

Mines PC M2 2021 - Corrigé - Relu - incomplet

Polynômes à racines toutes réelles

Log-concavité des suites

1. Pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{k}{n-k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n-k}{k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \underbrace{\frac{k}{k+1}}_{\in]0,1[} \underbrace{\frac{n-k}{n-k+1}}_{\in]0,1[} \binom{n}{k}^2 \leq \binom{n}{k}^2. \end{aligned}$$

La suite binomiale $\left(\binom{n}{k}\right)_{k=0,\dots,n}$ est donc bien log-concave.

2. Si $(a_k)_{k=0,\dots,n}$ est ultra log-concave, alors pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$\frac{a_{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \frac{a_{k+1}}{\binom{n}{k+1}} \leq \frac{a_k^2}{\binom{n}{k}^2},$$

donc, comme un coefficient binomial est positif, on a aussi

$$a_{k-1} a_{k+1} \leq \underbrace{\frac{\binom{n}{k-1} \binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}^2}}_{\leq 1} a_k^2 \leq a_k^2,$$

car $\left(\binom{n}{k}\right)_{k=0,\dots,n}$ est log-concave.

La suite $(a_k)_{k=0,\dots,n}$ est donc log-concave. cqfd.

3. Soit $(a_k)_{k=0,\dots,n}$ une suite strictement positive et log-concave.

Posons $j_0 = \max\{j \in \llbracket 0, n \rrbracket : a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_j\}$. j_0 existe comme maximum d'un ensemble fini (car inclus dans $\llbracket 0, n \rrbracket$) non vide (car 0 appartient à cet ensemble).

— Si $j_0 = n$, alors $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$, donc $(a_k)_{k=0,\dots,n}$ est unimodulaire.

— Si $j_0 = n-1$, alors, par définition de j_0 , on a $a_n < a_{n-1} = a_{j_0}$, donc $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{n-1} \geq a_n$, donc $(a_k)_{k=0,\dots,n}$ est unimodulaire.

— Si $j_0 < n-1$, alors, par définition de j_0 , on a $a_{j_0+1} < a_{j_0}$, et, comme $(a_k)_{k=0,\dots,n}$ est log-concave, on a, pour $j = j_0 + 1 \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$a_{j_0+2} a_{j_0} \leq a_{j_0+1}^2, \quad \text{donc} \quad a_{j_0+2} \leq \underbrace{\frac{a_{j_0+1}}{a_{j_0}}}_{\leq 1} a_{j_0+1} \leq a_{j_0+1}$$

car tous les termes sont strictement positifs.

En itérant ce procédé (ou via une récurrence immédiate), on montre alors que pour tout $k \in \llbracket j_0, n-1 \rrbracket$, $a_{k+1} \leq a_k$.

On a alors $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{j_0} \geq a_{j_0+1} \geq \dots \geq a_n$, donc $(a_k)_{k=0,\dots,n}$ est unimodulaire.

Rq : on peut même montrer que $a_{k+1} < a_k$ pour tout $k \in \llbracket j_0, n-1 \rrbracket$.

Dans tous les cas, on a bien $(a_k)_{k=0,\dots,n}$ unimodulaire.

Polynômes réels à racines toutes réelles

Rq : un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est donc à racines toutes réelles si et seulement s'il possède $\deg(P)$ racines réelles (où les racines sont comptées avec multiplicité). En effet, P est scindé sur \mathbb{C} et il est à racines toutes réelles si et seulement si toutes ses $\deg(P)$ racines complexes sont réelles, donc si et seulement s'il possède $\deg(P)$ racines réelles (encore une fois comptées avec multiplicité).

4. Si P est constant non nul, alors P est à racines toutes réelles (il n'en a pas), mais $P' = 0$ n'est pas à racine toutes réelles (car par exemple le nombre complexe $1+i$ est racine complexe non réelle de P').

On va donc considérer un polynôme P de degré au moins égal à 1 dans cette question, et la propriété sera fautive si $\deg(P) = 0$.

Il aurait été souhaitable d'inclure, par convention, le polynôme nul dans les polynômes à racines toutes réelles.

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à racines toutes réelles, notées $\alpha_1 < \dots < \alpha_r$, et de multiplicité respective n_1, \dots, n_r .

— Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, α_i est racine de P' de multiplicité $n_i - 1$ (en considérant que si un nombre est racine de multiplicité 0, il n'est pas racine).

— Pour tout $i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$, $P : x \mapsto P(x)$ est continue sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, dérivable sur $] \alpha_i, \alpha_{i+1}[$ et $P(\alpha_i) = P(\alpha_{i+1}) (= 0)$, donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $\beta_i \in] \alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tel que $P'(\beta_i) = 0$.

β_i est racine de multiplicité au moins 1 de P' .

Par construction, on a $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \beta_{r-1} < \alpha_r$, et la somme des multiplicités est au moins égale à

$$(n_1 - 1) + 1 + (n_2 - 1) + 1 + \dots + 1 + (n_r - 1) = \sum_{i=1}^r (n_i - 1) + (r - 1) \times 1 = \sum_{i=1}^r n_i - r + r - 1 = \deg(P) - 1 = \deg(P'),$$

et, comme elle est aussi au plus égale à $\deg(P')$, on obtient que chaque β_i est racine de multiplicité exactement 1 de P' , et que la somme des multiplicités des racines réelles de P' est égale à $\deg(P')$, donc P' est à racines toutes réelles.

5. On a

$$(*) \quad Q(X) = X^n P(1/X) = \sum_{k=0}^n a_k X^{n-k} = \sum_{i=0}^n a_{n-i} X^i \quad (\text{en posant } i = n - k).$$

Comme $a_n \neq 0$, on a $Q(0) = a_n \neq 0$, donc 0 n'est pas racine de Q .

Enfin, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on a

$$Q(z) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{z^n}_{\neq 0} P(1/z) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{P(1/z)}_{\in \mathbb{C}} = 0 \Rightarrow 1/z \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \frac{1}{1/z} \in \mathbb{R},$$

donc Q est à racines toutes réelles.

