

## Centrale TSI 2008 - Mathématiques 2

## Partie I - Étude de deux applications

I.A.1)  $\Phi(A)$  est la surface d'équation cartésienne  $z = 0$ , c'est à dire le plan  $(xOy)$ .

I.A.2)  $\Phi(A)$  est la surface d'équation cartésienne  $z = x^2 + y^2$ .

C'est un parabolöide elliptique de révolution d'axe  $(Oz)$ .

$$\begin{aligned} \text{I.A.3) } \Phi(A) \text{ a pour équation cartésienne } z &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= x^2 - 2xy + 2xy + y^2 \\ &= x^2 - y^2. \end{aligned}$$

$\Phi(A)$  a pour équation cartésienne  $z = x^2 - y^2$ .

On reconnaît l'équation cartésienne réduite d'un parabolöide hyperbolique.

I.B.1)

$$\checkmark \forall A \in E, A = \frac{A + {}^tA}{2} + A = \frac{A - {}^tA}{2}. \text{ Cela montre que } E = \mathcal{S}_2 + \mathcal{A}_2.$$

$$\checkmark \forall A \in E, ({}^tA = A \text{ et } {}^tA = -A) \Rightarrow A = 0. \text{ Cela montre que } \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{A}_2 = \{0\}.$$

Donc :

$$\boxed{E = \mathcal{S}_2 \oplus \mathcal{A}_2}$$

I.B.2)

$\checkmark$  Supposons  $\forall X \in \mathbb{R}^2, {}^tXAX = 0$ .

$$\text{Posons } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$\text{Pour } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ on obtient : } {}^tXAX = a = 0.$$

$$\text{Pour } X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ on obtient : } {}^tXAX = d = 0.$$

$$\text{Pour } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ on obtient : } {}^tXAX = a + b + c + d = b + c = 0.$$

$$\text{D'où } A = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_2.$$

$$\begin{aligned} \checkmark \text{ Si } A \in \mathcal{A}_2, \forall X \in \mathbb{R}^2, ({}^t({}^tXAX) = {}^tXAX \text{ (matrice } 1 \times 1)) &\Rightarrow {}^tX{}^tAX = {}^tXAX \\ &\Rightarrow -{}^tXAX = {}^tXAX \\ &\Rightarrow {}^tXAX = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall X \in \mathbb{R}^2, {}^tXAX = 0.$$

J'ai montré :

$$\boxed{(\forall X \in \mathbb{R}^2, {}^tXAX = 0) \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}_2}$$

I.B.3) La question précédente montre que si  $A_1 = 0$  et  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\forall X \in \mathbb{R}^2$ ,  ${}^tXA_1X = {}^tXA_2X = 0$  et  $\Phi(A_1) = \Phi(A_2)$  : plan d'équation cartésienne  $z = 0$ . Donc :

$$\boxed{\Phi \text{ n'est pas injective.}}$$

$$\begin{aligned}
\text{I.B.4)} \quad \Phi(A) = \Phi(A') &\Leftrightarrow (\forall X \in \mathbb{R}^2, {}^tXAX = {}^tXA'X) \\
&\Leftrightarrow (\forall X \in \mathbb{R}^2, {}^tX(A - A')X = 0) \\
&\Leftrightarrow A - A' \in \mathcal{A}_2 \\
&\Leftrightarrow A' = p(A) \text{ (où } p \text{ est le projecteur de } E \text{ de base } \mathcal{S}_2 \text{ et de direction } \mathcal{A}_2)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\forall A \in E, \exists ! A' \in \mathcal{S}_2 \text{ telle que } \Phi(A) = \Phi(A'); A' = \frac{A + {}^tA}{2}}$$

I.C.1)  $\forall A, B \in E, \langle A, B \rangle = au + bv + cw + dt$  en posant :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} u & v \\ w & t \end{pmatrix}.$$

On reconnaît le produit scalaire associé à la base canonique de  $E$ . Donc :

$$\boxed{\langle, \rangle \text{ est un produit scalaire sur } E}$$

I.C.2)  $\forall (A, B) \in \mathcal{S}_2 \times \mathcal{A}_2, \langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB) = \text{tr}(AB)$  (puisque  $A \in \mathcal{S}_2$ ).

