

SESSION DE 1991

**concours interne
de recrutement de professeurs certifiés
et concours d'accès à l'échelle de rémunération**

section : mathématiques

première composition de mathématiques

Durée : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche – éventuellement programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

*Matériel à fournir : feuilles de papier quadrillé 5 × 5.
feuilles de papier millimétré.*

Ce problème propose l'étude de suites de nombres réels et de suites de nombres complexes définies par des relations de récurrence analogues (parties I et III).

La partie II rattache au nombre π certaines des suites étudiées au I et donne des méthodes de calcul approché de π .

Dans la partie III, on définit les fonctions racine carrée et argument cosinus hyperbolique sur \mathbb{C} , corps des nombres complexes, fonctions que l'on utilise dans l'étude des suites complexes envisagées.

I. ÉTUDE DE SUITES RÉELLES

L'objectif de cette partie est l'étude de suites adjacentes.

1. On désigne par $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de réels définie par la relation de récurrence :

$$(1) \quad C_{n+1} = \sqrt{\frac{1+C_n}{2}}$$

et la donnée de son premier terme C_0 , $C_0 \geq -1$.

a. Construire, dans un repère orthonormal, la courbe représentative de la fonction f définie sur

l'intervalle $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

b. Étudier, suivant la valeur de C_0 , le comportement de la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$: monotonie, convergence, limite.

Chaque cas sera illustré par un graphique.

2. On définit deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs par les relations de récurrence :

$$(2) \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \sqrt{b_n a_{n+1}} \end{cases}$$

et la donnée des premiers termes a_0 et b_0 strictement positifs.

A SUIVRE

- a. Étudier le cas $a_0 = b_0$. Dans la suite, on suppose $a_0 \neq b_0$.
 b. Proposer une construction géométrique de a_1 et b_1 connaissant a_0 et b_0 dans chacun des cas $a_0 < b_0$ et $a_0 > b_0$.
 c. Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

3. Suite auxiliaire.

On pose, pour tout entier naturel n , $\gamma_n = \frac{a_n}{b_n}$.

Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence (1) et que, pour tout entier naturel n , $b_{n+1} = b_n \gamma_{n+1}$.

4. Limite des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a. On suppose $a_0 < b_0$.

Soit α le réel compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ défini par $\gamma_0 = \cos \alpha$.

Montrer que :

$$\gamma_1 = \cos \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad b_1 = b_0 \frac{\sin \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

Donner les expressions, en fonction de n , α et b_0 , de γ_n , b_n et a_n .

Montrer que la limite commune aux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $b_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha}$.

b. On suppose $a_0 > b_0$.

Soit α le réel positif défini par $\gamma_0 = \operatorname{ch} \alpha$. Par une démarche analogue à la précédente, déterminer la limite commune aux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On rappelle que, pour tout réel α ,

$$\operatorname{ch} \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha}), \quad \operatorname{sh} \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha}), \quad \operatorname{sh} \alpha = 2 \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}, \quad \operatorname{ch} \alpha = 2 \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2} - 1.$$

5. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = \frac{a_{n+1}}{2} (b_n - a_n).$$

En déduire, dans le cas où $a_0 < b_0$, que, pour tout entier naturel n ,

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{4} (b_n - a_n) \quad \text{puis que} \quad b_n - a_n \leq \frac{1}{4^n} (b_0 - a_0).$$

6. On prend :

$$a_0 = \frac{1}{3\sqrt{3}}, \quad b_0 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

et on pose, pour tout entier naturel n ,

$$p_n = \frac{1}{b_n} \quad \text{et} \quad P_n = \frac{1}{a_n}.$$

a. En utilisant l'algorithme décrit au 3. et en s'aidant de la calculatrice, calculer p_n et P_n pour les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 de n . On en donnera des valeurs approchées à 10^{-4} près que l'on présentera dans un tableau.

