

Préambule

1. \tan est définie sur $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, qui est la réunion des intervalles $I_k = \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$, $k \in \mathbb{Z}$.

\tan est impaire sur son ensemble de définition ; sur chacun des I_k , elle est dérivable et $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x > 0$ donc \tan est strictement croissante sur chacun des intervalles I_k .

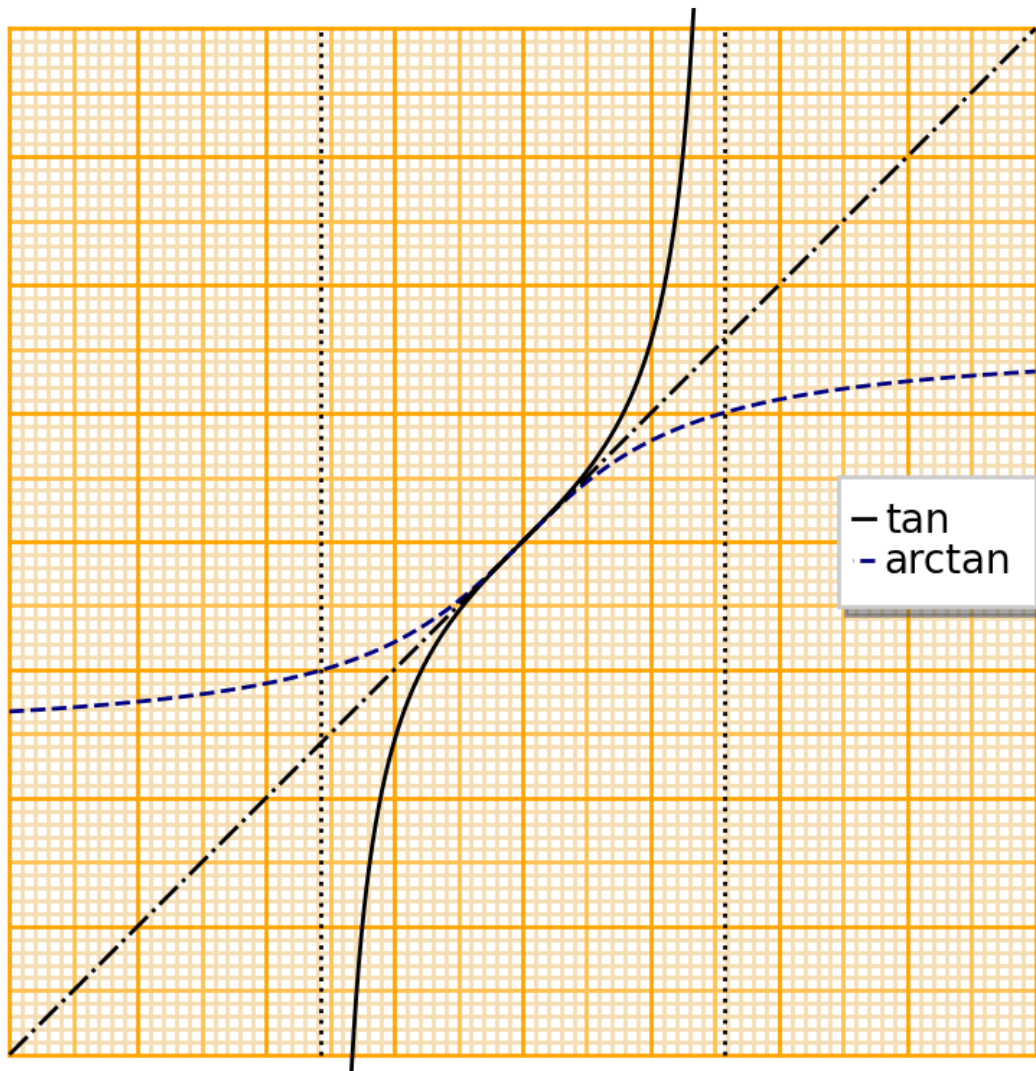
x	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	$-\infty$	↗ 0 ↗	$+\infty$

2. Le théorème de la bijection monotone énonce qu'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I définit une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$.

En appliquant ce théorème à la fonction tangente sur $I_0 = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, on montre que \tan réalise une bijection de I_0 sur \mathbb{R} , dont la réciproque, arctangente, est continue et strictement monotone. \tan étant

de classe \mathcal{C}^1 sur I_0 , sa réciproque est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , de dérivée $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

3. \arctan est strictement croissante de \mathbb{R} dans $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ ce qui est cohérent avec la stricte positivité de sa dérivée.



