Concours Mines-Ponts-Télécom 2021

Première épreuve de mathématiques

Durée 3 heures

1) La formule de Stirling s'écrit :

$$n! \sim_{\infty} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\varepsilon_n = \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}}\ \left(\frac{e}{n}\right)^n - 1.$$

On peut alors écrire que $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, selon la formule de Stirling. L'égalité demandée se déduit également d'un simple calcul algébrique.

2) On écrit, par définition de $\lfloor . \rfloor$

$$\forall x \geqslant 0, \lambda x + \mu - 1 < \lfloor \lambda x + \mu \rfloor \leqslant \lambda x + \mu.$$

En effet, d'une part $\{k \in \mathbb{Z},\ k \leqslant \lambda x + \mu\}$ est une partie majorée non vide de $\mathbb{Z}$, elle admet donc un plus grand élément, ce qui justifie le max et

$$\lfloor \lambda x +\ \mu \rfloor \in \{k \in \mathbb{Z},\ k \leqslant \lambda x + \mu\} \Rightarrow \lfloor \lambda x + \mu \rfloor \leqslant \lambda x + \mu.$$

et, d'autre part,

$$\lfloor \lambda x + \mu \rfloor + 1 \notin \{k \in \mathbb{Z},\ k \leqslant \lambda x + \mu\} \Rightarrow \lfloor \lambda x + \mu \rfloor + 1 > \lambda + \mu.$$

On reprend alors la double inégalité annoncée. Comme $\lambda > 0$ et $x \to +\infty$, on peut considérer $x > 0$, de sorte que $\lambda > 0$. On divise alors chaque membre par $\lambda x > 0$, ce qui nous donne

$$1 + \frac{\mu - 1}{\lambda x} < \frac{\lfloor x + \mu \rfloor}{\lambda x} \leqslant 1 + \frac{\mu}{\lambda x}.$$

Les membres extrêmes tendent tous les deux vers 1. Le théorème d'encadrement permet alors d'affirmer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x + \mu \rfloor}{\lambda x} = 1.$$

Ce qui signifie exactement

$$\lfloor \lambda x + \mu \rfloor \sim \lambda x.$$

Pour la seconde propriété, on part de l'inégalité

$$\lambda x + \mu \leqslant \lceil \lambda x - \mu \rceil \leqslant \lambda x + \mu + 1.$$

La suite du raisonnement est comme précédemment.

3) La fonction $t \mapsto \Phi(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, selon les théorèmes sur les fonctions usuelles. Il y a donc deux singularités, $-\infty$ et $+\infty$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_{\to-\infty}^{\to+\infty} \Phi(t)\, dt.$

Comme Φ est une fonction paire, il suffit d'étudier l'une des deux singularités. On remarque que l'on a la limite

$$\lim_{t\to+\infty} (1 + t^2)\Phi(t) = \lim_{t\to+\infty} (1 + t^2)\frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = 0.$$

On en tire

$$0 \leqslant \Phi(t) = o\left(\frac{1}{1+t^2}\right).$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue, positive et intégrable sur $[0;+\infty[$. En effet, on a

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(x) \to \frac{\pi}{2} \text{ si } x \to +\infty.$$

Le théorème de comparaison permet alors d'affirmer que Φ est intégrable sur $[0;+\infty[$. Par parité, on conclut que

$$\int_{\to-\infty}^{\to+\infty} \Phi(t)\,dt \text{ converge.}$$

4) Il s'agit d'un simple développement limité de la fonction ζ en 0. Le cours nous donne déjà le développement limité $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, lorsque $x \to 0$. On reporte dans $\zeta(x)$,

$$\begin{aligned}\zeta(x) = (x+1)\ln(x+1) &= (x+1)(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))\\ &= x^2 - \frac{x^3}{2} + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\\ &= x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).\end{aligned}$$

5) Notons, pour $k \in [\![0;n]\!]$, $u_k = \mathbb{P}(X_n = k)$. On veut montrer que u_k est maximale pour $k = x_n$. On a pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$,

$$u_k = \binom{n}{k}^n p^k q^{n-k} > 0, \text{ car } p \in]0;1[.$$

On peut alors, pour étudier les variations cette suite, calculer

$$\begin{aligned}\frac{u_{k+1}}{u_k} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}p^{k+1}q^{n-k-1}\frac{k!(n-k)!}{n!}\frac{1}{p^k q^{n-k}}\\ &= \frac{n-k}{k+1}\frac{p}{q}\end{aligned}$$