6. Supposons ici $\deg(P) = n \geq 2$ (sinon $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ est vide).

Dans toute la suite de ce corrigé, on considérera $n \geq 2$.

• En itérant la question 4, on peut démontrer par récurrence immédiate que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P^{(k)}$ est à racines toutes réelles.

• Par suite, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, comme $k-1 \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, $Q_1 = P^{(k-1)}$ est à racines toutes réelles, de degré $n - (k-1) = n - k + 1$ car $k-1 \leq n$.

Puis, d'après la question 5, $Q_2 = X^{n-k+1} Q_1(1/X)$ est à racines toutes réelles.

De plus, l'écriture (*) obtenue à la question 5 montre que Q_2 est de degré au plus égal à $\deg(Q_1) = n - k + 1$.

Enfin, $Q = Q_2^{(n-k-1)}$ est de degré

$$\begin{aligned} \deg(Q) &\leq \deg(Q_2) - (n - k - 1) \quad (\text{car on perd au moins un degré à chaque fois que l'on dérive}) \\ &\leq n - k + 1 - (n - k - 1) = 2. \end{aligned}$$

Si $Q \neq 0$, alors il est à racines toutes réelles car Q_2 l'est et on a dérivé ensuite, sans "atteindre" le polynôme nul (cf question 1).

Remarque : si $Q = 0$, en l'absence de convention sur le polynôme nul, Q n'est pas nécessairement à racines toutes réelles. Ce cas peut arriver en considérant par exemple $P = X^5$ et $k = 1$, on a $Q_1 = P^{(0)} = P$, $Q_2 = X^5 P(1/X) = 1$ et $Q = Q_2^{(3)} = 0$, donc Q n'est pas à racines toutes réelles.

Plus généralement, on aura ce problème dès que 0 sera racine de P d'ordre strictement supérieur à $k+1$.

• Dans la suite de cette question, on va supposer que Q est bien à racines toutes réelles...

Pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, comme $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, on a

$$Q_1 = P^{(k-1)} = \sum_{i=k-1}^n \frac{i!}{(i-k+1)!} a_i X^{i-k+1} = \sum_{j=0}^{n-k+1} \frac{(j+k-1)!}{j!} a_{j+k-1} X^j \quad (\text{en posant } j = i - k + 1),$$

donc

$$Q_2 = X^{n-k+1} Q_1(1/X) = \sum_{j=0}^{n-k+1} \frac{(j+k-1)!}{j!} a_{j+k-1} X^{n-k+1-j} = \sum_{i=0}^{n-k+1} \frac{(n-i)!}{(n-k+1-i)!} a_{n-i} X^i \quad (\text{en posant } i = n - k + 1 - j),$$

et, enfin,

$$\begin{aligned} Q &= Q_2^{(n-k-1)} = \sum_{i=n-k-1}^{n-k+1} \frac{(n-i)!}{(n-k+1-i)!} \frac{i!}{(i-(n-k-1))!} a_{n-i} X^{i-(n-k-1)} \\ &= \sum_{j=0}^2 \frac{(k+1-j)!}{(2-j)!} \frac{(j+n-k-1)!}{j!} a_{k+1-j} X^j \quad (\text{en posant } j = i - (n - k - 1)). \\ &= \frac{(k+1)!(n-(k+1))!}{2} a_{k+1} + \frac{k!(n-k)!}{1} a_k X + \frac{(k-1)!(n-(k-1))!}{2} a_{k-1} X^2 = n! \left(\frac{1}{2 \binom{n}{k+1}} a_{k+1} + \frac{1}{\binom{n}{k}} a_k X + \frac{1}{2 \binom{n}{k-1}} a_{k-1} X^2 \right) \end{aligned}$$

— Si $a_{k-1} = 0$, alors

$$\left(\frac{a_k}{\binom{n}{k}} \right)^2 \geq 0 = \left(\frac{a_{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \right) \left(\frac{a_{k+1}}{\binom{n}{k+1}} \right).$$

— Si $a_{k-1} \neq 0$, alors Q est un trinôme à racines réelles, donc son discriminant est positif, i.e.

$$\left(\frac{a_k}{\binom{n}{k}}\right)^2 - 4\left(\frac{a_{k-1}}{2\binom{n}{k-1}}\right)\left(\frac{a_{k+1}}{2\binom{n}{k+1}}\right) = \left(\frac{a_k}{\binom{n}{k}}\right)^2 - \left(\frac{a_{k-1}}{\binom{n}{k-1}}\right)\left(\frac{a_{k+1}}{\binom{n}{k+1}}\right) \geq 0.$$

On a donc aussi dans ce cas

$$\left(\frac{a_k}{\binom{n}{k}}\right)^2 \geq \left(\frac{a_{k-1}}{\binom{n}{k-1}}\right)\left(\frac{a_{k+1}}{\binom{n}{k+1}}\right).$$

Dans tous les cas, on a le résultat souhaité, celui-ci étant valable pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, la suite $(a_k)_{k=0, \dots, n}$ est ultra log-concave.

Si, pour certaines valeurs de k , on obtient $Q = 0$, alors avec l'expression de Q que l'on a obtenue ci-dessus (qui est toujours valable), on aura $a_{k-1} = a_k = a_{k+1} = 0$, et on a alors l'inégalité souhaitée qui reste valable.

Cette inégalité est donc valable pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, donc la suite $(a_k)_{k=0, \dots, n}$ est ultra log-concave.

7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons $h : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\alpha x} P(x)$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{\alpha x} D(e^{-\alpha x} P(x)) = e^{\alpha x} h'(x) = e^{\alpha x} (-\alpha e^{-\alpha x} P(x) + e^{-\alpha x} P'(x)) = -\alpha P(x) + P'(x),$$

donc $x \mapsto e^{\alpha x} D(e^{-\alpha x} P(x))$ est une fonction polynomiale comme combinaison linéaire de fonctions polynomiales.

• Notons $Q = -\alpha P + P'$.

En reprenant les notations de la question 4, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, α_i est racine de multiplicité n_i de P et racine de multiplicité $n_i - 1$ de P' , donc α_i est racine de multiplicité $n_i - 1$ de Q (et n'est pas racine si $n_i - 1 = 0$, même convention que dans la question 4).

