Préambule

Dans tout le problème, (E) est un espace affine euclidien orienté de dimension 2 ou 3. La distance de deux points P et Q est notée PQ.

À toute partie L de (E) on fait correspondre l'ensemble L', éventuellement vide, des points M de (E) ayant la propriété suivante : il existe dans L trois points distincts A, B, C tels que AB = BC = CA et tels que M soit leur isobarycentre.

Autrement dit, L' est l'ensemble des centres des triangles équilatéraux dont les trois sommets distincts appartiennent à L (on dira aussi qu'un tel triangle est inscrit dans L), le centre d'un triangle équilatéral désignant l'isobarycentre de ses sommets.

Les différentes parties sont indépendantes. Les figures seront appréciées, ainsi que les remarques géométriques.

Partie I

(E) est ici de dimension 2. Le but, dans cette partie, est d'étudier L' lorsque L est le pourtour d'un carré.

I.1) Dans cette question, L est la réunion de trois droites distinctes D, D' et D", la droite D étant perpendiculaire aux deux autres. On suppose, sans limiter la généralité, que l'on a choisi un repère orthonormal direct Oxy dans lequel D porte l'axe Ox, D' l'axe Oy et D" la droite d'équation $x = 1$.

On appelle P le point de coordonnées (1, 0), J le point d'ordonnée positive tel que le triangle OPJ soit équilatéral.

On appelle A le lieu des points M centres des triangles équilatéraux ABC tels que A soit sur D, B sur D' et C sur D" et que, de plus, l'ordonnée de M soit positive.

a) Soit ABC un triangle répondant à la question, H le milieu de BC et t le coefficient angulaire (ou pente) de la droite (BC).

Préciser la similitude vectorielle qui fait passer de $\overrightarrow{BC}$ à $\overrightarrow{AH}$. En déduire en fonction de t les coordonnées de $\overrightarrow{AH}$. Donner les coordonnées de H ; montrer que H n'est autre que le point J défini ci-dessus.

b) On fait maintenant passer par J une droite Δ_t de coefficient angulaire t (t étant un réel quelconque), qui coupe D' en B_t et D" en C_t. On appelle A_t le point d'intersection avec D de la perpendiculaire en J à Δ_t. Donner les coordonnées de A_t, B_t, C_t et de leur isobarycentre. Que dire du triangle $A_t B_t C_t$?

c) Déduire A de ce qui précède.

d) Déterminer L', en n'oubliant pas qu'un triangle équilatéral inscrit dans L peut avoir deux de ses sommets sur une seule des droites D, D', D".

I.2) Les hypothèses et les notations sont celles de la question précédente. On appelle R le point de coordonnées (0, 1), Q le point de coordonnées (1,1). Soit K le pourtour du carré OPQR c'est-à-dire la réunion des quatre segments [OP], [PQ], [QR], [RO].

a) Déterminer l'ensemble des valeurs t réelles telles que, si A_t, B_t, C_t sont les points définis en I.1) b), on ait à la fois :

- A_t sur le segment [OP],
- B_t sur le segment [OR],
- C_t sur le segment [PQ].

Cet ensemble est un intervalle (I) que l'on précisera.

b) Montrer que, si t décrit (I), A_t, B_t, C_t décrivent chacun un segment que l'on précisera. Ces segments sont respectivement notés S_A, S_B, S_C.

c) Quelle est alors la partie S_M de A décrite par M ? Comment se déduit-elle de S_A ? Quelles sont les intersections de S_M avec les diagonales de K ?

d) Faire une figure représentant le carré OPQR, le point J et les 4 segments S_A, S_B, S_C, S_M.

I.3) On prend pour L, dans cette question, le pourtour d'un carré quelconque du plan (E).

a) Si, A, B, C sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans L, deux de ces points peuvent-ils être sur un même côté de L ?

b) A l'aide de la question I.2) déterminer L'.

