Corrigé de la composition d'informatique-mathématiques

ENS - MP - 2016

Partie I - Préliminaires

Remarque: le graphe associé à la chaîne de Markov est orienté en sens inverse du sens naturel. En effet, $M(i, j)$ est la probabilité de passer de l'état j à l'état i (car la somme de chaque colonne vaut 1), ce qui correspond dans le graphe habituel associé à la chaîne de Markov à l'existence d'une arête de j à i de poids $M(i, j)$. Ici, l'énoncé choisit de définir une arête de i à j. Comme on s'intéresse aux composantes fortement connexes, cela n'a pas d'importance, mais cela aura pu inutilement déstabiliser les candidats.

1 Soient M une chaine de Markov et X une distribution. Notons E la matrice ligne de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Nous avons $EM = E$ (car la somme des termes de chaque colonne de M est égale à 1) et $EX = \sum_{i=1}^{n} X(i) = 1$ (en identifiant $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$). Nous avons donc: $E(MX) = (EM)X = EX = 1$. Comme M et X sont à coefficients positifs, il en est de même de EX, qui est bien une distribution.

2a) Nous allons démontrer par récurrence sur n le résultat: s'il existe un chemin de longueur n d'un sommet i à un sommet j et si X est une distribution telle que $X(j) \neq 0$, alors $M^n X(i)$ est également non nul.

- si $n = 0$, on a $j = i$ et $M^n X(i) = X(j) \neq 0$;

- soit $n \geq 0$ et supposons que le résultat ait été démontré pour les chemins de longueur n. Si l'on a un chemin $i = i_0 \to i_1 \to \ldots \to i_{n+1} = j$ dans le graphe G_M et si X est une distribution telle que $X(j) \neq 0$, alors

$$(M^{n+1}X)(i) = \sum_{k=1}^{n} M(i,k)\,(M^n X)\,(k) \geq M(i,i_1)\,(M^n X)\,(i_1) > 0$$

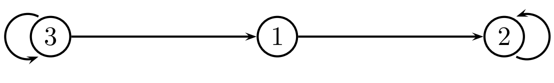
car $M(i, i_1) > 0$ ((i, i_1) est une arête de G_M) et il existe un chemin de longueur n de i_1 à j, donc $(M^n X)\,(i_1) > 0$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Nous pouvons maintenant revenir à la question posée: soient i et j deux sommets distincts appartenant à la même composante fortement connexe; il existe donc un chemin de i à j et un chemin de j à i. En mettant bout à bout ces deux chemins, nous obtenons un chemin de longueur $p \geq 2$ de i à lui-même. En choisissant la distribution X_i telle que $X_i(i) = 1$, nous avons donc: $(M^{kp} X_i)(i) > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et il n'existe pas d'entier ℓ tel que $(M^n X_i)(i) = 0$ pour $n \geq \ell$: i n'est pas élément de I.

2b) C'est une application directe de la la propriété démontrée précédemment: pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un chemin de longueur n de i à i, donc si $(M^n X_i)(i)$ est non nul pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $i \notin I$. Il aurait été préférable d'inverser les questions b et a.

2c) L'auteur voulait sans doute que l'on démontre que si la composante fortement connexe de i est réduite à $\{i\}$ et que $M(i, i) = 0$, i est élément de I, mais cette propriété est fausse, comme le montre l'exemple suivant:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



La composante fortement connexe de 1 est réduite à $\{1\}$, $M(1,1) = 0$ et $1 \notin I$, puisqu'avec la distribution $X_0 = (0,1,0)$, on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (M^n X_0)(1) = \frac{1}{2^n} \neq 0.$$

3a **Remarque:** le candidat avait intérêt à lire les explications et le code de la page suivante pour avoir une idée du niveau de langage et des types de données attendus pour répondre à cette question. Les énoncés des années antérieures avaient la bonne habitude de présenter un exemple de pseudo-code avant de demander aux candidats de se lancer dans une description d'algorithme. Nous reprendrons ici à peu près la syntaxe utilisée page 4 de l'énoncé.