De plus, pour tout $i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$, h est continue sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, dérivable sur $] \alpha_i, \alpha_{i+1}[$ et $h(\alpha_i) = h(\alpha_{i+1}) = 0$, donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $\beta_i \in] \alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tel que $h'(\beta_i) = 0$, et, par suite, $Q(\beta_i) = e^{\alpha \beta_i} h'(\beta_i) = 0$.

On a donc trouvé, comme à la question 4, au moins $n-1$ racines réelles de Q .

— Si $\alpha = 0$, alors $Q = P'$ est à racines toutes réelles d'après la question 4 (ou en notant qu'on a assez de racines réelles)

— Si $\alpha \neq 0$, alors $\deg(Q) = \deg(P) = n$.

Si $\alpha > 0$, alors $e^{-\alpha x} P(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. En appliquant la généralisation du théorème de Rolle à h sur $[\alpha_n, +\infty[$, il existe $\beta_n > \alpha_n > \beta_{n-1}$ tel que $h'(\beta_n) = 0$. On obtient ainsi une n -ième racine réelle pour Q .

Si $\alpha < 0$, on opère de même sur $] -\infty, \alpha_1]$ car alors $e^{-\alpha x} P(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

Q est donc à racines toutes réelles.

Autre version : S'il existe une racine $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ de Q , alors, comme $Q \in \mathbb{R}[X]$, $\bar{z} \neq z$ est aussi racine de Q , et on aura donc au moins 2 nouvelles racines (car les racines que l'on avait exhibées sont dans \mathbb{R} , donc différentes de z et \bar{z}). On aura donc en tout au moins $n+1$ racines de Q , polynôme de degré n , ce qui est exclu.

Q n'a donc aucune racine complexe, ce qui assure que toutes ses racines sont réelles, et donc que Q est à racines toutes réelles.

8. Notons $Q = b_m \prod_{j=1}^m (X - \beta_j)$ où β_1, \dots, β_m sont les racines de Q comptées avec multiplicité.

Alors

$$(Q(D))(P) = b_m((D - \beta_1 \text{Id}) \circ \dots \circ (D - \beta_m \text{Id}))(P).$$

Or, d'après la question précédente, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme à racines toutes réelles, alors $-\alpha P + P' = (D - \alpha \text{Id})(P)$ est à racines toutes réelles.

Par suite, en itérant, on obtient

$$(Q(D))(P) = b_m((D - \beta_1 \text{Id}) \circ \dots \circ (D - \beta_m \text{Id}))(P)$$

est à racines toutes réelles.

Rq : J'ai occulté ici le problème posé par le polynôme nul (qui peut arriver si 0 est racine multiple de Q), problème qui semble aussi avoir été occulté par le concepteur du sujet !

Quelques exemples

9. Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable sur \mathbb{R} , donc son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, ce qui assure que toutes les racines de χ_A sont réelles, donc que χ_A est à racines toutes réelles.

10. Comme A est symétrique réelle, il existe P orthogonale et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale avec sur la diagonale les valeurs propres de A , qui sont aussi les racines de χ_A , telles que $A = PD^t P$.

Comme, par hypothèse, toutes les racines de χ_A sont positives, on peut poser $D' = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, puis $C = PD'^t P$.

On vérifie alors que

$$C^2 = PD' \underbrace{D'^t P D'}_{=I} P = P(D')^2 P = PD^t P = A.$$

De plus, ${}^t C = {}^t(PD'^t P) = ({}^t P) {}^t D' P = PD'^t P = C$, donc C est symétrique.

On a donc bien trouvé une matrice $C = PD'^t P$ symétrique telle que $A = C^2$.

11. Il faut dans cette question supposer B à coefficients réels, sinon le résultat est faux (prendre $A = I_n$ et $B = iI_n$).

• Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de AB et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé (X est donc non nul).

On a donc $ABX = \lambda X$ ou encore $C^2BX = \lambda X$. En multipliant à gauche par ${}^t\overline{X}B$, on obtient

$${}^t\overline{X}BC^2BX = \lambda {}^t\overline{X}BX$$

ou encore, comme B et C sont symétriques à coefficients réels,

$${}^t(\overline{CBX})(CBX) = \lambda {}^t\overline{X}BX.$$

De manière classique, en posant $Y = CBX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on obtient ${}^t(\overline{CBX})(CBX) = \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \in \mathbb{R}$.

De plus comme B est symétrique réelle, il existe R orthogonale et $\Delta = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ diagonale réelle telles que $B = R\Delta {}^tR$.

On a donc, comme R est à coefficients réels, en posant $Z = {}^tRX = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$,

$${}^t\overline{X}BX = {}^t\overline{X}R\Delta {}^tRX = {}^t(\overline{{}^tRX})\Delta {}^tRX = {}^t\overline{Z}\Delta Z = \sum_{i=1}^n \mu_i |z_i|^2 \in \mathbb{R}.$$

Si ${}^t\overline{X}BX \neq 0$, on en déduit que $\lambda = \frac{{}^t(\overline{CBX})(CBX)}{{}^t\overline{X}BX}$ est réel en tant que quotient de deux réels.

Si ${}^t\overline{X}BX = 0$, alors $\sum_{i=1}^n |y_i|^2 = 0$, donc tous les y_i sont nuls (somme de termes positifs) et CBX est la matrice colonne nulle, donc $C(CBX) = C^2BX = \lambda X$ aussi, et comme X n'est pas la matrice colonne nulle, $\lambda = 0$ est un réel.

En conclusion, les valeurs propres de AB sont toutes réelles.

• *Autre méthode :*

Si A est inversible, alors les valeurs propres de A sont strictement positives, donc celles de C sont strictement positives ($\sqrt{\lambda}$ où λ est valeur propre de A), donc C est inversible.

Alors on a

$$C^{-1}ABC = C^{-1}C^2BC = CBC.$$

où CBC est symétrique (car ${}^t(CBC) = {}^tC {}^tB {}^tC = CBC$).

