

CCP - Maths 1

Proposition de corrigé

Taoufik Said

EXERCICE 1

Q1. f est la composée d'une fonction polynomiale et de la fonction sinus donc elle est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 . g l'est aussi car ses composantes sont polynomiales. En particulier les deux fonctions sont différentiables sur \mathbb{R}^2 .

Pour les matrices Jacobiennes :

$$Jac f(x, y) = 2 \cos(x^2 - y^2)(x, -y) \quad , \quad Jac g(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Q2. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

1. On a : $f \circ g(x, y) = f(x + y, x - y) = \sin(4xy)$ donc

$$d(f \circ g)(x, y) \cdot (u, v) = \frac{\partial f \circ g}{\partial x}(x, y) \cdot u + \frac{\partial f \circ g}{\partial y}(x, y) \cdot v = 4 \cos(4xy)(uy + vx)$$

2. On a : $Jac(f \circ g)(x, y) = Jac f(a, b) \cdot Jac g(x, y)$ où $(a, b) = g(x, y)$

donc $Jac(f \circ g)(x, y) = 4 \cos(4xy)(y, x)$ puis

$$d(f \circ g)(x, y) \cdot (u, v) = Jac(f \circ g)(x, y) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 4 \cos(4xy)(uy + vx)$$

Q3. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{q \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p^2 q^2}$ converge de somme $\frac{\pi}{6p^2}$

et la série $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 q^2}$ est convergente de somme $\frac{\pi^2}{36}$

alors la famille $(\frac{1}{p^2 q^2})_{(p, q) \in A}$ est sommable de somme $\frac{\pi^2}{36}$.

Q4. Pour tout $(p, q) \in A$, $0 \leq \frac{1}{(p+q)^2} \leq \frac{1}{p^2+q^2}$, il suffit de montrer la non-sommabilité de la famille $(\frac{1}{(p+q)^2})_{(p, q) \in A}$:

Considérons la partition suivante de A : $J_n = \{(p, q) \in A / p + q = n\}$, $n \geq 2$.

Pour tout $n \geq 2$, $card(J_n) = n - 1$ donc $\sum_{(p, q) \in J_n} \frac{1}{(p+q)^2} = \frac{n-1}{n^2}$

La divergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{n-1}{n^2}$ entraîne la non-sommabilité de la famille $(\frac{1}{(p+q)^2})_{(p, q) \in A}$,

d'où le résultat cherché.

PROBLÈME

Partie I - Exemples

Q5. • $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx)| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

comme $\sum \frac{1}{2^n}$ est convergente alors notre série trigonométrique est normalement convergente sur \mathbb{R} .

•• La série géométrique $\sum \left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n$ est convergente car $|\frac{e^{ix}}{p}| = \frac{1}{p} < 1$, sa somme est $\frac{p}{p-e^{ix}}$

••• On a : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n} = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^n\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{2}{2-e^{ix}}\right) = \frac{4-2\cos x}{5-4\cos x}$

et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{3^n} = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{ix}}{3}\right)^n\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{3}{3-e^{ix}}\right) = \frac{3\sin x}{10-6\cos x}$

d'où $\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\cos nx}{2^n} + \frac{\sin nx}{3^n}\right] = \frac{4-2\cos x}{5-4\cos x} + \frac{3\sin x}{10-6\cos x}$.

Q 6. On rappelle que $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!}$

Par la formule de Moivre, on a

$e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$. Puisque les deux séries $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos(nx)}{n!}$, $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(nx)}{n!}$ sont absolument

convergente (car $\left|\frac{\cos(nx)}{n!}\right| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\left|\frac{\sin(nx)}{n!}\right| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$)

alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!}$

D'autre part : $\exp(e^{ix}) = \exp(\cos x) \exp(i \sin x) = \exp(\cos x)(\cos(\sin x) + i \sin(\sin x))$

Par identification, $\exp(\cos x) \cos(\sin x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!}$.