$$\begin{aligned}
\text{D'autre part, } \langle A, B \rangle &= \text{tr}({}^t({}^tAB)) \text{ (la trace d'une matrice est égale à celle de sa transposée)} \\
&= \text{tr}({}^tBA) \\
&= -\text{tr}(BA) \text{ (} B \in \mathcal{A}_2 \text{)} \\
&= -\text{tr}(AB) \text{ (car } \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \text{)}
\end{aligned}$$

Donc :  $\mathcal{S}_2 \perp \mathcal{A}_2$  et comme ces sous-espaces sont supplémentaires,  $\mathcal{A}_2 = \mathcal{S}_2^\perp$ . Donc :

$$\boxed{p \text{ est le projecteur orthogonal de base } \mathcal{S}_2 \text{ pour le produit scalaire } \langle, \rangle}.$$

I.C.3) Une telle base de  $E$  est obtenue en juxtaposant une base orthonormée de  $\mathcal{S}_2$  et une base orthonormée de  $\mathcal{A}_2$  :

$$\boxed{\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)}$$

$$\boxed{\text{Dans cette base, la matrice de } p \text{ est } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

I.C.4)a)

$$\boxed{p(A) = \frac{A + {}^tA}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

I.C.4)b) Les valeurs propres de  $p(A)$  sont 2 et 0 et les sous-espaces-propres associés sont :

$$E_2 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\} \text{ et } E_0 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

D'où :

$$\boxed{p(A) = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

I.C.4)c) Dans le repère  $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  où  $\vec{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ ,  $\vec{J} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ ,  $\vec{K} = \vec{k}$ ,

$\Phi(A)$  a pour équation réduite :  $Z = 2X^2$ ,  
c'est un cylindre parabolique de génératrices dirigées par  $\vec{J}$

I.D -  $A$  étant symétrique réelle, elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont  $\lambda$  et  $\mu$ . Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{k})$ ,  $\Phi(A)$  admet pour équation cartésienne  $Z = \lambda X^2 + \mu Y^2$ . L'on a 3 cas :

- ✓ si  $\det(A) > 0$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  sont non nulles et de même signe :  $\Phi(A)$  est un paraboloïde elliptique.
- ✓ si  $\det(A) = 0$ , par exemple,  $\lambda \neq 0$  ( $A \neq 0$ ) et  $\mu = 0$  :  $\Phi(A)$  est un cylindre parabolique dont les génératrices sont dirigées par  $\vec{J}$ .
- ✓ si  $\det(A) < 0$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  sont non nulles et de signe contraire :  $\Phi(A)$  est un paraboloïde hyperbolique.

I.E.1) C'est une question de cours :

- ✓ si  $\det(A) = 1$ , l'endomorphisme est une rotation vectorielle.
- ✓ si  $\det(A) = -1$ , l'endomorphisme est une réflexion (symétrie orthogonale de base une droite vectorielle).

I.E.2) Si  $\det A < 0$ ,  $A$  est de la forme  $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ .

Son polynôme caractéristique  $\chi_A$  vaut  $X^2 - 1$ .

Ses valeurs propres sont 1 et  $-1$  et il existe  $P = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$  telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans le repère  $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  avec  $\vec{I} = \cos \frac{\theta}{2} \vec{i} + \sin \frac{\theta}{2} \vec{j}$ ,  $\vec{J} = -\sin \frac{\theta}{2} \vec{i} + \cos \frac{\theta}{2} \vec{j}$  et  $\vec{K} = \vec{k}$ ,  $\Phi(A)$  a pour équation cartésienne  $Z = X^2 - Y^2$ .

C'est un paraboloïde hyperbolique qui se déduit du paraboloïde d'équation  $z = x^2 - y^2$  par la rotation d'axe  $(Oz)$  et d'angle  $\frac{\theta}{2}$

I.E.3) Si  $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$  et  $\det A > 0$ ,  $\exists \theta \in \mathbb{R}$ ,  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .

On a  $\Phi(A) = \Phi(p(A)) = \Phi \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$ .

Dans le repère  $\mathcal{R}$ ,  $\Phi(A)$  a pour équation cartésienne  $z = \cos \theta (x^2 + y^2)$ . Donc :

- ✓ si  $\theta = \frac{\pi}{2} [\pi]$ ,  $\Phi(A)$  est le plan d'équation cartésienne  $z = 0$ .
- ✓ si  $\theta \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$ ,  $\Phi(A)$  est un paraboloïde elliptique.

I.E.4)  $B \in \mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$ ; donc  $B$  admet les valeurs propres 1 et  $-1$ . ses sous-espaces propres sont :

$$E_1 : -3x + \sqrt{3}y = 0; \text{ d'où } E_1 = Vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\} \text{ et }$$

$$E_{-1} = Vect \left\{ \left( \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) \right\} \text{ (orthogonal à } E_1).$$

$$\text{D'où } B = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{0} & \frac{2}{0} & 1 \end{pmatrix} \text{ et :}$$

$$\boxed{\Phi(B) \text{ est transformé de } \Phi(A) \text{ par la rotation d'axe } (Oz) \text{ et d'angle } \frac{\pi}{3}}$$

I.F.1)  $A$  étant symétrique réelle, elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont  $\lambda$  et  $\mu$ . Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ,  $\Phi_1(A)$  admet pour équation cartésienne  $\boxed{\lambda X^2 + \mu Y^2 - Z^2 = 0}$ . L'on a 5 cas :

- ✓ si  $\det(A) > 0$  et  $\text{tr}(A) > 0$ ,  
 $\lambda$  et  $\mu$  sont non nulles et de même signe positif, puisque  $\lambda + \mu = \text{tr}(A) > 0$  :  $\Phi_1(A)$  est donc un cône de sommet  $O$ .
- ✓ si  $\det(A) > 0$  et  $\text{tr}(A) < 0$ ,  
 $\lambda$  et  $\mu$  sont non nulles et de même signe négatif, puisque  $\lambda + \mu = \text{tr}(A) < 0$  :  $\Phi_1(A) = \{O\}$ .
- ✓ si  $\det(A) = 0$  et  $\text{tr}(A) > 0$ ,  
 par exemple,  $\lambda > 0$  et  $\mu = 0$  :  $\Phi_1(A)$  a pour équation réduite :  $\lambda X^2 - Z^2 = 0$  :  
 $\Phi_1(A)$  est la réunion des deux plans sécants selon  $(OY)$ , d'équations cartésiennes respectives  $\sqrt{\lambda}X + Z = 0$  et  $\sqrt{\lambda}X - Z = 0$ .
- ✓ si  $\det(A) = 0$  et  $\text{tr}(A) < 0$ ,  
 par exemple,  $\lambda < 0$  et  $\mu = 0$  :  $\Phi_1(A)$  a pour équation réduite :  $\lambda X^2 - Z^2 = 0 \Leftrightarrow X = Z = 0$  :  
 $\Phi_1(A) = (OY)$ .
- ✓ si  $\det(A) < 0$ ,  
 $\lambda$  et  $\mu$  sont non nulles et de signes contraires :  $\Phi_1(A)$  est donc un cône de sommet  $O$ .

I.F.2) Procédure MAPLE :

```
> phi:=proc(A) local nature,B;
  B:=(A+transpose(A))/2;
  if det(B)>0 then
    if trace(B)>0 then nature:='cône de sommet O'
    else nature:='{O}'
    fi
  else
    if det(B)=0 then
      if trace(B)>0 then nature:='réunion de 2 plans sécants'
      else 'droite'
      fi
    else nature:='cône de sommet O'
    fi
  fi;
end;
```

I.F.3) D'après la question I.C.4), dans le repère orthonormé  $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  où  $\vec{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ ,  $\vec{J} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ ,  $\vec{K} = \vec{k}$ ,  $\Phi_1(A)$  a pour équation réduite :

$$2X^2 - Z^2 = 0$$

et

$\Phi_1(A)$  est la réunion des deux plans sécants d'équations cartésiennes respectives  $\sqrt{2}X - Z = 0$  et  $\sqrt{2}X + Z = 0$  sécants en  $(OY)$  :  $x = -y$ ,  $z = 0$

## Partie II - Application à une famille de surfaces

II.A -

$\Gamma_{\lambda, \theta}$  est la projection orthogonale de l'intersection de  $\Sigma_\theta$  et du plan d'équation cartésienne  $z = \lambda$ , sur le plan  $(xOy)$ .