Par suite, les valeurs propres de CBC sont toutes réelles, donc, comme AB et CBC sont semblables (donc ont les mêmes valeurs propres), les valeurs propres de AB sont toutes réelles.

Si A n'est pas inversible, alors on considère $A_\varepsilon = A + \varepsilon I$.

Les valeurs propres de A_ε sont $\lambda + \varepsilon$, où $\lambda \in \text{Sp}(A)$, donc, comme $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$, A_ε a des valeurs propres strictement positives, donc est en particulier inversible.

En appliquant la méthode décrite dans le cas inversible, on exhibe une matrice $C_\varepsilon = P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1 + \varepsilon}, \dots, \sqrt{\lambda_n + \varepsilon}) {}^tP$ inversible telle que

$$C_\varepsilon^{-1}(A_\varepsilon B)C_\varepsilon = C_\varepsilon BC_\varepsilon.$$

Les matrices $A_\varepsilon B$ et $C_\varepsilon BC_\varepsilon$ sont donc semblables, donc ont le même polynôme caractéristique.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\psi : M \in \text{mathcal{M}}_n(\mathbb{R}) \mapsto \chi_M(\lambda) = \det(\lambda I - M) \in \mathbb{R}$ est continue car polynomiale en les coefficients de M .

Comme $A_\varepsilon B = AB + \varepsilon B \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} AB$, on a donc

$$\chi_{A_\varepsilon B}(\lambda) = \psi(A_\varepsilon B) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \psi(AB) = \chi_{AB}(\lambda).$$

De même, comme $C_\varepsilon BC_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} CBC$, on a

$$\chi_{C_\varepsilon BC_\varepsilon}(\lambda) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \chi_{CBC}(\lambda).$$

Par unicité de la limite de $\chi_{C_\varepsilon BC_\varepsilon}(\lambda) = \chi_{A_\varepsilon B}(\lambda)$, on a donc

$$\chi_{CBC}(\lambda) = \chi_{AB}(\lambda).$$

Ceci étant valable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\chi_{AB} = \chi_{CBC}$ et, enfin, comme CBC est symétrique réelle, χ_{CBC} est à racines toutes réelles, donc χ_{AB} aussi.

12. • Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

$x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x}$ est continue sur \mathbb{R}_+ et, par croissances comparées, $P(x)Q(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(e^{x/2})$, donc $P(x)Q(x)e^{-x} = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(e^{-x/2})$.

Or $x \mapsto e^{-x/2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ (de la forme $x \mapsto e^{-ax}$ avec $a = 1/2 > 0$), donc, par comparaison, $x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ , donc, en particulier, $\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx$ converge.

φ est donc bien définie sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$, à valeurs réelles.

• Pour tout $(P, Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q, R) &= \int_0^{+\infty} (\lambda P + Q)(x)R(x)e^{-x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} (\lambda P(x) + Q(x))R(x)e^{-x} dx \quad (\text{par linéarité de l'évaluation}) \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} P(x)R(x)e^{-x} dx + \int_0^{+\infty} Q(x)R(x)e^{-x} dx \quad (\text{par linéarité de l'intégrale convergente}) \\ &= \lambda \varphi(P, R) + \varphi(Q, R),\end{aligned}$$

donc φ est linéaire à gauche.

• Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, par symétrie du produit dans \mathbb{R} ,

$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} Q(x)P(x)e^{-x} dx = \varphi(Q, P),$$

donc φ est symétrique.

• φ est linéaire à gauche et symétrique, donc bilinéaire.

• Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(P(x))^2 e^{-x} \geq 0$, donc, par positivité de l'intégrale (qui converge et " $0 \leq +\infty$ "), on a :

$$\varphi(P, P) = \int_0^{+\infty} (P(x))^2 e^{-x} dx \geq 0.$$

• Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, supposons maintenant $\varphi(P, P) = 0$.

$x \mapsto (P(x))^2 e^{-x}$ est continue et positive sur \mathbb{R}_+ , $0 < +\infty$, et $\int_0^{+\infty} (P(x))^2 e^{-x} dx$ converge et vaut 0, donc, pour tout $x \geq 0$, $(P(x))^2 e^{-x} = 0$, donc $P(x) = 0$ (car $e^{-x} > 0$).

P a donc une infinité de racines, donc $P = 0$.

φ est donc définie positive.

• En conclusion, φ définit donc bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

13. Le procédé de Gram-Schmidt appliqué à la famille libre $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou plus précisément à toutes les familles $(1, X, \dots, X^n)$, $n \in \mathbb{N}$) assure l'existence de la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En effet :

— les polynômes obtenus seront bien deux à deux orthogonaux et normés (c'est le principe du procédé!)

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après le théorème de Gram-Schmidt, $\text{Vect}(L_0, \dots, L_n) = \text{Vect}(X^0, \dots, X^n) = \mathbb{R}_n[X]$, donc, en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_n \in \mathbb{R}_n[X]$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (L_0, \dots, L_n) est libre, donc $L_n \notin \text{Vect}(L_0, \dots, L_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc L_n est bien de degré exactement n .

Enfin, pour $n = 0$, $L_0 = \frac{1}{\|1\|} 1$ est bien de degré 0.

14. Soit $n \geq 1$, et supposons par l'absurde que L_n n'est pas à racines toutes réelles, donc il a $0 \leq r \leq n - 1$ racines réelles (comptées avec multiplicité) notées $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.

Notons aussi $a_n \neq 0$ le coefficient dominant de L_n .

Posons alors $P = a_n \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)$, si $r \geq 1$ et $P = a_n$ si $r = 0$. $P \in \mathbb{R}_r[X]$.

Comme, d'après le procédé de Gram-Schmidt, $\text{Vect}(L_0, \dots, L_r) = \text{Vect}(1, X, \dots, X^r) = \mathbb{R}_r[X]$, il existe $(b_0, \dots, b_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^r b_k L_k$.