On regarde pour quelles valeurs de $k \in [\![0;n-k]\!]$ cette expression est strictement inférieure ou strictement supérieure à 1. Dans le premier cas, on a les calculs suivants, puisque $(k+1)q > 0$.

$$\begin{aligned}\frac{n-k}{k+1}\frac{p}{q} < 1 &\iff (n-k)p < (k+1)q = (k+1)(1-p) = k - kp + 1 - p\\ &\iff np - q < k\end{aligned}$$

Des calculs analogues nous conduisent à

$$\frac{n-k}{k+1}\frac{p}{q} > 1 \iff np - q > k.$$

Si $np-q$ n'est pas un entier, alors, tant que $k < np - q$, c'est-à-dire $k < \lceil np - q \rceil$, on a $u_k < u_{k+1}$ et tant que $k > np - q$, c'est-à-dire $k \geqslant \lceil pn - q \rceil$, on a $u_k > u_{k+1}$.
On en déduit, pour

$$u_0 < u_1 < \ldots < u_{x_n} > \ldots > u_n.$$

Si $k = np - q = x_n$ est un entier, on a deux alors $u_k = u_{k+1}$, ce qui ne change rien au fait que u_{x_n} est une valeur maximale (atteinte ici en deux points).

6) On utilise l'équivalent de la question 2

$$x_n = \lceil np - q \rceil \sim_{+\infty} np \to +\infty,$$

puisque $p \in]0;1[$.

Pour la deuxième propriété, on écrit l'équivalence sous la forme d'un développement limité : $x_n = np + o(n)$. On reporte,

$$n - x_n = n(1-p) + o(n).$$

Comme $p \in]0;1[$, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty}(n - x_n) = +\infty$.

Ensuite, on cherche un équivalent de $p_n = \mathbb{P}(X_n = x_n)$ à l'aide de la formule de Stirling, appliquée en n, $x_n \to +\infty$, et $n - x_n \to +\infty$,

$$p_n = \frac{n!}{x_n!(n-x_n)!}\,p^{x_n}q^{n-x_n} \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi x_n}}\left(\frac{e}{x_n}\right)^{x_n}\frac{1}{\sqrt{2\pi(n-x_n)}}\left(\frac{e}{n-x_n}\right)^{n-x_n} p^{x_n}q^{n-x_n}$$

$$\sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}}\frac{e^{x_n}e^{n-x_n}}{e^n}.\frac{n^n p^{x_n}q^{n-x_n}}{x_n^{x_n}(n-x_n)^{n-x_n}}.\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{x_n(n-x_n)}}$$

J'ai regroupé, pour plus de clarté, les facteurs qui se simplifient. Pour les deux premiers facteurs, tout se simplifie en $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Ensuite, on a un facteur qui se retrouve dans la formule de l'énoncé. Il nous reste alors le dernier facteur. Montrons qu'il est équivalent à $\dfrac{1}{\sqrt{npq}}$.

On utilise à nouveau la question 2, qui nous donne les développements limités

$$x_n = pn + o(n) \text{ et } n - x_n = (1-p)n + o(n).$$

On reporte dans notre expression

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{x_n(n-x_n)}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(pn+o(n))(qn+o(n))}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pqn^2+o(n^2)}} \sim \frac{1}{\sqrt{npq}}$$

Finalement, par produit d'équivalent, ce qui est tours licite,

$$p_n \sim \frac{1}{\sqrt{npq}}\frac{n^n p^{x_n}q^{n-x_n}}{\sqrt{2\pi}x_n^{x_n}(n-x_n)^{n-x_n}},$$

ce qui est le résultat demandé.