Option M : voir page 157 -

Partie II

On suppose dans toute cette partie que (E) est de dimension 2. Les sections II.A et II.B sont indépendantes.

Section II.A

II.A.1) On suppose ici que L est une hyperbole. Il existe donc un repère affine $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant unitaires, et une constante k non nulle, tels que l'équation de L dans ce repère soit $xy - k = 0$. On pose, de plus, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \cos\theta$.

A SUIVRE

Étant donné 4 points **distincts** M_1, M_2, M_3, M_4 de L, d'abscisses respectives x_1, x_2, x_3, x_4, montrer que la relation $\overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_3M_4} = 0$ est équivalente à

$$x_1x_2x_3x_4 - k\cos\theta\,(x_1x_2 + x_3x_4) + k^2 = 0.$$

En déduire que, si $\cos\theta$ n'est pas nul, le point M_4 ne peut pas être l'orthocentre du triangle $M_1M_2M_3$, c'est-à-dire le point de concours des hauteurs de ce triangle.

II.A.2) On suppose que L est une hyperbole **non équilatère** (c'est-à-dire que ses asymptotes ne sont pas orthogonales). Que résulte-t-il de la question précédente en ce qui concerne l'intersection de L et de L' ?

II.A.3) On suppose ici L est une hyperbole **équilatère** admettant dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ l'équation $xy - k = 0$ où k est une constante non nulle.

a) On désigne par M_1, M_2, M_3, M_4 quatre points distincts de L et par x_1, x_2, x_3, x_4 leurs abscisses respectives. Déduire de II.A.1) que M_4 est l'orthocentre du triangle $M_1M_2M_3$ si et seulement si

$$x_1x_2x_3x_4 = -k^2.$$

b) On désigne par M_1, M_2, M_3 trois points distincts de L, d'abscisses respectives x_1, x_2, x_3. Établir que $M_1M_2M_3$ est un triangle équilatéral si et seulement si il existe un réel λ tel que :

$$x_1x_2x_3\lambda = -k^2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3\lambda$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{3}{\lambda}$$

Que peut-on dire du point de L d'abscisse λ ?

c) Soit M un point de L, d'abscisse λ. Montrer qu'il existe un triangle équilatéral unique T de centre M inscrit dans L et que les abscisses de ses sommets sont les racines du polynôme

$$P(X) = X^3 - 3\lambda X^2 - 3\frac{k^2}{\lambda^2}X + \frac{k^2}{\lambda}$$

(on pourra considérer les signes de $P(0)$ et $P(\lambda)$).

II.A.4) Les hypothèses sont celles de la question précédente. On considère un cercle Γ d'équation

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + r = 0.$$

a) Écrire une équation polynômiale de degré 4 donnant les abscisses des points d'intersection du cercle Γ avec L. Trouver entre les racines de cette équation une relation indépendante de Γ.

b) On suppose ici que Γ est le cercle circonscrit au triangle T introduit en II.A.3) c). Déduire de ce qui précède que le point N de L, symétrique de M par rapport à O, est sur Γ. Donner le rayon de Γ en fonction de λ.

II.A.5)

a) L est encore ici une hyperbole équilatère. Déterminer L'.

b) Déterminer les coordonnées des sommets et du centre d'un triangle équilatéral inscrit dans l'hyperbole équilatère d'équation $xy - 1 = 0$ et dont l'aire est minimum.

Section II.B

On prend pour L, dans cette partie, la courbe dont une équation polaire, dans un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, **est**

$$r = \frac{2}{1 + 2\cos\theta}.$$

II.B.1) Donner la nature de cette courbe et la représenter graphiquement. On déterminera ses asymptotes, son centre et ses axes de symétrie.