On a alors

$$\varphi(L_n, P) = \varphi(L_n, \sum_{k=0}^r b_k L_k) = \sum_{k=0}^r b_k \underbrace{\varphi(L_n, L_k)}_{=0 \text{ car } n \neq k} = 0.$$

Or, par construction, il existe Q tel que $L_n = P(X)Q(X)$ où Q est unitaire de degré au moins 1 et n'a pas de racines réelles, donc Q est de signe constant sur \mathbb{R} (car sinon, le théorème des valeurs intermédiaires permettrait de montrer qu'il a au moins une racine réelle) et, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} Q(x) = +\infty$ (car Q est unitaire non constant), Q est positif sur \mathbb{R} .

On a donc

$$\varphi(P, L_n) = \int_0^{+\infty} P(x)L_n(x)e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} a_n^2 \prod_{i=1}^r (x - \alpha_i)^2 Q(x)e^{-x} dx > 0,$$

car la fonction $x \mapsto a_n^2 \prod_{i=1}^r (x - \alpha_i)^2 Q(x)e^{-x}$ est continue positive non identiquement nulle sur \mathbb{R}_+ , $0 < +\infty$ et l'intégrale converge. On a une contradiction.

D'où, par l'absurde, L_n est à racines toutes réelles.

15. Attention à ne pas dire de bêtises... Les B_i sont des variables de Bernoulli indépendantes, mais pas de même paramètre. On n'a donc pas $B \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$...

Comme $B(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$ (car $B_i(\Omega) = \{0, 1\}$),

$$x \mapsto P(x) = \sum_{k=0}^n P(B = k)x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} P(B = k)x^k$$

est la série génératrice de B , notée G_B .

Or les B_i sont indépendantes, donc on a aussi

$$G_B = \prod_{i=1}^n G_{B_i},$$

et, comme

$$G_{B_i} : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} P(B_i = k)x^k = P(B_i = 0) + P(B_i = 1)x \quad (\text{car } B_i(\Omega) = \{0, 1\}),$$

on a

$$P(x) = G_B(x) = \prod_{i=1}^n G_{B_i}(x) = \prod_{i=1}^n (P(B_i = 0) + P(B_i = 1)x),$$

ce qui assure que P a toutes ses racines réelles (et ses racines sont $\left(\frac{P(B_i = 0)}{P(B_i = 1)}\right)_{i=1, \dots, n}$).

16. • $p_k \geq 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. De plus, $1 = P(1) = \sum_{k=0}^n p_k$, donc les p_k ne sont pas tous nuls et $0 \leq p_k \leq 1$.

Par suite, pour tout $a > 0$, $P(a) = \sum_{k=0}^n p_k a^k > 0$ comme somme de positifs non tous nuls.

Les racines réelles de P sont donc négatives.

• Quitte à changer la valeur de n , on va supposer $p_n \neq 0$ (possible car au moins un des p_k est non nul d'après le premier point).

Comme on a supposé que P à racines toutes réelles, il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$P = p_n \prod_{i=1}^n (X - a_i)$$

et, d'après le premier point, tous les a_i sont négatifs ou nuls.

Comme $-a_i \geq 0$, on a $1 - a_i \geq 1 > 0$, donc $-a_i = \frac{-a_i}{1} = \frac{-a_i/(1 - a_i)}{1/(1 - a_i)} = \frac{q_i}{r_i}$ où $q_i = \frac{-a_i}{1 - a_i} \in [0, 1]$, $r_i = \frac{1}{1 - a_i} \in]0, 1]$ et $r_i + q_i = 1$.

Considérons alors n variables aléatoires indépendantes de Bernoulli $B_i \hookrightarrow \mathcal{B}(r_i)$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Posons aussi $B = \sum_{i=1}^n B_i$.

Alors on a

$$G_B(x) = \prod_{i=1}^n G_{B_i}(x) = \prod_{i=1}^n (r_i x + q_i) = \prod_{i=1}^n r_i \prod_{i=1}^n \left(x + \frac{q_i}{r_i}\right) = \prod_{i=1}^n r_i \prod_{i=1}^n (x - a_i) = \frac{\prod_{i=1}^n r_i}{p_n} P(x).$$

De plus, comme G_B est une série génératrice, $G_B(1) = 1$, donc on a

$$1 = G_B(1) = \frac{\prod_{i=1}^n r_i}{p_n} P(1) = \frac{\prod_{i=1}^n r_i}{p_n},$$

donc on a $G_B(x) = P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Or on a aussi $G_B(x) = \sum_{k=0}^n P(B = k)x^k$, donc, par identification des coefficients de même degré des fonctions polynomiales G_B et P , on a, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $p_k = P(B = k)$.

Théorème de Hermite-Sylvester

17. • Comme la somme des multiplicités des racines complexes de P est égale à $n = \deg(P)$, on a

$$r + 2s \leq \sum_{i=1}^r 1 + \sum_{i=1}^s 2 \leq \sum_{i=1}^r m_i + \sum_{i=1}^s (n_i + n_i) = n.$$

• Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \delta_1, \gamma_1, \dots, \delta_s, \gamma_s) \in \mathbb{C}^{r+2s}$ tel que

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \varphi_i + \sum_{i=1}^s \delta_i \psi_i + \sum_{i=1}^s \gamma_i \bar{\psi}_i = 0.$$

Alors, en notant (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{C}^n , on a, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$0 = \sum_{i=1}^r \lambda_i \varphi_i(e_j) + \sum_{i=1}^s \delta_i \psi_i(e_j) + \sum_{i=1}^s \gamma_i \bar{\psi}_i(e_j),$$

i.e.

$$0 = \sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_i^{j-1} + \sum_{i=1}^s \delta_i \beta_i^{j-1} + \sum_{i=1}^s \gamma_i \bar{\beta}_i^{j-1} \quad (L_j).$$

Le système obtenu en prenant L_1, \dots, L_{r+2s} (possible car $r + 2s \leq n$) s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{\beta_1} & \cdots & \frac{1}{\beta_s} \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_r & \beta_1 & \cdots & \beta_s & \frac{\beta_1}{\beta_1^2} & \cdots & \frac{\beta_s}{\beta_s^2} \\ \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_r^2 & \beta_1^2 & \cdots & \beta_s^2 & \frac{\beta_1^2}{\beta_1^2} & \cdots & \frac{\beta_s^2}{\beta_s^2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{r+2s-1} & \cdots & \alpha_r^{r+2s-1} & \beta_1^{r+2s-1} & \cdots & \beta_s^{r+2s-1} & \frac{\beta_1^{r+2s-1}}{\beta_1^{r+2s-1}} & \cdots & \frac{\beta_s^{r+2s-1}}{\beta_s^{r+2s-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_s \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_s \end{pmatrix} = 0.$$

On reconnaît dans la matrice du système la matrice de Vandermonde $V(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s, \overline{\beta_1}, \dots, \overline{\beta_s})$ qui est inversible car ces paramètres sont deux à deux distincts, donc on obtient $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = \delta_1 = \dots = \delta_s = \gamma_1 = \dots = \gamma_s = 0$, donc la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_r, \psi_1, \overline{\psi_1}, \dots, \psi_s, \overline{\psi_s})$ est libre.

18. Pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$,

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_n)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i \alpha_k^{i-1} \right)^2 = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \alpha_k^{i+j-2}.$$

De même, pour tout $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$,

$$\psi_k(x_1, \dots, x_n)^2 = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \beta_k^{i+j-2} \quad \text{et} \quad \overline{\psi_k}(x_1, \dots, x_n)^2 = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \overline{\beta_k}^{i+j-2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} q(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{k=1}^r m_k \varphi_k(x_1, \dots, x_n)^2 + \sum_{k=1}^s n_k (\psi_k(x_1, \dots, x_n)^2 + \overline{\psi_k}(x_1, \dots, x_n)^2) \\ &= \sum_{k=1}^r \sum_{i,j=1}^n x_i x_j m_k \alpha_k^{i+j-2} + \sum_{k=1}^s \sum_{i,j=1}^n x_i x_j n_k \beta_k^{i+j-2} + \sum_{k=1}^s \sum_{i,j=1}^n x_i x_j n_k \overline{\beta_k}^{i+j-2} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(x_i x_j \sum_{k=1}^r m_k \alpha_k^{i+j-2} \right) + \sum_{i,j=1}^n \left(x_i x_j \sum_{k=1}^s n_k \beta_k^{i+j-2} \right) + \sum_{i,j=1}^n \left(x_i x_j \sum_{k=1}^s n_k \overline{\beta_k}^{i+j-2} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(x_i x_j \left(\sum_{k=1}^r m_k \alpha_k^{i+j-2} + \sum_{k=1}^s n_k \beta_k^{i+j-2} + \sum_{k=1}^s n_k \overline{\beta_k}^{i+j-2} \right) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i x_j s_{i+j-2}. \end{aligned}$$

19. Si P est à racines toutes réelles, alors $s = 0$, donc, d'après le calcul fait à la question précédente, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n s_{i+j-2} x_i x_j = \sum_{k=1}^r \underbrace{m_k}_{\geq 0} \underbrace{\varphi_k(x_1, \dots, x_n)^2}_{\geq 0} \geq 0,$$

car $\varphi_k(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$, donc son carré est positif.

20. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \delta_1, \gamma_1, \dots, \delta_s, \gamma_s) \in \mathbb{R}^{r+2s}$ tel que

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j \varphi_j + \sum_{j=1}^s \delta_j \operatorname{Re}(\psi_j) + \sum_{j=1}^s \gamma_j \operatorname{Im}(\psi_j) = 0.$$

Alors, comme $\operatorname{Re}(\psi_j) = \frac{1}{2}(\psi_j + \overline{\psi_j})$ et $\operatorname{Im}(\psi_j) = \frac{1}{2i}(\psi_j - \overline{\psi_j})$, on a :

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j \varphi_j + \sum_{j=1}^s \left(\frac{\delta_j}{2} - \frac{i\gamma_j}{2} \right) \psi_j + \sum_{j=1}^s \left(\frac{\delta_j}{2} + \frac{i\gamma_j}{2} \right) \overline{\psi_j} = 0,$$

donc, d'après la question 17,

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_r = \frac{\delta_1}{2} - \frac{i\gamma_1}{2} = \dots = \frac{\delta_s}{2} - \frac{i\gamma_s}{2} = \frac{\delta_1}{2} + \frac{i\gamma_1}{2} = \dots = \frac{\delta_s}{2} + \frac{i\gamma_s}{2} = 0.$$

En effet, les arguments utilisés dans la question 17 restent valables car on peut toujours évaluer en e_j , qui est un vecteur de \mathbb{R}^n .

Enfin, pour tout $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$, comme $\frac{\delta_j}{2} + \frac{i\gamma_j}{2} = 0$ où δ_j et γ_j sont réels, on obtient, en identifiant partie réelle et partie imaginaire,

$$\delta_j = \gamma_j = 0.$$

La famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_r, \operatorname{Re}(\psi_1), \operatorname{Im}(\psi_1), \dots, \operatorname{Re}(\psi_s), \operatorname{Im}(\psi_s))$ est donc bien \mathbb{R} -libre.

21. On a supposé $r < n$, et donc $s \geq 1$, car $s \in \mathbb{N}$ et $r + 2s = n$, donc $s = \frac{n-r}{2} > 0$.

Comme proposé par l'énoncé, soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(\psi_1)(x_1, \dots, x_n) \neq 0 \\ \forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad \varphi_j(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \forall j \in \llbracket 1, s \rrbracket, \quad \operatorname{Re}(\psi_j)(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \forall j \in \llbracket 2, s \rrbracket, \quad \operatorname{Im}(\psi_j)(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} .$$

Alors

$$\begin{aligned} q(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i,j=1}^n s_{i+j-2} x_i x_j \\ &= \sum_{k=1}^r m_k \varphi_k(x_1, \dots, x_n)^2 + \sum_{k=1}^s n_k (\psi_k(x_1, \dots, x_n)^2 + \overline{\psi_k}(x_1, \dots, x_n)^2) \quad (\text{d'après la question 18}) \\ &= \sum_{k=1}^r m_k \varphi_k(x_1, \dots, x_n)^2 + \sum_{k=1}^s n_k (2(\operatorname{Re}(\psi_k)(x_1, \dots, x_n))^2 - 2(\operatorname{Im}(\psi_k)(x_1, \dots, x_n))^2) \\ &= 0 + n_1 (0 - 2(\operatorname{Im}(\psi_1)(x_1, \dots, x_n))^2) + 0 \\ &= -2 \underbrace{n_1}_{>0} \underbrace{(\operatorname{Im}(\psi_1)(x_1, \dots, x_n))^2}_{>0} < 0 \end{aligned}$$

car $(\operatorname{Im}(\psi_1)(x_1, \dots, x_n))^2$ est le carré d'un réel non nul.