7) Les deux arguments de la fonction ζ intervenant dans l'énoncé, sont bien supérieurs à -1. On a, en effet

$$x_n > 0 \Rightarrow \frac{x_n - np}{np} > -1 \text{ et } n - x_n \Rightarrow \frac{np - x_n}{nq} > -1.$$

On commence par prendre le logarithme du membre de droite.

$$-np\zeta\left(\frac{x_n-np}{np}\right) - nq\zeta\left(\frac{np-x_n}{nq}\right) = -np\left(\frac{x_n-np}{np}+1\right)\ln\left(\frac{x_n-np}{np}+1\right)$$
$$- nq\left(\frac{np-x_n}{nq}+1\right)\ln\left(\frac{np-x_n}{nq}+1\right).$$

On remarque que $\dfrac{x_n-np}{np}+1 = \dfrac{x_n}{np}$ et $\dfrac{np-x_n}{nq}+1 = \dfrac{n-x_n}{nq}$, ce qui permet de simplifier l'expression précédente,

$$\begin{aligned}
-np\zeta(\frac{x_n-np}{np})-nq\zeta(\frac{np-x_n}{nq}) &= -x_n\ln(x_n)+x_n\ln(np)\\
&-(n-x_n)\ln(n-x_n)+(n-x_n)\ln(nq)\\
&= -x_n\ln(x_n)+x_n\ln(n)+x_n\ln(p)\\
&-(n-x_n)\ln(n-x_n)+(n-x_n)\ln(n)-(n-x_n)\ln(q)\\
&= -x_n\ln(x_n)+x_n\ln(p)\\
&-(n-x_n)\ln(n-x_n)+n\ln(n)+(n-x_n)\ln(q)
\end{aligned}.$$

On passe alors au membre de gauche,

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{x^{x_n}(n-x_n)^{n-x_n}}\right) &= n\ln(n)+x_n\ln(p)+(n-x_n)\ln(q)\\
&-x_n\ln(x_n)-(n-x_n)\ln(n-x_n).
\end{aligned}$$

À l'ordre près, les deux expressions sont égales. On a bien l'égalité demandée.

8) On va utiliser la question 4, qui nous donne un équivalent de 0 en ζ. Comme on a l'encadrement,

$$\lceil np-q\rceil-1\leqslant np-q\leqslant\lceil np-q\rceil,$$

on peut en déduire $x_n=np+O(1)$. On en déduit

$$\frac{x_n-np}{np}=O(1/n)\text{ et }\frac{np-x_n}{nq}=O(1/n).$$

On reporte dans l'expression de ζ

$$np\zeta\left(\frac{x_n-np}{np}\right)+nq\zeta\left(\frac{np-x_n}{nq}\right)=pn\left(\frac{x_n-np}{np}\right)+nq\left(\frac{np-x_n}{nq}\right)+nO(1/n^2)$$

On en déduit que ce terme tend vers 1.

Le terme de droite dans l'équivalent de la question 6 tend vers $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Il en va donc de même du membre de gauche. On obtient le résultat demandée :

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{npq}p_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

9) Y_n prend ses valeurs dans

$$\{\tau_{n,k}\}_{k\in[\![0;n]\!]}.$$

On remarque également, par définition de Y_n et de $\tau_{n,k}$

$$Y_n=\tau_{n,k}\iff\frac{X_n-np}{\sqrt{npq}}=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\iff X_n=k,$$

ce qui nous conduit à écrire,

$$\forall k\in[\![0;n]\!],\ \mathbb{P}(Y_n=\tau_{n,k})=\mathbb{P}(X_n=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Pour montrer que Y_n est centrée, on calcule son espérance,

$$\mathbb{E}(Y_n)=\mathbb{E}\left(\frac{X_n-np}{\sqrt{npq}}\right)=\frac{\mathbb{E}(X_n)-np}{\sqrt{npq}}=0,$$

puisque X_n suit une loi binomiale de paramètres (n,p), donc d'espérance np.

Pour montrer que Y_n est réduite, on calcule sa variance. Les propriétés de la variance nous donnent,

$$v(Y_b)=\frac{1}{npq}v(X_n)=1,$$

puisque X_n suit une loi binomiale de paramètres (n,p), dont la variance est npq.

10) Lorsque n tend vers $+\infty$, on a les limites suivantes,

$$\lim_{n\to+\infty} \tau_{n,0} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-np}{\sqrt{npq}} = -\infty,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \tau_{n,n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{nq}{\sqrt{npq}} = +\infty,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{npq}} = 0.$$

On en déduit le résultat par définition de la limite.

11) On rappelle que l'ensemble des fonctions en escalier est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

La fonction $t \mapsto k_n(t) = \lfloor \sqrt{npq}t + np \rfloor$ est en escalier comme composition d'une fonction en escalier et d'une fonction affine.

Toute fonction constante est en escalier.

