambda_1^n \left(\frac{1}{\lambda_1^n} A^n \right)$ ne tend pas vers une limite, puisque $\frac{1}{\lambda_1^n} A^n$ tend vers la limite non nulle A_1 ($A_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ ou $y_1 = 0$) et que $(\lambda_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

$$\boxed{\begin{aligned} (A^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge si et seulement si } \lambda_1 \in]-1, 1[\\ \lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \begin{cases} A_1 & \text{si } \lambda_1 = 1 \\ 0 & \text{si } |\lambda_1| < 1 \end{cases} \end{aligned}}$$

9. Partie I On avait trouvé les valeurs propres de A : $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2} > 1$ et $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$, avec $|\lambda_2| < \lambda_1$.

On a donc, pour tout $n \geq 0$, $A^n = (1 + \sqrt{2})^n A_1 + (1 - \sqrt{2})^n A_2$ d'où

$$\rho_n = A^n \rho_0 = (1 + \sqrt{2})^n (x_1 {}^t y_1) \rho_0 + (1 - \sqrt{2})^n (x_2 {}^t y_2) \rho_0 = ({}^t y_1 \rho_0)(1 + \sqrt{2})^n x_1 + ({}^t y_2 \rho_0)(1 - \sqrt{2})^n x_2$$

Ainsi, on voit que le vecteur $\frac{1}{(1 + \sqrt{2})^n} \rho_n$ tend vers un vecteur colinéaire à x_1 ; il en résulte que le rapport de ses coordonnées $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers le rapport des coordonnées de x_1 .

On détermine un vecteur propre x_1 de A associé à $1 + \sqrt{2}$: par exemple $x_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$; on retrouve ainsi

$$\boxed{\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{2}.}$$

Partie II Ici, $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_3 = -1$; on a $A^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n A_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n A_2 + (-1)^n A_3$. o_n étant le coefficient $(1, 1)$ de A^n est bien de la forme indiquée.

$$\boxed{o_n \text{ est de la forme } \alpha (-1)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \gamma \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.}$$

On pourrait vérifier que $\gamma > 0$ en cherchant le coefficient $(1, 1)$ de A_1 ; on peut prendre (calculs...) $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{\phi} \\ \phi \end{pmatrix}$ comme vecteur propre de A associé à $\bar{\phi} = \lambda_1$; un vecteur propre de ${}^t A$ associé à $\bar{\phi}$ est $y = \begin{pmatrix} \bar{\phi} \\ 1 \\ \bar{\phi} \end{pmatrix}$; ${}^t x_1 y = 2\bar{\phi} + \bar{\phi}^2 = 1 + 3\bar{\phi}$, donc $y_1 = \frac{1}{1+3\bar{\phi}} y$ vérifie la condition ${}^t x_1 y_1 = 1$; le coefficient $(1, 1)$ de A_1 est alors $\frac{\bar{\phi}}{1+3\bar{\phi}} > 0$ (et on peut retrouver la valeur $\frac{5+\sqrt{5}}{10}$).

PARTIE V : ÉTUDE D'UNE POPULATION

a_n , b_n et c_n désignant le nombre d'insectes respectivement de première, de seconde et de troisième année après n années, on a, selon la description de l'évolution de la population faite dans l'énoncé :

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n + c_n \\ b_{n+1} = a_n/2 \\ c_{n+1} = b_n/4 \end{cases}$$

Explication :

- les insectes de première année de l'an $n + 1$ viennent des b_n naissances provenant de ceux de deuxième année et des c_n naissances provenant de ceux de troisième année;
- les insectes de deuxième année de l'an $n + 1$ sont les $a_n/2$ insectes survivant à la première année;

– les insectes de troisième année de l'an $n + 1$ sont les $b_n/4$ insectes survivant à la deuxième année.

On a donc, en notant $P_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$: $P_{n+1} = A P_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$.

Étudions la réduction de A :

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ 1/2 & -X & 0 \\ 0 & 1/4 & -X \end{vmatrix} \stackrel{C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1}{=} \begin{vmatrix} -X & 1 & -1 - 2X \\ 1/2 & -X & 1 + 2X \\ 0 & 1/4 & -1/2 - X \end{vmatrix} \stackrel{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3}}{=} (1 + 2X) \begin{vmatrix} -X & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -X + 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \end{vmatrix} \\ &= -(1/2 + X) (X^2 - X/2 - 1/4) = -(X + 1/2) \left(X - \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \right) \left(X - \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right) \end{aligned}$$

A , ayant trois valeurs propres réelles distinctes, est diagonalisable, et en reprenant les notations du IV, on a :

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \approx 0,809 \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} = -0,5 \quad \lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \approx -0,309$$

et d'après le 8. $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$. D'où, puisque $P_n = A^n P_0$ avec $P_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$:

L'effectif de la population tend vers 0.

En faisant une simulation à la calculatrice avec ces données, on constate que la population s'éteint au bout de 36 ans.