Il suffit de construire les composantes fortement connexes les unes après les autres: on crée une liste vide LC qui contiendra, à la fin du calcul, la liste des composantes fortement connexes. Pour chaque sommet v, si sa composante fortement connexe C n'a pas encore été déterminée, on la calcule en partant de la liste $C = [v]$ à laquelle on ajoute chaque élément w de L_v tel que $v \in L_w$. Une fois le calcul terminé, on ajoute C à la liste LC. Le tableau `b` joue le même rôle que dans l'algorithme proposé plus bas dans l'énoncé: pour chaque sommet v, $b(v) = 0$ si C_v n'a pas encore été calculée et $b(v) = 1$ sinon. L'énoncé ne dit pas ce qu'est la variable de la fonction demandée: nous supposerons que la famille des L_v est donnée par un tableau L de listes ($L(v)$ est la liste L_v). On peut remarquer également que l'énoncé semble se placer maintenant dans le cadre de graphes non orientés quelconques, ce qui n'est pas tout à fait le cas puisqu'on continue à supposer que $|E| \leq |V|$, propriété assurée dans le cas particulier (il y a au moins une arête qui arrive à chaque sommet).

```
Fonction Calcul_Final_Composantes(L)
  b tableau de 0
  LC la liste vide
  Pour tout sommet v
     Si b(v) = 0 %% le sommet n'a pas encore été étudié
        b(v) := 1
        C = [v] %% on initialise la composante de v à la liste contenant uniquement v
        Pour tout w appartenant à L(v)
           Si b(w) = 0 et v appartient à L(w)
              b(w) := 1
              Ajouter w à C
           FinSi
        FinPour
     FinSi
     Ajouter C à LC
  FinPour
  Renvoyer LC
```

3b) Une nouvelle fois, l'énoncé ne nous dit pas ce qu'est la variable: sous quelle forme le graphe est-il défini? Nous supposerons ici que nous travaillons sur un graphe orienté $G = (V, E)$ où $V = 1, \ldots, N$, représenté par listes d'adjacence: G sera donc un tableau de taille N telle que $G(v)$ soit la liste des successeurs de v.

Il reste à construire le tableau L, qui sera initialisé au tableau de taille N ne contenant que des listes vides. Un sommet v étant fixé, le calcul de la liste L_v se fait de la façon suivante:

- on initialise un tableau b de 0 (pour savoir quels sommets ont été étudiés);
- on ajoute v à la liste $L(v)$;
- on initialise une pile P contenant v pour unique élément;
- $b(v) := 1$ car v a été étudié;
- tant que la pile P est non vide, on prend (en le supprimant) sa tête w; pour chaque successeur x de w tel que $b(x) = 0$, on ajoute x à $L(v)$, on empile x dans P et on donne à $b(x)$ la valeur 1.

Cela donne:

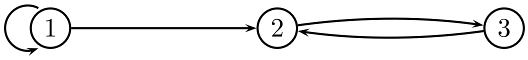
```
18 Fonction Calcul_Composantes(G)
19  L tableau de listes vides
20  Pour tout sommet v
21     b tableau de 0
22     Ajouter v à L(v)
23     P pile vide
24     Empiler v dans P
25     b(v) := 1
26     Tant que P est non vide
27        w := Dépiler(P)
28        Pour tout x appartenant à G(w)
29           Si b(x)=0
30              Ajouter x à L(v)
31              Empiler x dans P
32              b(x) := 1
33           FinSi
34        FinPour
35     FinTantQue
36  FinPour
37  Renvoyer Calcul_Final_Composantes(L)
```

La complexité de la partie (27-34) est de l'ordre du nombre de successeurs de w. La complexité de la boucle (26-35) est donc un $O(|V|)$, puisqu'un sommet w n'a été placé qu'au plus une fois dans la pile P (car $\sum_{w \in L_v} |L_w| \leq |E|$). Le calcul de tous les L_v a donc une complexité $O(|E|\,|V|)$, qui est un $O(|V|^2)$.

Une analyse grossière de la complexité de `Renvoyer Calcul_Final_Composantes` suffit pour conclure: pour chaque sommet v, le temps de traitement est constant si v a déjà été rencontré; sinon, pour chaque $w \in L_u$, le bloc d'instructions (9-12) prend un temps en $O(|L_v|)$ dans le pire des cas, soit $O(|E|)$. Comme L_u contient au plus $|E|$ éléments, la complexité de la boucle (8-13) est un $O(|E|^2)$, ce qui donne enfin une complexité $O(|E|^3)$ pour `Renvoyer Calcul_Final_Composantes`. Ce calcul est très grossier, mais l'ordre de grandeur est le bon puisqu'avec le graphe défini par $V = \{(i, j) \in \{1, \ldots, N\}^2,\ i < j\}$, on obtient un temps en N^3.