Par combinaison linéaire $t \mapsto e_n(t) = \dfrac{1}{\sqrt{npq}} k_n(t) - \dfrac{np}{\sqrt{npq}}$ est donc une fonction en escalier.

On aura, dans la suite, besoin de connaître les points de saut de e_n, ou, ce qui revient au même, de k_n. Il s'agit des points pour lesquels $\sqrt{npq}t + np$ sont entiers. C'est-à-dire les points de la forme

$$\tau_{n,k} = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Plus précisément, puisque la fonction partie entière est continue à droite

$$\forall t \in \left[\tau_{n,k}, \tau_{n,k+1}\right], \; e_n(t) = e_n(\tau_{n,k}) = \tau_{n,k}.$$

Pour la suite de la question, on part de l'inégalité suivante, conséquence directe de la définition de la partie entière,

$$\lfloor \sqrt{npq}t + np \rfloor \leqslant \sqrt{npq}t + np < \lfloor \sqrt{npq}t + np \rfloor + 1 \Rightarrow k_n(t) \leqslant \sqrt{npq}t + np < k_n(t) + 1.$$

On retranche np dans chaque membre

$$k_n(t) - np \leqslant \sqrt{npq}t < k_n(t) - np + 1.$$

Puis, on les divise par $\sqrt{npq}$. Ça ne change pas le sens de l'inégalité puisque $\sqrt{npq} > 0$.

$$\frac{k_n(t) - np}{\sqrt{npq}} \leqslant t < \frac{k_n(t) - np}{\sqrt{npq}} + \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

C'est bien par définition de e_n,

$$e_n(t) \leqslant t < e_n(t) + \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

On peut réécrire cette inégalité sous la forme suivante

$$\forall t \in \mathbb{R}, \; t - \frac{1}{\sqrt{npq}} \leqslant e_n(t) \leqslant t.$$

Le théorème d'encadrement permet alors d'affirmer que e_n converge simplement vers la fonction $t \mapsto t$.

12) Pour la première partie de la question, on commence par déterminer la limite de

$$\tau_{n,k_n(a)} = \frac{\lfloor \sqrt{npq}a + np \rfloor - np}{\sqrt{npq}}.$$

Pour ce calcul on procède comme précédemment

$$\sqrt{npq}a + np - 1 \leqslant \lfloor \sqrt{npq}a + np \rfloor \leqslant \sqrt{npq}a + np.$$

On retranche np

$$\sqrt{npq}a - 1 \leqslant \lfloor \sqrt{npq}a \rfloor - np \leqslant \sqrt{npq}a.$$

On divise par $\sqrt{npq} > 0$,

$$a - \frac{1}{\sqrt{npq}} \leqslant \tau_{n,k_n(a)} \leqslant a.$$

On fait alors tendre n vers $+\infty$, pour obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty} \tau_{n,k_n(a)} = a$.

On étudie également la limite de $\tau_{n,k_n(b)+1}$. Le même raisonnement, nous donne

$$b \leqslant \tau_{n,k_n(b)+1} \leqslant b + \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

On a bient la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \tau_{n,k_n(b)+1} = b$.

Pour conclure, on écrit que la fonction

$$(a,b) \mapsto \int_0^b \Phi(t)\,dt + \int_a^0 \Phi(t)\,dt$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$, puisque Φ est continue sur $\mathbb{R}$. C'est le théorème fondamental de calcul intégrale de Leibniz.

On en déduit alors le résultat par composition des limites.

Pour montrer la dernière égalité demandée, on évalue les deux membres séparément. On a, d'une part,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(e_n(a) \leqslant Y_n \leqslant a_n(b)) &= \mathbb{P}\left(\frac{k_n(a)-np}{\sqrt{npq}} \leqslant \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant \frac{k_n(b)-np}{\sqrt{npq}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(k_n(a) \leqslant X_n \leqslant k_n(b)\right) \\
&= \sum_{\ell=k_n(a)}^{k_n(b)} \mathbb{P}(X_n = \ell)
\end{aligned}$$

D'autre part, on écrit l'intégrale d'une fonction en escalier. La fonction f_n est en escalier. Les sauts ont lieu aux points $t_k = \dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$, avec $k \in [\![0,n]\!]$, qui sont les points qui portent la loi de probabilité de Y_n.