- 4.

Le tracé de la courbe représentative de la fonction arctangente s'obtient à partir de celui de la fonction tangente par symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

5. Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2} [\cup] \frac{\pi}{2}, \pi [$, $1 + \frac{1}{\tan^2 t} = 1 + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t}$ donc $\boxed{1 + \frac{1}{\tan^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t}}$.

Partie I

1. (a) $t \mapsto \frac{1}{1+x^2+t^2}$ est continue et positive sur \mathbb{R} ; de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{1+x^2+t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$, et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge; de même, $\frac{1}{1+x^2+t^2} \underset{t \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$, et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{t^2}$ converge.

Par théorème de comparaison (équivalent), $\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+x^2+t^2}$ et $\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+x^2+t^2}$ convergent (elles ont d'ailleurs la même valeur), donc $\boxed{F(x) \text{ converge pour tout } x \in \mathbb{R}}$.

(b) $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}$ donc $\boxed{F(0) = \pi}$.

(c) Pour $x \in \mathbb{R}$, le changement de variable $t = u \sqrt{1+x^2}$ est \mathcal{C}^1 et strictement croissant de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ; $dt = \sqrt{1+x^2} du$, donc

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} du}{1+x^2+u^2(1+x^2)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{F(0)}{\sqrt{1+x^2}} \text{ donc } \boxed{F(x) = \frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}}.$$

2. (a) $u_n \geq 0$, et $u_n \sim \frac{\pi}{\sqrt{n^\alpha \pi^\alpha}} \sim \frac{\pi^{1-\alpha/2}}{n^{\alpha/2}}$.

Or $\sum \frac{1}{n^{\alpha/2}}$ converge si, et seulement si, $\frac{\alpha}{2} > 1$, soit $\alpha > 2$ (cas de Riemann).

D'après le théorème de comparaison des séries à termes positives, $\boxed{\sum u_n \text{ converge si, et seulement si, } \alpha > 2}$.

(b) Pour $t \in [n\pi, (n+1)\pi]$, $\frac{1}{1+(n+1)^\alpha \pi^\alpha \sin^2 t} \leq \frac{1}{1+t^\alpha \sin^2 t} \leq \frac{1}{1+n^\alpha \pi^\alpha \sin^2 t}$.

Par intégration entre $n\pi$ et $(n+1)\pi$:

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+(n+1)^\alpha \pi^\alpha \sin^2 t} \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2 t} \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+n^\alpha \pi^\alpha \sin^2 t}.$$

Mais après le changement de variable $t = n + \pi u$:

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+n^\alpha \pi^\alpha \sin^2 t} = \int_0^\pi \frac{dt}{1+n^\alpha \pi^\alpha \sin^2(u-n\pi)} = \int_0^\pi \frac{dt}{1+n^\alpha \pi^\alpha \sin^2 u} = I_n,$$

donc finalement $\boxed{I_{n+1} \leq J_n \leq I_n}$.

(c) Il vaut mieux scinder l'intégrale en deux morceaux, correspondant aux intervalles $E_0 =]0, \frac{\pi}{2} [$ et $E_1 =]\frac{\pi}{2}, \pi [$ sur lesquels le changement de variable $u = \frac{1}{\tan t} = \frac{\cos t}{\sin t}$ est strictement décroissant et de classe \mathcal{C}^1 .

L'image de E_0 par $t \mapsto \frac{\cos t}{\sin t}$ est l'intervalle \mathbb{R}_+^* , l'image de E_1 est \mathbb{R}_-^* .

Sur E_0 , $t = \arctan \frac{1}{u}$ et sur E_1 , $t = \pi + \arctan \frac{1}{u}$; dans les deux cas, $dt = \frac{-du}{1+u^2}$.