Q7. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{1}{n+1}$. La suite (a_n) converge vers 0 et la série $\sum a_n \cos nx$ ne converge pas simplement sur \mathbb{R} (pour $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, la somme est infinie).

Q8. Posons $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$.

On a : $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = |f_n(\frac{\pi}{2n})| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge alors la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur \mathbb{R} .

Partie II - Propriétés

Q9. La série $\sum(|a_n| + |b_n|)$ converge car $\sum a_n$, $\sum b_n$ sont absolument convergentes et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n \cos(nx) + \sin(nx)b_n| \leq |a_n| + |b_n|$

donc la série $\sum(a_n \cos(nx) + \sin(nx)b_n)$ converge normalement sur \mathbb{R} .

Q10. Posons $f(x) = a \cos x + b \sin x$. Si $a = b = 0$ le résultat est trivial sinon, on prend $z = a + ib = re^{i\theta}$. On a : $f(x) = \operatorname{Re}(ze^{ix}) = \operatorname{Re}(re^{i(x+\theta)}) = r \cos(x + \theta)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq r = |f(-\theta)|$ donc $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Q11. De la même manière, on obtient $\sup_{x \in \mathbb{R}} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

La convergence normale de la série trigonométrique est équivalent à la convergence de la série numérique $\sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

Comme $\forall n$, $|a_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $|b_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ alors les deux Séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ convergent absolument puis les termes généraux ont la limite nulle.

Q12. Pour tout n , $f_n : x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ est continue sur \mathbb{R} et $\sum f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} car (converge normalement) donc sa somme est continue sur \mathbb{R} .

Aussi $f(x + 2\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x + 2\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f(x)$, d'où $f \in C_{2\pi}$.

Q13. Pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(2nx)+1}{2} dx = \left[\frac{\sin(2nx)}{4n} + \frac{x}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Pour $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \neq k$. On a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((k+n)x) + \sin(k-n)x}{2} dx = \left[\frac{-\cos((k+n)x)}{2(k+n)} + \frac{-\cos((k-n)x)}{2(k-n)} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Q14. On pose : $f_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \cos(nx) dx$

comme $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $|f_k(x) \cos nx| \leq \|f_k\|_{\infty}$ et $\sum f_k$ converge normalement sur \mathbb{R} donc $\sum f_k(x) \cos nx$ converge normalement puis uniformément sur $[-\pi, \pi]$, ce qui permet l'in-

terversion série-intégrale, soit $\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_k(x) \cos(nx) dx$

pour $k \neq n$, $\int_{-\pi}^{\pi} f_k(x) \cos(nx) dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx = 0$

et $\int_{-\pi}^{\pi} f_n(x) \cos(nx) dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(nx) dx = \pi$ (car **Q13.** et $x \mapsto \sin(nx) \cos(nx)$ est impaire), d'où $\alpha_n(f) = a_n$.

$\alpha_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) dx = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_k(x) dx$ (Convergence uniforme de

$\sum f_k$ sur $[-\pi, \pi]$)

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx = 0$ (La fonction est impaire)

et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx = 0$ (pour $k = 0$ la valeur est 2π)

donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\int_{-\pi}^{\pi} f_k(x) dx = 0$ et $\int_{-\pi}^{\pi} f_0(x) dx = 2\pi a_0$ d'où $\alpha_0(f) = 2a_0$.

Q15 On pose $a_0 = \frac{\alpha_0(f)}{2}$, $b_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \alpha_n(f)$, $b_n = \beta_n(f)$

par hypothèse, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$ converge normalement sur \mathbb{R} , de somme g

par **Q14.**, $\alpha_0(g) = 2a_0 = \alpha_0(f)$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n(g) = a_n = \alpha_n(f)$ et $\beta_n(g) = b_n = \beta_n(f)$.

Q16. D'après **Q12.** $g \in C_{2\pi}$, on pose : $h = f - g \in C_{2\pi}$ (car c'est un espace vectoriel).