On a donc prouvé que

$$P \text{ n'est pas à racines toutes réelles} \Rightarrow \exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : q(x_1, \dots, x_n) < 0,$$

donc, par contraposé, on a :

$$(\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, q(x_1, \dots, x_n) \geq 0) \Rightarrow P \text{ est à racines toutes réelles.}$$

On a prouvé l'autre implication dans la question 19, donc on a bien l'équivalence souhaitée.

Suite multiplicative de Polya-Schur

Etant donné une suite réelle $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on considère l'opérateur $\Gamma : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ défini par la formule

$$\Gamma \left(\sum_{k=0}^n a_k X^k \right) = \sum_{k=0}^n \gamma_k a_k X^k.$$

Une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite multiplicative au sens de Polya-Schur si l'opérateur Γ préserve l'ensemble des polynômes à racines toutes réelles, i.e. si P a toutes ses racines réelles alors $\Gamma(P)$ aussi.

22. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme à racines toutes réelles. On a

$$\Gamma(P) = \sum_{k=0}^n \gamma_k a_k X^k = \sum_{k=0}^n k a_k X^k = \sum_{k=1}^n k a_k X^k = X \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} = X P'(X).$$

Or, d'après la question 4, P' est à racines toutes réelles, et, comme $\Gamma(P) = X P'$, les racines de $\Gamma(P)$ sont 0 et les racines de P' , donc sont aussi toutes réelles.

La suite définie par $\gamma_n = n$ est donc bien multiplicative au sens de Polya-Schur.

23. Soit $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ une suite multiplicative au sens de Polya-Schur et $k \in \mathbb{N}$.

Posons $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\gamma_{n+k})_{n \in \mathbb{N}}$ et $\Psi \left(\sum_{j=0}^n a_j X^j \right) = \sum_{j=0}^n \psi_j a_j X^j$. Soit P un polynôme à racines toutes réelles, et montrons que $\Psi(P)$ est encore à racines toutes réelles.

Soit $Q = X^k P = \sum_{j=k}^{n+k} a_{j-k} X^j$. Les racines de Q sont 0 (k fois) et les racines de P (qui sont toutes réelles et peuvent éventuellement être aussi nulles), donc Q est un polynôme à racines toutes réelles.

Comme $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur,

$$\Gamma(Q) = \sum_{j=k}^{k+n} \gamma_j a_{j-k} X^j = \sum_{j=0}^n \gamma_{k+j} a_j X^{k+j} = X^k \sum_{j=0}^n \psi_j a_j X^j = X^k \Psi(P)$$

est à racines toutes réelles, donc $\Psi(P)$ aussi (car les racines de $\Psi(P)$ sont celles de $\Gamma(Q)$ auxquelles on a enlevé k fois la valeur zéro).

$(\gamma_{n+k})_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bien multiplicative au sens de Polya-Schur.

24. Soit $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ une suite non nulle, multiplicative au sens de Polya-Schur et telle qu'il existe $k > 0$ tel que $\gamma_k = 0$ avec $\gamma_{k-1} \neq 0$.

* • $P = (1 + X)^{k+1}$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, donc à racines toutes réelles.

Comme $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur, $\Gamma(P)$ est aussi à racines toutes réelles.

De plus,

$$\Gamma(P) = \Gamma\left(\sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} X^i\right) = \sum_{i=0}^{k+1} \gamma_i \binom{k+1}{i} X^i,$$

donc, d'après la question 6, $\left(\gamma_i \binom{k+1}{i}\right)_{i=0, \dots, k+1}$ est ultra log-concave, donc, $\left(\frac{\gamma_i \binom{k+1}{i}}{\binom{k+1}{i}}\right)_{i=0, \dots, k+1} = (\gamma_i)_{i=0, \dots, k+1}$ est

log-concave (par définition d'une suite ultra log-concave).

On a donc $\gamma_{j-1}\gamma_{j+1} \leq \gamma_j^2$ pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, donc, en particulier, pour $j = k$,

$$\gamma_{k-1}\gamma_{k+1} \leq \gamma_k^2 = 0.$$

• Soit à présent $P = X^{k+1} - X^{k-1} = X^{k-1}(X^2 - 1) = X^{k-1}(X - 1)(X + 1)$.

P est à racines toutes réelles, donc $\Gamma(P)$ aussi.

Or $\Gamma(P) = \gamma_{k+1}X^{k+1} - \gamma_{k-1}X^{k-1} = X^{k-1}(\gamma_{k+1}X^2 - \gamma_{k-1})$, donc $\gamma_{k+1}X^2 - \gamma_{k-1}$ est un trinôme qui a ses racines réelles.

Son discriminant est donc positif, i.e.

$$4\gamma_{k-1}\gamma_{k+1} \geq 0 \Leftrightarrow \gamma_{k-1}\gamma_{k+1} \geq 0.$$

• On a donc, par double-inégalité, $\gamma_{k-1}\gamma_{k+1} = 0$, donc, comme $\gamma_{k-1} \neq 0$, on a $\gamma_{k+1} = 0$.

* Supposons qu'il existe $m \geq k$ tel que $\gamma_m \neq 0$ et posons alors

$$m = \min\{j \geq k : \gamma_j \neq 0\}.$$

m existe comme minimum d'un ensemble d'entiers naturels non vide.

De plus, par définition de m , on a $\gamma_m \neq 0$ et, pour tout $j \in \llbracket k, m-1 \rrbracket$, $\gamma_j = 0$.

Comme on a de plus $\gamma_k = \gamma_{k+1} = 0$, on a $m \geq k+2$.