Enfin, sur les deux intervalles d'intégration, d'après la question 5 du préambule, $1+u^2 = \frac{1}{\sin^2 t}$ donc

$$\sin^2 t = \frac{1}{1+u^2}, \text{ et } \frac{dt}{1+n^\alpha \pi^\alpha \sin^2 t} = \frac{1}{1+\frac{n^\alpha \pi^\alpha}{1+u^2}} \frac{-du}{1+u^2} = \frac{-du}{1+u^2+n^\alpha \pi^\alpha}, \text{ puis}$$

$$\int_{E_0} \frac{dt}{1+n^\alpha \pi^\alpha \sin^2 t} = \int_{+\infty}^0 \frac{-du}{1+u^2+n^\alpha \pi^\alpha} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2+n^\alpha \pi^\alpha} \text{ et}$$

$$\int_{E_1} \frac{dt}{1+n^\alpha \pi^\alpha \sin^2 t} = \int_0^{-\infty} \frac{-du}{1+u^2+n^\alpha \pi^\alpha} = \int_{-\infty}^0 \frac{du}{1+u^2+n^\alpha \pi^\alpha} \text{ donc par relation de Chasles :}$$

$$I_n = \int_{E_0 \cup E_1} \frac{dt}{1+n^\alpha \pi^\alpha \sin^2 t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2+n^\alpha \pi^\alpha} \text{ et ainsi } \boxed{I_n = F(n^\alpha \pi^\alpha)}.$$

(d) D'après 1c: $F(x) = \frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}$ donc $F(n^\alpha \pi^\alpha) = \frac{\pi}{\sqrt{1+n^\alpha \pi^\alpha}} = u_n$.

Alors $I_n = u_n$, donc l'encadrement montré en 2b s'écrit $\boxed{u_{n+1} \leq J_n \leq u_n}$.

(e) D'après 2a, par sommation : $\sum_{n=0}^N u_{n+1} \leq \sum_{n=0}^N J_n \leq \sum_{n=0}^N u_n$, donc en posant $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$:

$$S_{N+1} - u_0 \leq \int_0^{(N+1)\pi} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2 t} \leq S_N. \text{ Il en résulte que}$$

$$\left(\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2 t} \text{ converge} \right) \implies (\text{la suite } (S_N) \text{ converge}) \implies (\text{la série } \sum u_n \text{ converge})$$

$$\text{Réciproquement, } (\text{la série } \sum u_n \text{ converge}) \implies (\text{la suite } (S_N) \text{ converge}) \implies \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{N\pi} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2 t} \in \mathbb{R} \right)$$

Mais, comme $\frac{1}{1+t^\alpha \sin^2 t} > 0$, $A \mapsto \int_0^A \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2 t}$ est croissante et l'existence de $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2 t}$

équivalent à celle de $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{N\pi} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2 t}$, avec la même valeur.

Finalement, en utilisant le résultat de 2a

$$\boxed{\left(\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2 t} \text{ converge} \right) \iff \left(\sum u_n \text{ converge} \right) \iff \alpha > 2.}$$

Partie II

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

Le produit de Cauchy des deux séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ est la série entière $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$:

$$\forall x \in]-R, R[, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n.$$

Si les deux séries facteurs convergent sur $] -R, R[$, on peut affirmer que

$\boxed{\text{le rayon de convergence de la série produit est supérieur ou égal à } R}$.

(b) Prenons $(b_n) = (a_n)$, alors $c_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$ donc $\forall x \in]-R, R[, f(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \right) x^n$.

2. (a) $f(0) = 0$, donc $\boxed{a_0 = 0}$. En utilisant le théorème de dérivation terme à terme d'une série entière,

pour tout $x \in]-R, R[, \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \right) x^n$, soit après décalage d'indice :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \right) x^n.}$$

Par unicité du développement en série entière, on peut affirmer

* $a_1 = 1 + a_0^2$, donc $\boxed{a_1 = 1}$.

* $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$.

• Si $n = 1$, $2a_2 = 0$ donc $a_2 = 0$.

• si $n \geq 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$, extensible au cas $n = 1$ avec la convention $\sum_{k=1}^0 a_k a_{n-k} = 0$.

(b) Montrons par récurrence forte sur $p \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{N}_p : a_{2p} = 0$.

* Puisque $a_0 = 0$: \mathcal{N}_0 est vraie.

* Supposons que pour p fixé, \mathcal{N}_k est vraie pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$.

Si $p = 0$, alors $a_{2p+2} = a_2 = 0$ conformément au résultat de 2a.