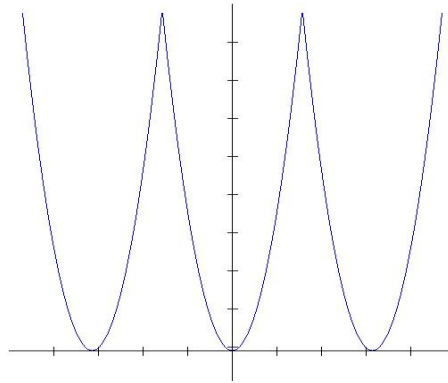
Par linéarité de l'intégrale et **Q15.**, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n(h) = \alpha_n(f) - \alpha_n(g) = 0 = \beta_n(f) - \beta_n(g) = \beta_n(h)$

Le résultat admis permet de conclure que : $f - g = h = 0$ sur \mathbb{R} .

Q17 La fonction $x \mapsto f(x) \sin(nx)$ est impaire, son intégrale sur un intervalle centré sera nulle donc $\beta_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La fonction $x \mapsto f(x) \cos(nx)$ est paire, donc $\int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^0 f(x) \cos(nx) dx$ puis $\alpha_n(f) = 2 \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q18



La fonction f est paire donc $\beta_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\alpha_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}$ (Intégration par parties deux fois).

On pose : $u_0(x) = \frac{2\pi^2}{3}$ et pour $n \neq 0$, $u_n(x) = \frac{4(-1)^n \cos(nx)}{n^2}$.

on a : $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur \mathbb{R} (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n(x)| \leq \frac{4}{n^2}$), de somme f (

voir le résumé après **Q16**) .

Q19 • On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n \cos(nx)}{n^2}$.

Comme $f(0) = 0$ alors $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

Et $f(\pi) = \pi^2$ entraîne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

•• On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)^2}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n+2} = T_n + \frac{1}{4} S_{n+1}$, le passage à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ nous donne : $\pi^2/6 = \lim T_n + \pi^2/12$ (les T_n sont les sommes partielles d'une série convergente)

d'où $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Q20. On pose : $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

La fonction f est continue sur $]0, 1[$ donc sa restriction sur $]0, 1[$ y est intégrable.
En utilisant le développement en série entière de $x \mapsto \ln(x+1)$, on écrit :

$$\forall x \in]0, 1[\quad , \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{n}$$

Posons , pour $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \frac{(-x)^{n-1}}{n}$. On a $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement vers f
cette convergence est normale puis uniforme , en effet

$$\forall x \in]0, 1[\quad , \quad |f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \quad (\text{T.S.S.A})$$

(ceci reste vrai pour $x = 0$: $|R_n(0)| = 0 \leq \frac{1}{n+1}$)

$$\text{donc } \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x} = \int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Q21. • La fonction f définie en **Q18.** est la somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur \mathbb{R} , mais elle n'est pas dérivable aux points $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

•• Posons $u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

Si $\sum u'_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} alors la somme sera dérivable (Dérivation terme à terme).

Supposons que les deux séries numériques $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ sont absolument convergentes , alors

$$|u'_n(x)| = | -na_n \sin nx + nb_n \cos nx | \leq |na_n| + |nb_n|$$

ce qui assure la convergence normale de $\sum u'_n$ sur \mathbb{R} puis la dérivabilité de la somme.

Q22. On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{3^n} = \frac{3 \sin x}{10 - 6 \cos x}$ (voir **Q5.**) .

La condition proposée en **Q21.** est vérifiée : $\sum \frac{n}{3^n}$ est convergente (règle de D'Alembert)

La somme f est donc dérivable sur \mathbb{R} avec $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos nx}{3^n}$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos nx}{3^n} = \frac{30 \cos x - 18}{(10 - 6 \cos x)^2}$$

**Pour vos remarques , merci de me contacter sur
"taoufiki-maths@hotmail.fr"**