II.B.2) On considère le cercle Γ_φ d'équation polaire $r = \dfrac{2\cos(\theta - \varphi)}{\cos\varphi}$ où φ est un paramètre réel tel que $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$.

a) Déterminer le centre de Γ_φ et montrer que Γ_φ passe par deux points indépendants de φ, dont l'un est le point O et l'autre un point S dont on précisera la position.

b) On se propose d'étudier les points communs à L et Γ_φ. Écrire une équation donnant un angle polaire d'un tel point et la résoudre. En déduire que, sauf dans un cas particulier que l'on précisera, L et Γ_φ ont, outre S, trois points communs formant un triangle équilatéral T_φ.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

c) Montrer que tout cercle passant par O et S est circonscrit à un triangle équilatéral inscrit dans L.

II.B.3)

a) Établir, sans calculs, l'existence d'une seconde famille de triangles équilatéraux inscrits dans L.

b) On admettra que si deux hyperboles distinctes ont en commun une direction asymptotique, elles ont au plus trois points communs. En appliquant ce résultat à l'hyperbole déduite de L par rotation de $\pi/3$ autour d'un de ses points, établir que tout point de L est sommet d'au plus deux triangles équilatéraux inscrits dans L.

II.B.4)

a) Montrer que, à l'exception de deux points de L que l'on précisera, tout point de L est sommet, exactement, de deux triangles équilatéraux inscrits dans L. On précisera ce qui se passe pour les deux points exceptionnels.

b) Déterminer L'.

Partie III

Dans cette partie (E) est de dimension 3. On considère un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et les droites D_1, D_2, D_3 définies dans ce repère par les équations :

$$D_1\begin{cases}y=0\\z=1\end{cases}\qquad D_2\begin{cases}x=0\\z=-1\end{cases}\qquad D_3\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$$

III.1) On prend dans cette seule question $L = D_1 \cup D_2$. Déterminer L'.

Dans la suite de la partie III on prend $L = D_1 \cup D_2 \cup D_3$.

III.2)

a) (λ, μ, ν) parcourant $\mathbb{R}^3$, on considère les points $A(\lambda, 0, 1)$, $B(0, \mu, -1)$ et $C(0, 0, \nu)$. Donner une condition sur (λ, μ, ν) pour que CA = CB.

b) On considère le lieu P de l'isobarycentre M des points A, B, C lorsque (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$, la condition ci-dessus étant réalisée.

Montrer que P est défini par l'équation cartésienne : $3(x^2 - y^2) - 4z = 0$.

Préciser la nature de P.

III.3) Soit Λ l'ensemble des centres des triangles équilatéraux dont les sommets sont situés respectivement sur D_1, D_2, D_3.

Montrer que Λ est l'intersection de P et de la surface H d'équation $3(x^2+y^2) - 6z^2 + 2 = 0$. Quelle est la nature de H ?

III.4) Exprimer, pour un point M décrivant Λ, x^2 et y^2 en fonction de z.

On considère la partie Λ_1 de Λ définie par les conditions $x > 0$, $y > 0$, $z \geq 1$.

Montrer que, pour un point M décrivant Λ_1, on peut écrire, lorsque z tend vers $+\infty$, $x = az + p + \varepsilon(z)$, $y = bz + q + \varepsilon_1(z)$, ε et ε_1 désignant des fonctions tendant vers zéro et a, b, p, q des constantes que l'on précisera. Interpréter géométriquement ces relations.

Montrer que Λ peut être obtenu à partir de Λ_1 en lui appliquant des isométries que l'on précisera. Construire la projection de Λ sur le plan $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

III.5) Déterminer les triangles équilatéraux ABC définis au III.3) dont l'aire est minimum.

III.6) Déterminer L'.

--- FIN --- TA

Suite pour P'

Partie IV

On suppose dans cette partie que (E) est de dimension deux.

L est dans toute la suite une courbe définie, dans un repère orthonormal direct Oxy, par l'équation $y = f(x)$, où f est une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que f est strictement convexe (f' est donc strictement croissante).