II.B -

$$\Sigma_\theta = \Phi(A_\theta) \text{ avec } A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

II.C.1) Le polynôme caractéristique de  $A_\theta$  vaut :

$\chi_{A_\theta} = X^2 - 2\cos(\theta)X + \cos 2\theta = (X - \cos \theta - \sin \theta)(X - \cos \theta + \sin \theta)$ . Donc :

Les valeurs propres de  $A_\theta$  sont  $\lambda_1 = \cos \theta + \sin \theta$  et  $\lambda_2 = \cos \theta - \sin \theta$

Les sous-espaces propres respectifs sont :

$E_{\lambda_1} : -\sin(\theta)x + \sin(\theta)y = 0$ . D'où :

$$E_{\lambda_1} = \begin{cases} Vect \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\} & \text{si } \theta \neq 0 [\pi] \\ \mathbb{R}^2 & \text{si } \theta = 0 [\pi] \end{cases} \quad \text{et} \quad E_{\lambda_2} = \begin{cases} Vect \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\} & \text{si } \theta \neq 0 [\pi] \\ \mathbb{R}^2 & \text{si } \theta = 0 [\pi] \end{cases}$$

Dans tous les cas :

Une base orthonormale diagonalisant  $A_\theta$  est  $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right)$ .

II.C.2)  $\mathcal{C}$  a pour paramétrisation  $\begin{cases} x(\theta) = \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) \\ y(\theta) = \cos \theta - \sin \theta = \sqrt{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) \end{cases}$ .

$\mathcal{C}$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt{2}$

II.C.3)

$$\det(A_\theta) = \cos 2\theta \text{ et } \text{tr}(A_\theta) = 2 \cos \theta$$

II.D.1)  $\cos$  et  $\sin$  étant  $2\pi$ -périodiques,

$$\Sigma_{\theta+2\pi} = \Sigma_{\theta}$$

II.D.2)  $\Sigma_{\theta+\pi}$  admet pour équation cartésienne  $z = -\cos \theta(x^2 + y^2) - 2 \sin \theta xy$ . Donc :

$$\Sigma_{\theta+\pi} \text{ est symétrique de } \Sigma_{\theta} \text{ par la symétrie orthogonale de base } (xOy)$$

II.D.3)  $\Sigma_{-\theta}$  admet pour équation cartésienne  $z = \cos \theta(x^2 + y^2) - 2 \sin \theta xy \Leftrightarrow z = \cos \theta((-x)^2 + y^2) + 2 \sin \theta(-x)y$ . Donc :

$M(x, y, z) \in \Sigma_{-\theta} \Leftrightarrow M'(-x, y, z) \in \Sigma_{\theta}$  et :

$$\Sigma_{-\theta} \text{ est symétrique de } \Sigma_{\theta} \text{ par la symétrie orthogonale de base } (yOz)$$

II.E.1) Dans  $\mathcal{R}' = (O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  avec :  $\vec{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$ ,  $\vec{J} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j})$ ,  $\vec{K} = \vec{k}$ ,  $\Sigma_{\theta}$  a pour équation cartésienne  $Z = (\cos \theta + \sin \theta)X^2 + (\cos \theta - \sin \theta)Y^2 \Leftrightarrow Z = \sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) X^2 + \sin \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) Y^2 \right)$ . Donc :

a) Si  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$ ,  $\cos \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) > 0$  et  $\sin \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) > 0$ . D'où :

$$\Sigma_{\theta} \text{ est un paraboloïde elliptique.}$$

b) Si  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,  $\cos \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) = 1$  et  $\sin \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) = 0$ . D'où :

$$\Sigma_{\theta} \text{ est le cylindre parabolique d'équation cartésienne } Z = X^2.$$

c) Si  $\frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) > 0$  et  $\sin \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) < 0$ . D'où :

$$\Sigma_{\theta} \text{ est un paraboloïde hyperbolique.}$$

II.E.2) Dans  $\mathcal{R}'' = (O, \vec{I}, \vec{J})$  avec :  $\vec{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$ ,  $\vec{J} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j})$ ,