On rappelle également $\mathbb{P}(Y_n = \dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}) = \mathbb{P}(X_n = k.)$ On note que l'intervalle entre deux points ξ_k est constant, égal à $\dfrac{1}{\sqrt{npq}}$. On obtient les égalités,

$$\forall t \in \left[t_\ell, t_{\ell+1}\right] \;\; f_n(t) = \sqrt{npq}\,\mathbb{P}(X_n = \ell),$$

$$\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t)\,dt = \sum_{\ell=\lfloor\sqrt{npq}a+np\rfloor}^{\lfloor\sqrt{npq}b+np\rfloor} \sqrt{npq}\,\mathbb{P}(X_n = \ell).$$

Les deux expressions sont égales, on a donc bien le résultat demandé.

13) On commence par développer l'expression de $f_n(\tau_{n,k})$

$$f_n(\tau_{n,k}) = \sqrt{npq}\,\mathbb{P}(Y_n = e_n(\tau_{n,k})).$$

On a vu à la question 11 $e_n(\tau_{n,k}) = \tau_{n,k}$ et, par conséquent,

$$f_n(\tau_{n,k}) = \sqrt{npq}\,\mathbb{P}(Y_n = \tau_{n,k}) = \sqrt{npq}\,\mathbb{P}(X_n = k) = \sqrt{npq}\binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

On utilise alors la relation de la première question, pour $n > 0$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi k}\sqrt{2\pi(n-k)}}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(\frac{e}{k}\right)^k\left(\frac{e}{n-k}\right)^{n-k}\frac{(1+\varepsilon_n)}{(1+\varepsilon_k)(1+\varepsilon_{n-k})}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}}\frac{n^k}{k^k}\frac{n^{n-k}}{(n-k)^{n-k}}$$

On obtient alors le résultat demandé en multipliant par $\sqrt{npq}p^kq^{n-k}$.

14) On commence par déterminer un équivalent de $k_n(t)$ et un de $n-k_n(t)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et $t\in\mathbb{R}$, fixé. On part de l'inégalité

$$k_n(t) = \lfloor\sqrt{npq}t+np\rfloor \leqslant \sqrt{npq}t+np \leqslant \lfloor\sqrt{npq}t+np\rfloor + 1 = k_n(t)+1.$$

Comme $n\to+\infty$, on a la limite $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{npq}+np) = +\infty$. La deuxième inégalité nous donc donc $\lim_{n\to+\infty} k_n(t) = +\infty$, en particulier $k_n(t)$ est strictement positif. On peut donc diviser dans les trois membres,

$$1 \leqslant \frac{\sqrt{npq}t+np}{k_n(t)} \leqslant 1+\frac{1}{k_n(t)}.$$

Le théorème d'encadrement permet de conclure $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{npq}t+np}{k_n(t)} = 1$. On écrit ceci sous la forme d'équivalent, et l'on simplifie par le terme négligeable. On obtient

$$k_n(t)\sim np.$$

Pour l'équivalent de $n-k_n(t)$, on repart de l'inégalité précédente, ce qui donne

$$n-k_n(t) \geqslant nq-\sqrt{npq} \geqslant n-k_n(t)-1.$$

Le même raisonnement que précédemment, nous donne

$$n-k_n(t)\sim nq.$$

On reporte alors dans l'expression suivante, sachant que les équivalents passent au produit

$$\frac{pqn^2}{k_n(t)(n-k_n(t)}\sim\frac{pqn^2}{npnq} = 1.$$

La limite de l'énoncé s'obtient en prenant la racine carrée. C'est possible car la fonction racine carrée est continue en 1.

Pour la seconde limite il s'agit simplement d'appliquer les théorèmes de produit et de quotient de limites.

15) La démarche est la même que pour la question *7*. Commençons par calculer les deux arguments de la fonction ζ.

$$\sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k} = \sqrt{\frac{q}{np}}\frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{k-np}{np} \text{ et } \sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k} = \sqrt{\frac{p}{nq}}\frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{k-np}{nq}.$$

On reporte dans l'expression de ζ,

$$\begin{aligned}
-np\zeta&\left(\sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k}\right) - nq\zeta\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k}\right)\\
&= -np\zeta\left(\frac{k-np}{np}\right) - nq\zeta\left(\frac{np-k}{nq}\right).\\
&= -np\left(\frac{k-np}{np}+1\right)\ln\left(\frac{k-np}{np}+1\right) - nq\left(\frac{np-k}{nq}+1\right)\ln\left(\frac{np-k}{nq}+1\right).\\
&= -k\ln(k)+k\ln(np)-(n-k)\ln(n-k)+(n-k)\ln(nq),
\end{aligned}$$

puisque $\frac{np-k}{nq}+1 = \frac{np+nq-k}{nq} = \frac{n-k}{nq}$, sachant que $p+q=1$.