Montrer que les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers π .

b. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq P_n - p_n \leq \frac{1}{4^n} \times 3\sqrt{3} \quad \text{puis que} \quad 0 \leq \pi - p_n \leq \frac{1}{4^n} \times 3\sqrt{3}.$$

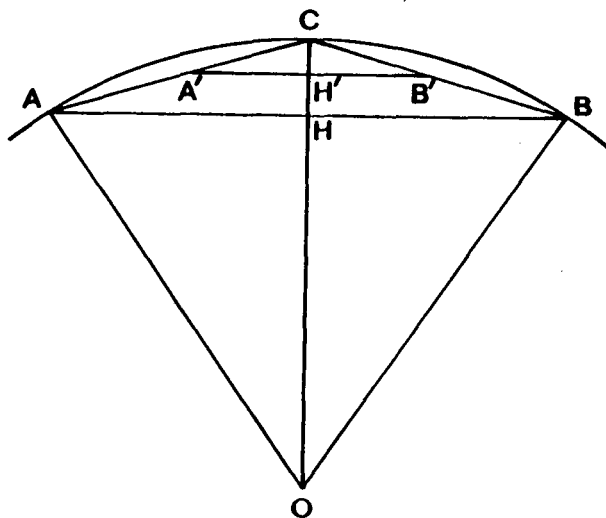
À partir de quel rang n_0 est-on assuré que p_n approche π à moins de 10^{-8} près ?

II. CALCUL APPROCHÉ DE π PAR LA MÉTHODE D'ARCHIMÈDE

A. Interprétation géométrique des suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. On désigne par r_k et R_k le rayon respectivement du cercle inscrit et du cercle circonscrit à un polygone convexe régulier à k côtés de périmètre 2. Utilisant la configuration ci-dessous où la corde AB du cercle de centre O représente le côté de ce polygone convexe régulier à k côtés, où C est le milieu de l'arc AB, A' et B' les milieux des segments [AC] et [BC], H et H' les intersections de la droite (OC) avec les droites (AB) et (A'B'), établir qu'on a, pour $k \geq 3$,

$$(3) \quad 2r_{2k} = r_k + R_k \quad \text{et} \quad R_{2k}^2 = r_{2k} R_k.$$



2. On désigne par I_k et L_k les demi-périmètres des polygones convexes réguliers à k côtés respectivement inscrit et circonscrit au cercle unité.

En utilisant une homothétie convenable, montrer que :

$$I_k = \frac{1}{R_k}, \quad L_k = \frac{1}{r_k}.$$

Déduire de (3) qu'on a, pour $k \geq 3$,

$$(4) \quad \frac{1}{L_{2k}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L_k} + \frac{1}{I_k} \right) \quad \text{et} \quad I_{2k} = \sqrt{L_{2k} I_k}$$

3. Établir, indépendamment des résultats précédents, qu'on a pour $k \geq 3$,

$$(5) \quad I_k = k \sin \frac{\pi}{k} \quad \text{et} \quad L_k = k \tan \frac{\pi}{k}.$$

4. Comment rattacher à cette étude celle des suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies au paragraphe I.6. ?

B. Accélération de la convergence

Les notations sont celles du paragraphe I.6.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$p_n = 3 \times 2^n \sin \frac{\pi}{3 \times 2^n} \quad \text{et} \quad P_n = 3 \times 2^n \tan \frac{\pi}{3 \times 2^n}.$$

2. Déterminer les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$ telles que :

$$p_n = \pi + \frac{\lambda_1}{4^n} + \frac{\lambda_2}{4^{2n}} + \frac{\lambda_3}{4^{3n}} + o\left(\frac{1}{4^{3n}}\right)$$

$$P_n = \pi + \frac{\mu_1}{4^n} + \frac{\mu_2}{4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right).$$