$\Gamma_{\lambda, \theta}$  a pour équation cartésienne  $\cos \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) X^2 + \sin \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) Y^2 = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$ . Donc :

a) Si  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$ ,  $\cos \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) > 0$  et  $\sin \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) > 0$ .

D'où la nature de  $\Gamma_{\lambda, \theta}$  est donnée par le tableau suivant :

| $\lambda > 0$                  | $\lambda = 0$ | $\lambda < 0$ |
|--------------------------------|---------------|---------------|
| Ellipse d'axes<br>(OX) et (OY) | $\{O\}$       | $\emptyset$   |

b) Si  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,  $\cos \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) = 1$  et  $\sin \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) = 0$ .

D'où la nature de  $\Gamma_{\lambda, \theta}$  est donnée par le tableau suivant :

| $\lambda > 0$                                | $\lambda = 0$ | $\lambda < 0$ |
|----------------------------------------------|---------------|---------------|
| réunion de deux<br>droites parallèles à (OY) | (OY)          | $\emptyset$   |

c) Si  $\frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) > 0$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) < 0$ .

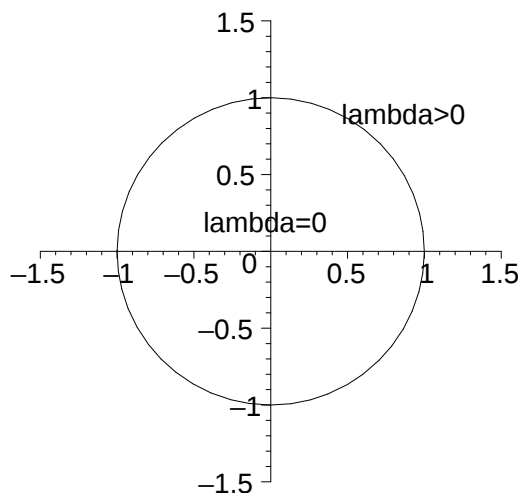
D'où la nature de  $\Gamma_{\lambda,\theta}$  est donnée par le tableau suivant :

| $\lambda > 0$                       | $\lambda = 0$             | $\lambda < 0$                       |
|-------------------------------------|---------------------------|-------------------------------------|
| hyperbole d'axe transverse ( $OX$ ) | 2 droites sécantes en $O$ | hyperbole d'axe transverse ( $OY$ ) |

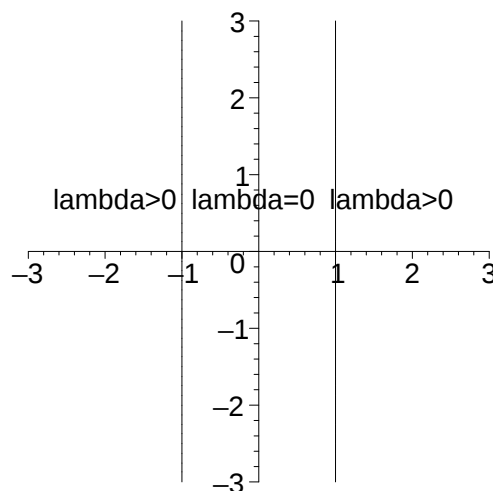
II.E.3) Dans  $\mathcal{R}''$ ,  $\Gamma_{\lambda,\theta}$  a pour équation cartésienne  $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) X^2 + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) Y^2 = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$ , ce qui donne respectivement pour  $\theta = 0$ ,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $X^2 + Y^2 = \lambda$ ,  $X^2 = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$  et  $X^2 - Y^2 = \lambda$ .