Très grossièrement ($|E| \leq |V|$), nous obtenons ainsi une complexité en $O(|V|^3)$ pour ce calcul naïf des composantes fortement connexes: $k = 3$.

3c. La description de l'algorithme de Tarjan n'est pas très claire et le code donné est faux: avec le graphe suivant (qui correspond bien à une matrice de Markov: au moins une arête arrive à chaque sommet)



l'algorithme ne termine pas (on appelle `Profondeur` avec les paramètres 1, 2, 3, 2, 3, … puisque le tableau b n'est pas modifié dans le corps de la fonction `Profondeur`). En l'état, le temps de calcul dans le pire des cas est donc infini! Avec un algorithme correct, on aurait trouvé un temps linéaire, i.e. $k' = 1$!

Partie II - Exemples de chaînes de Markov

Notation: si v et w sont deux mots finis sur l'alphabet $\{A, B\}$ et si w est non vide, nous noterons vw^∞ le mot infini ultimement périodique $vwww\ldots$.

4a) Pour toute distribution X, on a $(M_1^k X)(1) = X(1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $\sigma^{M_1,X,1/2} = \begin{cases} A^\infty & \text{si } X(1) \geq 1/2 \\ B^\infty & \text{sinon} \end{cases}$ et $L(M_1, 1/2) = \{A^\infty, B^\infty\}$.

4b) Pour toute distribution X, on a $(M_2^{2k} X)(1) = X(1)$ et $(M_1^{2k+1} X)(1) = X(2)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Nous avons donc 3 cas possibles:

- si $X(1) = 1/2$, $X(2) = 1/2$ et $\sigma^{M_2,X,1/2} = A^\infty$;
- si $X(1) > 1/2$, $X(2) < 1/2$ et $\sigma^{M_2,X,1/2} = (AB)^\infty$;
- si $X(1) < 1/2$, $X(2) > 1/2$, $\sigma^{M_2,X,1/2} = (BA)^\infty$.

On obtient donc $L(M_2, 1/2) = \{A^\infty, (AB)^\infty, (BA)^\infty\}$.

4c) Comme $M_3^2 = M_3$, nous avons toujours pour toute distribution X:

$$(M_1^k X)(1) = \begin{cases} X(1) & \text{si } k = 0 \\ \dfrac{3}{5} & \text{si } k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

d'où $\sigma^{M_2,X,1/2} = A^\infty$ ou BA^∞, selon que $X(1) \geq 1/2$ ou $X(1) < 1/2$: $L(M_3, 1/2) = \{AA\ldots, BAA\ldots\}$.

5a) 1 est valeur propre double de M_1 et la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est une base de l'espace propre associé.

5b) M_2 possède deux valeurs propres simples 0 et 1, associées à des espaces propres de dimension 1 engendrés respectivement par les vecteurs $(1, -1)$ et $(1, 1)$.

5c) M_3 possède également deux valeurs propres simples 0 et 1, associées à des espaces propres de dimension 1 engendrés respectivement par les vecteurs $(1,-1)$ et $(3,2)$.

5d) Un calcul élémentaire donne le polynôme caractéristique de M_4:

$$\chi_{M_4} = \frac{1}{100}(X-1)(100X^2 - 80X + 19).$$

Les racines du polynôme $100X^2 - 80X + 19$ sont les complexes $\lambda_1 = \dfrac{4+i\sqrt{3}}{10}$ et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. On a bien $\rho_0 = |\lambda_1|$ et $\lambda_1 = \rho_0 \left(\dfrac{4}{\sqrt{19}} + i\sqrt{\dfrac{3}{19}} \right) = \rho_0 e^{i\theta_0}$ puisque la partie imaginaire de λ_1 est positive. La matrice M_4 a donc bien trois valeurs propres simples: 1, $\rho_0 e^{i\theta_0}$ et $\rho_0 e^{-i\theta_0}$.

Il suffit de vérifier que les trois vecteurs proposés sont des vecteurs associés à ces trois valeurs propres: le calcul est sans intérêt (pour λ_1, le plus rapide est encore de résoudre le système $M_4 X = \lambda_1 X$).