On rappelle, qu'au voisinage de 0,

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + o(u^7)$$

$$\operatorname{tg} u = u + \frac{u^3}{3} + \frac{2}{15} u^5 + o(u^5).$$

3. On pose :

$$u_n = \frac{1}{3} (2p_n + P_n)$$

$$v_n = \frac{1}{3} (4p_{n+1} - p_n).$$

Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$u_n - \pi \sim \frac{\pi^5}{5 \times 3^4 \times 4^{2n+1}} \quad \text{et} \quad v_n - \pi \sim \frac{-\pi^5}{5!} \frac{1}{3^4 \times 4^{2n+1}}.$$

4. À partir du tableau dressé au paragraphe I.6., donner des valeurs approchées de u_n et v_n pour les valeurs 1, 2, 3, 4 de n en précisant l'approximation. On présentera les résultats dans un nouveau tableau.

5. À partir de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, construire une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ permettant une nouvelle amélioration de la convergence, en définissant w_n comme barycentre de v_n et v_{n+1} avec des coefficients indépendants de n .

III. ÉTUDE DE SUITES DE NOMBRES COMPLEXES

Définition préliminaire. On prolonge à \mathbb{C} la définition de la racine carrée d'un nombre réel positif de la manière suivante :

- si z est réel négatif, on pose $\sqrt{z} = i\sqrt{|z|}$ (ainsi $\sqrt{-1} = i$),
- sinon \sqrt{z} est le nombre complexe de carré z dont la partie réelle est positive.

Vérifier que, dans ce dernier cas,
$$\sqrt{z} = \frac{z + |z|}{\sqrt{z + z + 2|z|}}.$$

Le plan \mathcal{P} orienté est muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère dans ce plan les points A, M, N d'affixes respectives 1, z , \sqrt{z} .

Pour z non nul, vérifier l'égalité $(\vec{OA}, \vec{ON}) = (\vec{ON}, \vec{OM}) (2\pi)$.

Montrer que le point N appartient à l'angle saillant \widehat{AOM} .

On désigne par $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de complexes définie par la relation de récurrence

$$\gamma_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + \gamma_n}{2}}$$

et la donnée de son premier terme $\gamma_0, \gamma_0 \neq 1$, et par $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites de complexes définies par leurs premiers termes $a_0 = \gamma_0, b_0 = 1$ et les relations de récurrence :

$$b_{n+1} = b_n \gamma_{n+1}, \quad a_{n+1} = b_{n+1} \gamma_{n+1}.$$

A. Étude des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. Vérifier, pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} (a_n + b_n), \quad b_{n+1} = b_n a_{n+1}.$$

2. Exemple :

On choisit ici $\gamma_0 = -1 + 4i$. Calculer, avec éventuellement une précision de 10^{-3} sur les parties réelles et imaginaires, les termes $\gamma_1, \gamma_2, a_1, a_2, b_1, b_2$ de ces suites et placer dans le plan \mathcal{P} les points $A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2$ d'affixes respectives $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2$.

3. Pour étudier la convergence des suites $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il est commode, par extension de l'étude faite dans le cas réel au paragraphe I.4., d'introduire les fonctions hyperboliques sur \mathbb{C} .

Pour tout complexe z , de partie réelle x et de partie imaginaire y , on pose :

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y), \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} z &= \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y; \\ \operatorname{sh} z &= \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y; \\ \operatorname{ch} 2z &= 2 \operatorname{ch}^2 z - 1, \quad \operatorname{sh} 2z = 2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z, \quad |\operatorname{ch} z|^2 = \operatorname{ch}^2 x + \cos^2 y - 1. \end{aligned}$$

(Il est inutile de vérifier ces résultats qui seront admis.)

a. Soit γ un nombre complexe.

Montrer que, si z est solution sur \mathbb{C} de l'équation $\gamma = \operatorname{ch} z$, e^z prend l'une ou l'autre de deux valeurs Z_1 et Z_2 inverses l'une de l'autre.

Montrer que l'équation $\gamma = \operatorname{ch} z$ a une solution et une seule $z = x + iy$ pour laquelle :

$$(x, y) \in (\mathbb{R}^+, \times]-\pi, \pi]) \cup (\{0\} \times]0, \pi]).$$

Cette solution est notée $\operatorname{Arg} \operatorname{ch} \gamma$.