On désigne par α la fonction qui à tout x réel associe Arctan $f'(x)$; $\alpha(x)$ est donc l'angle polaire, compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, de la tangente à L (orientée dans le sens des x croissants) au point d'abscisse x.

D représentera la différence entre la borne supérieure γ et la borne inférieure β de la fonction α.

IV.1) Établir que la fonction α réalise une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]\beta, \gamma[$.

A SUIVRE

IV.2) On suppose qu'il existe un triangle équilatéral ABC inscrit dans L et que les abscisses respectives a, b, c de A, B, C vérifient $a < b < c$. Montrer qu'il existe une mesure φ de l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB})$ et une mesure Ψ de l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{BC})$ telles que :

$$\beta < \varphi < \gamma$$

$$\beta < \psi < \gamma$$

$$\Psi - \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

IV.3) Déduire de ce qui précède que, si $D \leq 2\pi/3$, alors L' est vide.

On suppose désormais que $D > 2\pi/3$.

IV.4) Une valeur réelle b étant fixée, on définit une fonction θ_b de la façon suivante

$$\theta_b(b) = \alpha(b)$$

pour tout $x \neq b$, $\theta_b(x) = \operatorname{Arctan} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b}$.

Interpréter géométriquement cette définition.

En admettant que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} f'(x) \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} f'(x),$$

étudier les limites de $\theta_b(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Montrer que θ_b est continue et strictement croissante dans $\mathbb{R}$. θ_b réalise ainsi une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]\beta, \gamma[$. On désignera par X_b la bijection réciproque ; interpréter géométriquement cette fonction.

IV.5) On suppose de plus que

$$\gamma - 2\pi/3 < \alpha(b) < \beta + 2\pi/3.$$

Soit φ une variable réelle décrivant l'intervalle $]\beta + 2\pi/3, \gamma[$.

On appelle A_φ, B, C_φ respectivement les points de L d'abscisse $X_b(\varphi - \frac{2\pi}{3})$, b, $X_b(\varphi)$.

a) Étudier la limite de $A_\varphi B - BC_\varphi$, lorsque φ tend vers l'une des bornes de l'intervalle.

b) En déduire qu'il existe φ tel que le triangle $A_\varphi BC_\varphi$ soit équilatéral.

c) Montrer qu'il existe une infinité de triangles équilatéraux inscrits dans L.

--- FIN --- P'

Enoncé M :

I identique à P' (voir pages 154 à 156)

Partie II

On suppose dans toute cette partie que (E) est de dimension 2 et que L est une conique.

II.1) Que dire de L' si L est un cercle ?

II 2 à 6 sont respectivement II A 1 à 5 de l'énoncé P'

II.7) On suppose ici que L n'est plus une hyperbole équilatère, mais est la courbe donnée en repère orthonormal par l'équation $xy = 0$ c'est-à-dire la réunion des deux axes de coordonnées.

Les propriétés vues dans le cas où L est une hyperbole équilatère concernant la relation entre L et L', d'une part, et le symétrique du centre de T par rapport à O, d'autre part, s'étendent-elles à ce cas ?

II.8) On étudie dans cette question le cas où, dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, L est la parabole P donnée par l'équation $y = x^2$.

a) Question préliminaire :

Soit Q la courbe définie par l'équation $x^2 + my^2 + 2nx + 2py + q = 0$ où m, n, p, q sont des constantes réelles, m étant non nul.

Établir que cette courbe a pour centre de symétrie le point $(-n, -\frac{p}{m})$.

Pour quelles valeurs des paramètres est-ce une hyperbole équilatère ou la réunion de deux droites perpendiculaires ?

b) Soit M(α, β) et Γ un cercle de centre M d'équation $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$.