Étudions maintenant le logarithme du membre de droite, on obtient
$$k\ln(p)+(n-k)\ln(q)-k\ln(k)+k\ln(n)-(n-k)\ln(n-k)+(n-k)\ln(n).$$
On s'assure donc que les deux membres sont égaux.

16) On montre que le logarithme du membre de droite tend vers $\dfrac{t^2}{2}$. On rappelle le résultat suivant de la question 12 $\lim\limits_{n\to+\infty}\tau_{n,k_n(t)}=t$, pour $t\in\mathbb{R}$. On en déduit les équivalents, lorsque $n\to+\infty$,
$$\sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k_n(t)}\sim t\sqrt{\frac{q}{np}}\to 0,\text{ et }\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k_n(t)}\sim t\sqrt{\frac{p}{nq}}\to 0.$$
On utilise alors le développement limité de la question 4
$$\begin{aligned}
&=np\zeta\left(\sqrt{\frac{q}{np}}\tau_n,k_n(t)\right)+nq\zeta\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k,(t)}\right)\\
&=np\sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k_n(t)}+\frac{npq}{2np}\tau^2_{n,k_n(t)}-nq\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k_n(t)}+\frac{npq}{2nq}\tau^2_{n,k(t)}+o(1),\\
&=\sqrt{npq}t-\sqrt{npq}t+\frac{p+q}{2}t^2+o(1),\\
&=\frac{t^2}{2}+o(1).
\end{aligned}$$
En reportant dans l'expression de la question précédente, on obtient
$$\frac{p^{k_n(t)}q^{n-k_n(t)}n^n}{k_n(t)^{k_n(t)}(n-k_n(t))^{n-k_n(t)}}=e^{-t^2/2+o(1)}\to e^{-\frac{t^2}{2}}.$$
17) Selon la question 11, pour $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est en escalier. Les points de sauts sont les $\tau_{n,k}$, pour $k\in[\![0,n]\!]$. On a la relation
$$\tau_{n,k_n(t)}\leqslant t<\tau_{n,k_n(t)+1}\Rightarrow f_n(\tau_{n,k_n(t)})=f_n(t).$$
Il suffit donc de montrer que $f_n(\tau_{n,k_n(t)})$ converge vers $\Phi(t)$.

La question 13 permet d'écrire $f_n(\tau_{n,k_n(t))}$ sous forme d'un produit de quatre facteurs. Le premier facteur est égal à $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Il est constant. Le second facteur est égal à $\sqrt{\dfrac{pqn^2}{k_n(t)(n-k_n(t))}}$. Il converge simplement vers 1 selon la question 14. Le troisième facteur est égal à
$$\frac{p^{k_n(t)}q^{n-k_n(t)}}{\left(\frac{k_n(t)}{n}\right)^{k_n(t)}\left(\frac{n-k_n(t)}{n}\right)^{n-k_n(t)}}.$$
Il converge simplement vers $e^{-t^2/2}$ selon la question 16.

Le dernier facteur, égal à $\dfrac{1+\varepsilon_n}{(1+\varepsilon_k)(1+\varepsilon_{n-k})}$, converge simplement vers 1 selon la question 14.

Par produit de limites, on en déduit, à $t\in\mathbb{R}$, fixé,
$$f_n(t)=f_n(\tau_{n,k_n(t)})\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}.$$
Pour montrer la convergence de l'intégrale, on utilise le théorème de convergence dominée. On a la première hypothèse, à savoir la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers Φ. Pour l'hypothèse de domination, on fixe $t\in[a;b]$ et n entier naturel, et l'on majore $f_n(t)$,
$$0\leqslant f_n(t)=\sqrt{npq}\mathbb{P}(Y_n=e_n(t))=\sqrt{npq}\,\mathbb{P}(X_n=k_n(t))\leqslant\sqrt{npq}\,\mathbb{P}(X_n=x_n)=\sqrt{npq}p_n,$$

où x_n a été défini question 5. La question 8 nous dit également que le dernier membre est convergent si $n \to +\infty$. Il est donc borné, de manière indépendante de t. Il existe $M > 0$ tel que