Si $p \geq 1$, $a_{2(p+1)} = a_{2p+2} = \frac{1}{2p+1} \sum_{k=1}^{2p} a_k a_{2p+1-k}$. Or, pour tout entier *pair* $k \in \llbracket 1, 2p \rrbracket$, $a_k = 0$

par hypothèse de récurrence; pour tout entier *impair* $k \in \llbracket 1, 2p \rrbracket$, $2p+1-k$ est un entier *pair* de $\llbracket 1, 2p \rrbracket$, donc $a_{2p+1-k} = 0$. Dans tous les cas, $a_k a_{2p+1-k} = 0$ donc $a_{2p+2} = 0$, ce qui achève la preuve de \mathcal{N}_{p+1} .

On conclut par récurrence forte que $a_{2p} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, donc $\forall x \in]-R, R[, f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1}$.

La fonction f est donc impaire.

(c) On a vu en question 2a que $a_1 = 1$, donc $f'(0) = a_1 = 1$.

Alors $a_3 = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^1 a_k a_{2-k} = \frac{a_1^2}{3}$ donc $a_3 = \frac{1}{3}$

$a_5 = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^3 a_k a_{4-k} = \frac{1}{5} (a_1 a_3 + a_2^2 + a_3 a_1) = \frac{2a_1 a_3}{5}$ donc $a_5 = \frac{2}{15}$.

Enfin $a_7 = \frac{1}{7} \sum_{k=1}^5 a_k a_{6-k} = \frac{1}{7} (a_1 a_5 + a_2 a_4 + a_3^2 + a_4 a_2 + a_5 a_1) = \frac{1}{7} (2a_1 a_5 + a_3^2) = \frac{1}{7} \left(\frac{4}{15} + \frac{1}{9} \right) =$

$\frac{1}{7} \left(\frac{12}{45} + \frac{5}{45} \right)$ donc $a_7 = \frac{17}{315}$.

(d) $\tan(0) = 0$ et pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.

Par hypothèse (de l'énoncé) \tan est développable en série entière sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc elle admet *a fortiori* un développement limité en zéro à tout ordre, et en particulier

$\tan(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o_0(x^7)$ soit $\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o_0(x^7)$.

Partie III

1. (a) Soit n entier naturel non nul fixé.

$\forall u \geq 0, 1 + u^{4n} = 1 + (u^{2n})^2 > 0$, donc la fonction intégrée est continue sur $[0; +\infty[$.

L'intégrale H_n est par conséquent seulement impropre en $+\infty$.

$\frac{u^{2n}}{1 + u^{4n}} \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u^{2n}}{u^{4n}} = \frac{1}{u^{2n}}$, or $n \geq 1 \Rightarrow 2n \geq 2 > 1$,

donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{2n}} du$ est une intégrale de Riemann convergente.

Par critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, on peut en conclure que

l'intégrale H_n est convergente.

(b) $\int_0^1 u^{2n} du = \left[\frac{u^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 u^{2n} du = 0$

- (c) $\forall u \geq 0$, on a: $0 \leq \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \leq \frac{u^{2n}}{u^{4n}} = \frac{1}{u^{2n}}$, donc par propriété de croissance des intégrales (ces intégrales étant bien convergentes, nous l'avons prouvé en 1)a)), on peut écrire:

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} du \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{2n}} du$$

$$\text{Or } \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{1}{u^{2n}} du = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left[\frac{u^{-2n+1}}{-2n+1} \right]_1^X = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{-2n+1} \left(\frac{1}{X^{2n-1}} - 1 \right) = \frac{1}{2n-1}$$

$$\text{Finalement: } 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} du \leq \frac{1}{2n-1}$$

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} du = 0$$

(d) D'après la relation de Chasles, $H_n = \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} du + \int_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} du$

- Nous avons prouvé à la question 1)c) que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} du = 0$

- Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} du = 0$:

$$\forall u \in [0, 1], 0 \leq \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \leq u^{2n} \text{ car } 1+u^{4n} \geq 1$$

$$\text{Donc } 0 \leq \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} du \leq \int_0^1 u^{2n} du$$

On a vu en 1)b) que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 u^{2n} du = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, on en déduit

$$\text{que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} du = 0$$

Bilan:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = 0$$

2. (a) $\sqrt[2n]{x} = e^{\frac{\ln(x)}{2n}}$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[2n]{x} = 0$

- (b) • L'intégrale K_n est impropre en 0, mais comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[2n]{\tan(x)} = 0$ (en utilisant la question précédente et le fait que $\lim_{x \rightarrow 0} \tan(x) = 0$), la fonction intégrée est prolongeable par continuité en 0, ce qui implique que l'intégrale K_n est **faussement impropre en 0**.