Considérons le polynôme $P = (1 + X)^m$, à racines toutes réelles. On a donc $\Gamma(P)$ à racines toutes réelles, où

$$\Gamma(P) = \Gamma\left(\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} X^i\right) = \sum_{i=0}^m \gamma_i \binom{m}{i} X^i.$$

Notons x_1, x_2, \dots, x_m les racines (réelles) de $\Gamma(P)$.

D'après l'expression rappelée dans l'énoncé, on a :

$$\left(\gamma_{m-1} \binom{m}{m-1}\right)^2 - 2\left(\gamma_m \binom{m}{m}\right)\left(\gamma_{m-2} \binom{m}{m-2}\right) = \left(\gamma_m \binom{m}{m}\right)^2 \sum_{k=1}^m x_k^2,$$

ie, comme $\gamma_{m-1} = \gamma_{m-2} = 0$ (car, comme $m \geq k+2$, on a $m-1 \in \llbracket k, m-1 \rrbracket$ et $m-2 \in \llbracket k, m-1 \rrbracket$),

$$0 = \gamma_m^2 \sum_{k=1}^m x_k^2.$$

Par suite, comme $\gamma_m \neq 0$ (par définition de m), on a $\sum_{k=1}^m x_k^2 = 0$, donc, comme $x_k^2 \geq 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ (comme carré d'un nombre réel), on a $x_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ (car une somme de positifs est nul si et seulement si tous ses termes sont nuls). Par suite, $\Gamma(P)$ a une seule racine, 0, d'ordre m , donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\Gamma(P) = aX^m$.

Or $\gamma_{k-1} \neq 0$, donc le coefficient du terme d'indice $k-1$ de $\Gamma(P)$, $\gamma_{k-1} \binom{m}{k-1}$, est non nul, ce qui est en contradiction avec l'égalité $\Gamma(P) = aX^m$.

D'où, par l'absurde, pour tout $m \geq k$, $\gamma_m = 0$.

25. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Comme dans la question précédente, $P = X^{k+1} - X^{k-1} = X^{k-1}(X - 1)(X + 1)$ est à racines toutes réelles, donc $\Gamma(P)$ aussi.

Or $\Gamma(P) = X^{k-1}(\gamma_{k+1}X^2 - \gamma_{k-1})$, donc $\gamma_{k+1}X^2 - \gamma_{k-1}$ est à racines toutes réelles. Par suite, on a $4\gamma_{k-1}\gamma_{k+1} \geq 0$, donc $\gamma_{k-1}\gamma_{k+1} \geq 0$, et comme on a supposé que la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule jamais, on a $\gamma_{k-1}\gamma_{k+1} > 0$, donc γ_{k+1} et γ_{k-1} sont de même signe.

La suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de signe constant (si γ_0 et γ_1 sont de même signe) ou alternée (si γ_0 et γ_1 sont de signe opposé).

Théorème de Polya-Schur

26. $P = (1 + X)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k$ est à racines toutes réelles.

Comme $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur,

$$Q_n(X) = \sum_{k=0}^n \gamma_k \binom{n}{k} X^k = \Gamma(P)$$

est aussi à racines toutes réelles.

De plus, pour tout $a > 0$,

$$Q_n(a) = \sum_{k=0}^n \underbrace{\gamma_k}_{>0} \underbrace{\binom{n}{k}}_{>0} \underbrace{a^k}_{>0} > 0,$$

donc, en particulier, a n'est pas racine de Q_n , ce qui assure que toutes les racines de Q_n sont (réelles et) négatives.

27. Pas trouvée.

28. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n = \sum_{k=0}^n \gamma_k \binom{n}{k} X^k$ est à racines toutes réelles (d'après la question 26). D'où, d'après la question 6,

$\left(\gamma_k \binom{n}{k}\right)_{k=0, \dots, n}$ est ultra log-concave, donc, $\left(\frac{\gamma_k \binom{n}{k}}{\binom{n}{k}}\right)_{k=0, \dots, n} = (\gamma_k)_{k=0, \dots, n}$ est log-concave (par définition d'une suite ultra log-concave), donc

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \gamma_k^2 \geq \gamma_{k+1} \gamma_{k-1}.$$

Ceci étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien :

$$\forall k \geq 1, \quad \gamma_k^2 \geq \gamma_{k+1} \gamma_{k-1},$$

i.e. $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est log-concave.

29. • Comme on a supposé $\gamma_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\gamma_k^2 \geq \gamma_{k+1} \gamma_{k-1} \Rightarrow \frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}} \geq \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k},$$

ceci étant valable pour tout $k \geq 1$.

La suite $\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}}\right)_{k \geq 1}$ est donc décroissante et positive, donc minorée par 0, donc elle admet une limite $\ell \geq 0$.

• Posons, pour tout $x \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = \gamma_n x^n \neq 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell |x|.$$

Par suite,

— si $\ell = 0$, alors, d'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques, comme $\ell |x| = 0 < 1$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ converge absolument pour tout $x \neq 0$, donc $\sum_{n \geq 0} \gamma_n x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

— si $\ell > 0$, alors d'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques, comme $\ell |x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1/\ell$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ converge absolument pour tout $|x| < 1/\ell$ et diverge grossièrement pour tout $|x| > 1/\ell$, donc $\sum_{n \geq 0} \gamma_n x^n$ a pour rayon de convergence $1/\ell > 0$.

Dans tous les cas, $\sum_{n \geq 0} \gamma_n x^n$ a bien un rayon de convergence strictement positif, que l'on note R dans la suite.

30. • Posons, pour tout $x \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n(x) = \frac{\gamma_n}{n!} x^n \neq 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{v_{n+1}(x)}{v_n(x)} \right| = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} |x| \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques, comme $0 < 1$, la série $\sum_{n \geq 0} v_n(x)$ converge absolument pour tout $x \neq 0$, donc $\sum_{n \geq 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

• Notons f la somme de la série entière. On souhaite montrer que l'on peut trouver une suite de fonctions polynomiales, à racines toutes réelles négatives, qui converge uniformément sur tout segment de \mathbb{R} vers f ...

Non trouvée...

31. Non cherchée