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times [a;b],\ 0 \leqslant 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \sqrt{npq}p_n \leqslant M.$$

Comme l'intervalle d'intégration est fermé borné, la fonction constante $t \mapsto M$ est intégrable sur $[a;b]$. On peut appliquer le théorème de convergence dominée, qui nous donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt = \int_a^b \Phi(t)\,dt.$$

18) Pour la première partie de la question, on part de la question 12 qui nous donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(e_n(a) \leqslant Y_n \leqslant e_n(b)) &= \int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t)\,dt \\ &= \int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{a} f_n(t)\,dt + \int_a^b f_n(t)\,dt + \int_b^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t)\,dt.,\end{aligned}$$

On va montre que le premier membre tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. On a en effet, en reprenant la notation M de la question précédente

$$0 \leqslant \int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{a} f_n(t)\,dt \leqslant \int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{a} M\,dt = M(a - \tau_{n,k_n(a)}).$$

Ce dernier membre tend vers 0. C'est ce que nous avons démontré à la question 12.

On procède de même pour le dernier membre, sachant que $\tau_{n,k_n(b)+1} = \tau_{n,k_n(b)} + \dfrac{1}{\sqrt{npq}}$.

Il ne reste alors que le terme du milieu qui tend effectivement vers $\displaystyle\int_a^b \Phi(t)\,dt$ suivant la question précédente.

On fait le lien entre la probabilité $\mathbb{P}(e_n(a) \leqslant Y_n \leqslant e_n(b))$ et l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,dt$.

L'inégalité $e_n(a) \leqslant a \leqslant e_n(a) + \dfrac{1}{\sqrt{npq}}$, démontrée à la question 11, nous permet d'écrire,

$$\mathbb{P}(e_n(a) \leqslant Y_n \leqslant e_n(b)) = \mathbb{P}(e_n(a) \leqslant Y_n < a) + \mathbb{P}(a \leqslant Y_n \leqslant b) - \mathbb{P}(e_n(b) < Y_n \leqslant b)$$

On sait que les valeurs prises par Y_n sont les $\tau_{n,k}$ pour $k \in [\![0;n]\!]$. Ces points sont équirépartis et espacés de $\dfrac{1}{\sqrt{npq}}$. Ainsi, Y_n ne peut prendre qu'une seule valeur entre $e_n(a)$ et a (à savoir $e_n(a)$). On en déduit les inégalités

$$\mathbb{P}(e_n(a) \leqslant Y_n \leqslant a) \leqslant \mathbb{P}(X_n = x_n) \leqslant p_n \to 0,$$

selon la question 8. En remplaçant a par b, on obtient également que le dernier terme tend vers 0.

Le membre de gauche tend vers $\displaystyle\int_a^b \Phi(t)\,dt$. Par somme de limite, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(a \leqslant Y_n \leqslant b) = \int_a^b \Phi(t)\,dt.$$

19) Pour cette question on utilise les notations précédente ainsi que la question 18. On commence par écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchébytchev, appliqué à Y_n, sachant qu'elle est centrée réduite, ce qui signifie que $\mathbb{E}(Y_n) = 0$ et $v(Y_n) = 1$. On obtient, pour $T > 0$,

$$\mathbb{P}(|Y_n| \geqslant T) \leqslant \frac{1}{T^2}.$$

On passe au complémentaire

$$1-\frac{1}{T^2}\leqslant \mathbb{P}(-T\leqslant Y_n\leqslant T)\leqslant 1.$$

On fait tendre alors n vers l'infini, en utilisant la question 18,

$$1-\frac{1}{T^2}\leqslant \int_{-T}^{T}\Phi(t)\,dt\leqslant 1.$$

Comme Φ est intégrable sur $\mathbb{R}$, en faisant tendre T vers $+\infty$, on obtient,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\,dt=1.}$$

20) On va montrer

$$\mathbb{P}(Y\leqslant b)\to\int_{-\infty}^{b}\Phi(t)\,dt.$$

On calcule la différence, en faisant intervenir le résultat de la question 18.