Montrer que Γ est le cercle circonscrit au triangle équilatéral T inscrit dans L si et seulement si Γ possède la même propriété relativement à la courbe H_μ d'équation $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma + \mu(y - x^2) = 0$ où μ est une constante réelle non nulle.

c) Quelle valeur de μ doit-on prendre pour que H_μ soit une hyperbole équilatère ou l'ensemble de deux droites orthogonales ?

d) Soit μ_0 cette valeur et H_0 la courbe H_μ correspondante ; si Ω désigne le centre de H_0, donner les coordonnées du point N symétrique de M par rapport à Ω.

En déduire le lieu P' des centres des triangles équilatéraux inscrits dans la parabole P.

Que peut-on dire de $P \cap P'$?

II B ne figure pas en M

III identique à P'

Partie IV

L est dans la suite une courbe définie, dans un repère orthonormal direct Oxy, par l'équation $y = f(x)$, où f est une application de classe C^1 d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On désigne par α la fonction qui, à tout x appartenant à I, associe Arctan $f'(x)$; $\alpha(x)$ est donc l'angle polaire compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ de la tangente à L (orientée dans le sens des x croissants) au point d'abscisse x. D représentera la différence entre la borne supérieure, γ, de la fonction α et sa borne inférieure β.

IV.1) On suppose qu'il existe un triangle équilatéral ABC inscrit dans L et que les abscisses a, b, c de A, B, C respectivement vérifient $a < b < c$. Montrer qu'il existe une mesure φ de l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB})$ et une mesure Ψ de l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{BC})$ telles que :

$$\beta \leq \varphi \leq \gamma$$

$$\beta \leq \Psi \leq \gamma$$

$$|\Psi - \varphi| = \frac{2\pi}{3}$$

IV.2)

a) Déduire de ce qui précède que, si $D < 2\pi/3$, alors L' est vide.

On suppose maintenant que $D = 2\pi/3$ et qu'il existe un triangle équilatéral ABC inscrit dans L, les abscisses des trois sommets A, B, C vérifiant $a < b < c$. Démontrer les égalités

$$(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{AB}) = \beta$$

$$(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{BC}) = \gamma$$

En se servant de la formule

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$$

établir que $f'(x)$ est constante quand x décrit [a, b]. Étudier de même $f'(x)$ quand x décrit [b, c]. Que conclure ?

IV.3) Dans cette question et la suivante, on conserve les hypothèses et les notations définies au début du IV.

On suppose de plus que $I = \mathbb{R}$ et que f est une fonction strictement convexe (f' est donc strictement croissante). On suppose enfin que l'on a $D > 2\pi/3$.

a) Établir que la fonction α réalise une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]\beta, \gamma[$.

b) Une valeur réelle b étant fixée, on définit une fonction θ_b de la façon suivante :

$$\theta_b(b) = \text{Arctan } f'(b)$$

$$\text{pour tout } x \neq b,\ \theta_b(x) = \text{Arctan}\frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Interpréter géométriquement cette définition.

En admettant que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} f'(x) \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} f'(x),$$

étudier les limites de $\theta_b(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

c) Montrer que θ_b est continue et strictement croissante dans $\mathbb{R}$. θ_b réalise ainsi une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]\beta, \gamma[$. On désigne par X_b la bijection réciproque ; interpréter géométriquement cette fonction.

IV.4) On suppose de plus que $\gamma - 2\pi/3 < \arctan f'(b) < \beta + 2\pi/3$. Soit φ une variable réelle décrivant l'intervalle $]\beta + 2\pi/3, \gamma[$.

On appelle A_φ, B, C_φ respectivement les points de L d'abscisse $X_b(\varphi - 2\pi/3)$, b, $X_b(\varphi)$.

a) Étudier la limite, lorsque φ tend vers l'une des bornes de l'intervalle, de $A_\varphi B - BC_\varphi$.

b) En déduire qu'il existe φ tel que le triangle $A_\varphi B C_\varphi$ soit équilatéral.

c) Montrer qu'il existe une infinité de triangles équilatéraux inscrits dans L.

••• FIN ••• M