D'où les représentations de  $\Gamma_{\lambda,\theta}$  pour :

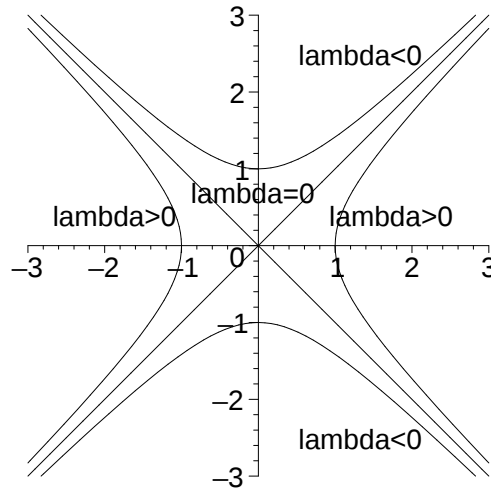
a)  $\theta = 0$ .



b)  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .



c)  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .



### Partie III - Application de $\Phi_1$

III.A -  $C_0$  a pour équation cartésienne  $z^2 = x^2 - y^2 \Leftrightarrow y^2 + z^2 - x^2 = 0$ . On reconnaît l'équation d'un cône de révolution d'axe  $(Ox)$ .

III.B - On a vu que la matrice  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$  est diagonalisable et qu'il existe  $P = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Dans le repère  $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  avec  $\vec{I} = \cos \frac{\theta}{2} \vec{i} + \sin \frac{\theta}{2} \vec{j}$ ,  $\vec{J} = -\sin \frac{\theta}{2} \vec{i} + \cos \frac{\theta}{2} \vec{j}$  et  $\vec{K} = \vec{k}$ ,  $C_\theta$  a pour équation cartésienne  $Z^2 = X^2 - Y^2$ . Donc :

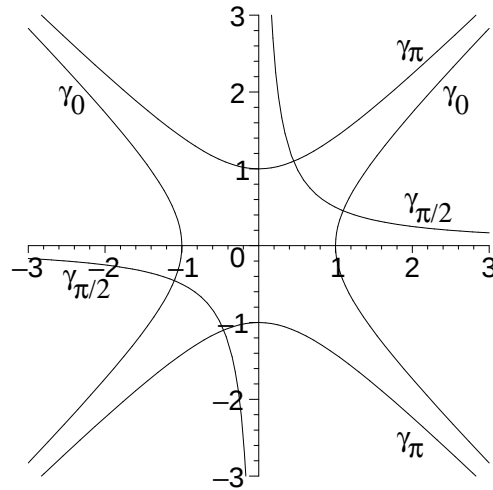
$C_\theta$  est un cône de révolution d'axe  $(OX)$

III.C -

$C_\theta$  se déduit de  $C_0$   
par la rotation d'axe  $(Oz)$  et d'angle  $\frac{\theta}{2}$

III.D -  $\gamma_\theta$  admet pour équation cartésienne  $\begin{cases} z = -1 \\ \cos \theta (x^2 - y^2) - 2 \sin \theta xy = -1 \end{cases}$

Dans le repère  $(\Omega(0, 0, -1), \vec{I}, \vec{J})$  avec  $\vec{I} = \cos \frac{\theta}{2} \vec{i} + \sin \frac{\theta}{2} \vec{j}$ ,  $\vec{J} = -\sin \frac{\theta}{2} \vec{i} + \cos \frac{\theta}{2} \vec{j}$ ,  $\gamma_\theta$  admet pour équation cartésienne  $X^2 - Y^2 = 1$ . C'est une hyperbole équilatère obtenue à partir de  $\gamma_0$  par la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\frac{\theta}{2}$ . D'où les représentations :



## Partie IV - Une autre application

IV.A.1)  $S_0$  a pour équation cartésienne  $z^2 = 2xy$ ; donc :

$$S_0 = \Phi_1(A) \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

IV.A.2)  $\det A > 0$  et  $\text{tr}(A) > 0$ ; d'après I.F.1),

$$S_0 \text{ est un c\^one de sommet } O$$

IV.A.3) L'équation réduite de  $S_0 = C_{\pi/2}$  est  $Y^2 + Z^2 = X^2$  dans le repère  $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  avec  $\vec{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$ ,  $\vec{J} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j})$  et  $\vec{K} = \vec{k}$ . Donc :

$$S_0 \text{ est un c\^one de r\'evolution de sommet } O \text{ et d'axe d'\acute{equation } \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}}$$