$$|\mathbb{P}(Y_n\leqslant b)-\int_{-\infty}^{b}\Phi(t)\,dt|\leqslant|\mathbb{P}(a\leqslant Y_n\leqslant b)-\int_{a}^{b}\Phi(t)\,dt|+\mathbb{P}(Y_n\leqslant a)+\int_{-\infty}^{a}\Phi(t)\,dt \qquad (*)$$

On procède alors par une découpe en trois. Soit $\varepsilon>0$. Comme Φ est intégrable sur $\mathbb{R}$, il existe $a_0\in\mathbb{R}_-$, tel que, si $a\leqslant a_0$, alors on a

$$0\leqslant\int_{-\infty}^{a}\Phi(t)\,dt\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

On a l'implication, pour $a<0$ $Y_n\leqslant a\Rightarrow|Y_n|\geqslant a$. On applique l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}(Y_n\leqslant a)\leqslant\mathbb{P}(|Y_n|\geqslant a)\leqslant\frac{\mathbb{E}(Y_n^2)}{a^2}.$$

On sait que Y_n est une variable centrée réduite selon la question 9, on a donc

$$1=v(Y_n)=\mathbb{E}(Y_n^2)-(\mathbb{E}Y_n)^2=\mathbb{E}(Y_n^2).$$

En simplifiant l'écriture, on obtient

$$0\leqslant\mathbb{P}(Y_n\leqslant a)\leqslant\frac{1}{a^2}.$$

Il existe donc un $a<0$, tel que

$$0\leqslant\mathbb{P}(Y_n\leqslant a)\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour ce a, fixé, indépendamment de n, la question 18 nous assure l'existence d'un $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, si $n\geqslant n_0$, on a

$$0\leqslant|\mathbb{P}(a\leqslant Y_n\leqslant b)-\int_{a}^{b}\Phi(t)\,dt|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

On reporte les trois majorations dans l'inégalité $(*)$ pour obtenir

$$|\mathbb{P}(Y_n\leqslant b)-\int_{-\infty}^{b}\Phi(t)\,dt|\leqslant\varepsilon.$$

On a bien montré, en reprenant ce qui est écrit en rouge, $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(Y_n\leqslant b)=\int_{-\infty}^{b}\Phi(t)\,dt.}$

21) On utilise le théorème de changement de variable. On commence par constater que, comme φ' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors, selon le théorème de bijection, la fonction φ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\varphi(\mathbb{R})=\mathbb{R}$,

selon l'énoncé. Elle admet donc une bijection réciproque φ^{-1}. Comme $\varphi' \neq 0$, le théorème de dérivation d'une bijection réciproque nous permet d'écrire que φ^{-1} est bien de classe C^1, également. Pour la suite du raisonnement, on pose $a = \varphi^{-1}(\alpha)$ et $b = \varphi^{-1}(\beta)$, avec les abus de langage éventuels, si α ou β n'est pas réel, $\varphi^{-1}(+\infty) = \lim\limits_{+\infty} \varphi^{-1}$ et $\varphi(-\infty) = \lim\limits_{-\infty} \varphi^{-1}$. Ces limites existent bien puisque φ' garde un signe (strict) constant, donc φ est (strictement) monotone sur $\mathbb{R}$.
Par bijectivité de φ, on peut écrire, puisque $Z_n = \varphi(Y_n)$

$$\mathbb{P}(\alpha \leqslant Z_n \leqslant \beta) = \mathbb{P}(\varphi^{-1}(\alpha) \leqslant Y_n \leqslant \varphi^{-1}(\beta)) \to \int_a^b \Phi(t)\, dt.$$

Posons $t = \varphi^{-1}(u)$ ou $u = \varphi(t)$. C'est un changement de variable bijectif, C^1, et il ne change pas la nature convergente de l'intégrale, selon le théorème de changement de variable pour les intégrales impropres. On peut alors écrire

$$\int_a^b \Phi(t)\, dt = \int_\alpha^\beta \Phi(\varphi^{-1}(u))(\varphi^{-1})'(u)\, du.$$

Ce qui est bien la conclusion, avec $\Psi(u) = \Phi(\varphi^{-1}(u))(\varphi^{-1})'(u)$.
Dans le cas où $\varphi(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$, on peut appliquer la formule précédente, avec α et β dans $\overline{\varphi(\mathbb{R})}$, l'adhérence étant prise dans $\overline{\mathbb{R}}$, par exemple.