Étudier le cas où γ est réel.

b. On pose $z_0 = \operatorname{Arg} \operatorname{ch} \gamma_0$ (on a supposé γ_0 différent de 1 donc z_0 n'est pas nul).

Montrer, pour tout naturel n :

$$\gamma_n = \operatorname{ch} \frac{z_0}{2^n}, \quad b_n = \frac{\operatorname{sh} z_0}{2^n \operatorname{sh} \frac{z_0}{2^n}}$$

et vérifier :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{ch} \frac{z_0}{2^n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2^n \operatorname{sh} \frac{z_0}{2^n} \right) = z_0.$$

Conclure : les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont même limite L .

Retrouver, pour γ_0 réel convenable, les résultats du paragraphe I.4.

B. Étude des suites des arguments

On pose $z_0 = u + iv$ où u et v sont des nombres réels. On désigne par A_n et B_n les images respectives de a_n et b_n dans le plan \mathcal{P} .

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , A_{n+1} se trouve dans l'angle saillant $\widehat{A_n O B_n}$.

2. Pour tout nombre complexe Z non nul, on note $\text{Arg } Z$ l'argument de Z appartenant à l'intervalle $] -\pi, \pi]$.
Ainsi, en se reportant à la définition de z_0 , on constate que $\text{Arg } e^{z_0} = v$.

Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$|\text{Arg } \gamma_n| \leq \frac{\pi}{2^n}$$

et que $\text{Arg } \gamma_n$ a même signe que v .

3. Montrer que, pour tout entier naturel n , B_{n+1} se trouve dans l'angle saillant $\widehat{A_{n+1}OB_n}$.
4. Préciser le comportement des deux suites $(\text{Arg } a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\text{Arg } b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
5. Dans le cas où $|\text{Arg } \gamma_0| \leq \frac{\pi}{2}$, comparer b_{n+1} et $\sqrt{b_n a_{n+1}}$.

C. Étude des suites des modules

u et v sont définis comme au titre B.

1. Étude d'une configuration.

On désigne, dans le plan \mathcal{P} , par D le disque fermé de centre O et de rayon 1 et par Δ le disque fermé de diamètre $[OA]$. On rappelle que A est le point d'affixe 1.

Au point P intérieur à D , on associe :

- le point P' milieu du segment $[AP]$;
- le point Q situé dans l'angle saillant $\widehat{AOP'}$ tel que $(\overline{OA}, \overline{OQ}) = (\overline{OQ}, \overline{OP'}) (2\pi)$ et $OQ = \sqrt{OP'}$;
- le point Q' milieu du segment $[AQ]$.

Montrer que :

- les points P' et Q sont intérieurs à Δ ;
- l'angle \widehat{OQA} est obtus ;
- $OQ < OQ' < OA$.

Quelles sont les affixes des points P' et Q si P a pour affixe γ_{n-1} ($n \geq 1$) ?

2. On suppose $u \geq |v|$.

Montrer que, pour tout entier n , $|\gamma_n| > 1$, que la suite $(|b_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante et que ces deux suites sont adjacentes.

3. On suppose les conditions suivantes réalisées :

$$0 \leq u < |v|, \quad |\gamma_0| < 1.$$

Montrer que, pour tout n , $|\gamma_n| < 1$, que la suite $(|b_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(|a_n|)_{n > 1}$ est croissante.

On pourra utiliser les résultats de la question 1 en remarquant par exemple que A_n est l'image de B_n dans la similitude de centre O associée au nombre complexe γ_n .

4. On suppose seulement $0 \leq u < |v|$.

On définit, pour t réel, $\psi(t) = \text{sh}^2(tu) - \sin^2(tv)$. Déterminer le signe de ψ au voisinage de 0.

Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 , les résultats de la question 3 sont encore valables.

FIN