IV.B.1) Dans la base orthonormée directe  $(\vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$ , la rotation vectorielle d'axe  $\text{Vect}\{\vec{j}\}$  et d'angle  $a$ , a pour matrice  $\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Donc dans  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , elle a pour matrice  $\begin{pmatrix} \cos a & 0 & \sin a \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix}$ . D'où :

$$\text{La matrice de la rotation d'axe } (Oy) \text{ et d'angle } a \text{ est } A = \begin{pmatrix} \cos a & 0 & \sin a \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix}$$

IV.B.2) L'expression analytique de la rotation précédente est  $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = {}^tA \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a)X - \sin(a)Z \\ Y \\ \sin(a)X + \cos(a)Z \end{pmatrix}$ . D'où, si l'on note  $r$  la rotation d'axe  $(Oy)$  et d'angle  $a$ ,  $r(S_0)$  a pour équation :

$(\sin(a)X + \cos(a)Z)^2 = 2(\cos(a)X - \sin(a)Z)Y \Leftrightarrow$   
 $\sin^2 a X^2 + \cos^2 a Z^2 + 2 \cos a \sin a XZ - 2 \cos a XY + 2 \sin a YZ = 0.$   
 On reconnaît l'équation de  $S_{-a}$ . Donc :

$S_a$  est l'image de  $S_0$  par la rotation d'axe  $(Oy)$  et d'angle  $-a$

IV.B.3)

$S_a$  est donc un cône de révolution de sommet  $O$  d'axe dirigé par  $\cos a \vec{i} + \sin a \vec{k}$

IV.C.1)  $P_\lambda$  admet pour équation cartésienne  $\begin{cases} y = \lambda \\ z^2 = 2\lambda x \end{cases}$  Comme  $\lambda \neq 0$ ,

$P_\lambda$  est une parabole du plan d'équation  $y = \lambda$ , de sommet  $\Omega(0, \lambda, 0)$ , d'axe  $(\Omega x)$  et de foyer  $F_\lambda \left( \frac{\lambda}{2}, \lambda, 0 \right)$ .

L'ensemble  $L$  est alors  $D \setminus \{O\}$  où  $D$  a pour équation cartésienne  $\begin{cases} 2x = y \\ z = 0 \end{cases}$

IV.C.2)  $S_0$  étant un cône de révolution d'axe  $\Delta \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ , l'ensemble  $F$  est l'ensemble obtenu par révolution de  $D \setminus \{O\}$  autour de  $\Delta$  : cône de révolution privé de son sommet.

Soit  $\mathcal{R}'$  le repère  $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  de la question IV.A.3). Les formules de changement de repère sont :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

D'où  $D$  a pour équation dans  $\mathcal{R}'$   $\begin{cases} \sqrt{2}(X - Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \\ Z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X - 3Y = 0 \\ Z = 0 \end{cases}$

$F \cup \{O\}$  a donc pour équation dans  $\mathcal{R}'$  :

$$X = 3\varepsilon\sqrt{Y^2 + Z^2} \text{ (avec } \varepsilon = \pm 1) \Leftrightarrow X^2 = 9(Y^2 + Z^2),$$

et dans  $\mathcal{R}$  :

$$\frac{(x+y)^2}{2} = 9\frac{(-x+y)^2}{2} + 9z^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 10xy = 0. \text{ Donc :}$$

$F$  est l'ensemble d'équation cartésienne  $4x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 10xy = 0$  dans  $\mathcal{R}$ , privé de  $O$ . C'est un cône de révolution d'axe  $\Delta$  privé de son sommet.

△△△

Rédigé par

Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI

Lycée Chaptal, 6 allée Chaptal 22000 St Brieuc

Tel. 0296639414

Adresse électronique : BRON.Pierre@wanadoo.fr