Donc $\boxed{\text{l'intégrale } K_n \text{ est convergente}}$.

- L'intégrale L_n est impropre en $\frac{\pi}{2}$, car \tan n'est pas définie en $\frac{\pi}{2}$.

On va ramener le problème en 0 en effectuant le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$, qui est bijectif de $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$ dans $\left] 0; \frac{\pi}{4} \right]$. On a $du = -dx$, donc:

$$L_n = - \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \sqrt[2n]{\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[2n]{\frac{\cos(u)}{\sin(u)}} du$$

Cette dernière intégrale est impropre en 0.

$$\text{Or } \sqrt[2n]{\frac{\cos(u)}{\sin(u)}} \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \sqrt[2n]{\frac{1}{u}} \text{ car } \sqrt[2n]{\frac{\cos(u)}{\sin(u)}} \times u \text{ tend vers } 1 \text{ lorsque } u \text{ tend vers } 0.$$

de plus $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[2n]{\frac{1}{u}} du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{u^{1/2n}} du$ qui est une intégrale de Riemann convergente car $\frac{1}{2n} < 1$.

D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que

$$\boxed{\text{l'intégrale } L_n \text{ est convergente}}$$

- (c) • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $K_n \leq K_{n+1}$:

On a $\forall x \in]0; \frac{\pi}{4}]$, $\tan(x) \in]0, 1]$, donc $\ln(\tan(x)) < 0$.

Par croissance de l'exponentielle, et comme $\frac{\ln(\tan(x))}{2n} \leq \frac{\ln(\tan(x))}{2n+2}$, $e^{\frac{\ln(\tan(x))}{2n}} \leq e^{\frac{\ln(\tan(x))}{2n+2}}$.

On utilise ensuite la propriété de croissance de l'intégrale pour affirmer que $K_n \leq K_{n+1}$.

- Montrons que la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée:

$\forall x \in]0; \frac{\pi}{4}]$, $\tan(x) \in]0, 1]$, donc $\sqrt[2n]{\tan(x)} \leq 1$

Par propriété de croissance de l'intégrale, $K_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx = \frac{\pi}{4}$.

Bilan: $\boxed{\text{La suite } (K_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante et majorée par } \frac{\pi}{4}}$.

- (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$, $\tan(x) \geq 1$, donc $\ln(\tan(x)) \geq 0$, donc $e^{\frac{\ln(\tan(x))}{2n+2}} \leq e^{\frac{\ln(\tan(x))}{2n}}$.

Par propriété de croissance de l'intégrale, on en déduit que $L_{n+1} \leq L_n$.

Bilan: $\boxed{\text{La suite } (L_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$.

- (e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$, $\tan(x) \geq 1$, donc $\ln(\tan(x)) \leq 0$, donc $e^{\frac{\ln(\tan(x))}{2n}} \geq 1$.

Par propriété de croissance de l'intégrale, $L_n \geq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{4}$.

Bilan: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, L_n \geq \frac{\pi}{4}}$.

- (f) La suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée, donc elle converge.

D'autre part, la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée (question 2)c), donc elle converge également.

Cela a donc du sens de s'intéresser à $\lim_{n \rightarrow +\infty} (K_n + L_n)$.

On sait que:

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, K_n \geq 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n \geq 0$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, L_n \geq \frac{\pi}{4}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n \geq \frac{\pi}{4}$.

Bilan: $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (K_n + L_n) \geq \frac{\pi}{4}}$

3. (a) $K_n + L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[2n]{\tan x} dx$ d'après la relation de Chasles.

Le changement de variable $x \mapsto e^{\frac{\ln(\tan(x))}{2n}}$ est bijectif, de classe C^1 , strictement croissant de $]0; \frac{\pi}{2}[$ dans $]0; +\infty[$.

On a : $u^{2n} = \tan(x) \Rightarrow 2nu^{2n-1} du = (1 + \tan^2(x)) dx \Rightarrow dx = \frac{2nu^{2n-1}}{1 + u^{4n}} du$

Donc $K_n + L_n = \int_0^{+\infty} u \times \frac{2nu^{2n-1}}{1 + u^{4n}} du$, et finalement:

$$\boxed{K_n + L_n = 2n \int_0^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1 + u^{4n}} du}$$

- (b) La question précédente nous permet d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = \frac{K_n + L_n}{2n}$

Si on note $H = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} (K_n + L_n)$, alors $H \neq 0$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} (K_n + L_n) \geq \frac{\pi}{4}$,

donc $\frac{K_n + L_n}{2} \sim H$, et finalement :

$$\boxed{H_n \sim \frac{H}{n}}$$

Partie IV

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \phi(x) = \frac{x}{x + o_0(x)}$ car $e^x = 1 + x + o_0(x)$

Donc $\phi(x) = \frac{1}{1 + o_0(1)}$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0.

La fonction ϕ est donc bien prolongeable par continuité en zéro.

2. D'après le développement en série entière de ϕ , on a $\phi(0) = \frac{B_0}{0!}$.

Or $\phi(0) = 1$ d'après la question précédente, donc $B_0 = 1$.

3. $\forall x \in]-2\pi, 2\pi[\setminus \{0\}$, $\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$, donc $x = (e^x - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$

Pour $x = 0$, cette dernière relation est aussi vraie car $0 = (1 - 1)B_0$.

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, donc $e^x - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Nous allons effectuer un produit de Cauchy pour déterminer le développement en série entière de

$$(e^x - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!}.$$

Comme les formules du cours sont valables pour des séries qui commencent à l'indice 0, nous allons donc écrire:

- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x - 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où $a_0 = 0$ et $\forall n \geq 1, a_n = \frac{1}{n!}$
- $\forall x \in]-2\pi, 2\pi[, \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, où $\forall n \geq 0, b_n = \frac{B_n}{n!}$

D'après le cours sur le produit de Cauchy de deux séries entières, on peut donc affirmer que:

$$\forall x \in]-2\pi, 2\pi[, (e^x - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

où $\forall n \geq 0, c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$

- Si $n = 0, c_0 = a_0 b_0 = 0$
- Si $n \geq 1, c_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} b_k$ car $a_0 = 0$, donc $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)!} \frac{B_k}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k$

Enfinement, $\forall x \in]-2\pi, 2\pi[, x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k \right)$

4. (a) Par unicité d'un développement en série entière, on peut identifier les coefficients de l'égalité ci-dessus, ce qui nous conduit à:

- Pour le coefficient en x : $1 = \frac{1}{1!} \left(\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} B_k \right)$, i.e. $B_0 = 1$, ce qu'on savait déjà.
- pour tous les autres coefficients: $\forall n \geq 2, 0 = \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k \right)$, i.e. $\forall n \geq 1, \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = 0$

En mettant le dernier terme de la somme ci-dessous à part, on obtient:

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k + \binom{n+1}{n} B_n = 0$$

$$\text{Or } \binom{n+1}{n} = n+1, \text{ donc } \boxed{(n+1)B_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k \quad (*)}$$

(b) La formule montrée ci-dessus va nous permettre de calculer de proche en proche les coefficients B_n :

• Nous avons déjà $\boxed{B_0 = 1}$.

• Appliquons (*) pour $n = 1$: $2B_1 = -\binom{2}{0} B_0 = -B_0$ donc $\boxed{B_1 = -\frac{1}{2}}$.

• Appliquons (*) pour $n = 2$: $3B_2 = -\binom{3}{0} B_0 - \binom{3}{1} B_1 = -B_0 - 3B_1$, donc $\boxed{B_2 = \frac{1}{6}}$.

• Appliquons (*) pour $n = 3$: $4B_3 = -\binom{4}{0} B_0 - \binom{4}{1} B_1 - \binom{4}{2} B_2 = -B_0 - 4B_1 - 6B_2 = 0$, donc $\boxed{B_3 = 0}$.

• Appliquons (*) pour $n = 4$: $5B_4 = -\binom{5}{0} B_0 - \binom{5}{1} B_1 - \binom{5}{2} B_2 - \binom{5}{3} B_3 = -B_0 - 5B_1 - 10B_2 - 10B_3 = -\frac{1}{6}$, donc $\boxed{B_4 = -\frac{1}{30}}$.

On peut donc affirmer que $\boxed{2B_2 = \frac{1}{3}}$, et $\boxed{4B_4 = -\frac{2}{15}}$.

On remarque que l'on retrouve ainsi les coefficients du développement limité de la fonction tangente trouvés dans la partie II, où on avait obtenu: $\boxed{a_3 = \frac{1}{3} = 2B_2}$, et $\boxed{a_5 = \frac{2}{15} = -4B_4}$