6a) Soit v une valeur propre de M, donc de ${}^tM$, et soit X un vecteur non nul tel que ${}^tMX = vX$. Il existe un indice i_0 tel que:

$$|X(i_0)| = \max\{|X(i)|,\ i \in \{1,\dots,N\}\}.$$

On a alors:

$$|vX(i_0)| = \left| \sum_{j=1}^{N} M(j,i_0)X(j) \right| \leq \sum_{j=1}^{N} M(j,i_0)|X(j)| \leq |X(i_0)| \sum_{j=1}^{N} M(j,i_0) = |X(i_0)|$$

d'où $|v| \leq 1$ car $|X(i_0)| > 0$.

6b) En notant toujours E le vecteur ligne $(1,\dots,1)$, nous avons $EM = E$ donc 1 est une valeur propre de ${}^tM$, donc de M.

Partie III - Base de vecteurs propres

7 M a N valeurs propres simples, donc la famille $(V_j)_{1\leq j\leq N}$ est une base de $\mathbb{C}^n$ et il existe des complexes $x_1,\dots,x_N$ tels que $X = \sum_{j=1}^{N} x_j V_j$. On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\sigma_k^{M,X,\tau} = A \Longleftrightarrow -\tau + \sum_{j=1}^{N} x_j \rho_j^k e^{ik\theta_j} V_j(1) \geq 0$$

ce qui est le résultat demandé, en posant $\alpha_0 = -\tau$ et $\alpha_j = x_j V_j(1)$ pour tout $j \in \{1,\dots,N\}$.

8 On a $X_4 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{24}\begin{pmatrix} -1-i\sqrt{3} \\ -1+i\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{24}\begin{pmatrix} -1+i\sqrt{3} \\ -1-i\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$, ce qui donne:

$$\begin{aligned} (M_4^k X_4)(1) \geq \tau_4 \quad &\Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{24}\rho_0^k e^{ik\theta_0}(-1-i\sqrt{3}) + \frac{1}{24}\rho_0^k e^{-ik\theta_0}(-1+i\sqrt{3}) \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{3}\sin(k\theta_0) - \cos(k\theta_0) \geq 0 \end{aligned}$$

en simplifiant par $\frac{1}{12}\rho_0^k > 0$.

Pour traiter plus facilement la question 9, nous écrirons cette inégalité sous la forme $\sin(k\theta_0 - \pi/6) \geq 0$.

9 Supposons que la suite soit ultimement périodique, associée aux entiers $\ell \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{N}^*$. On a en particulier:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sigma_{\ell+Pk}^{M_4,X_4,\tau_4} = \sigma_{\ell}^{M_4,X_4,\tau_4}.$$

Suivant la valeur A ou B de ce terme constant, nous obtenons:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \sin(\ell\theta_0 - \pi/6 + Pk\theta_0) \geq 0 \text{ ou } \forall k \in \mathbb{N},\ \sin(\ell\theta_0 - \pi/6 + Pk\theta_0) \leq 0.$$

Comme $\{kP\theta_0 \bmod 2\pi\ |k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 2\pi[$, il en est de même de $\{\ell\theta_0 - \pi/6 + kP\theta_0 \bmod 2\pi\ |k \in \mathbb{N}\}$, ce qui est absurde puisque cet ensemble est ou bien contenu dans $[0, \pi]$, ou bien dans $\{0\} \cup [\pi, 2\pi[$.

Partie IV - Chaînes de Markov avec des valeurs propres dans $\mathbb{R}^+$.

10a. On trouve facilement $\chi_{M_5} = \frac{1}{50}(X-1)(50X^2 - 65X + 21) = (X-1)\left(X - \frac{7}{10}\right)\left(X - \frac{3}{5}\right)$. M_5 a donc trois valeurs propres réelles positives $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = \frac{7}{10}$ et $\rho_3 = \frac{3}{5}$. De nouveaux calculs fastidieux et sans intérêts donnent $V_1 = \begin{pmatrix} 5/12 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

10b. Petite erreur d'énoncé: il faut lire $\alpha_0 + \sum_{j=1}^{3} \alpha_j(X)\rho_j^k \geq 0$ au lieu de $\sum_{j=1}^{3} \alpha_j(X)\rho_j^k \geq 0$ (les coefficients α_0 et α_1 vont se simplifier). L'énoncé sous-entend évidemment que l'on a imposé $\alpha_0 = -\tau_4$, i.e. que l'on a choisi "le" résultat naturel pour répondre à la question 7.

De nouveaux calculs pénibles donnent $X_0 = V_1 + \frac{1}{3}V_2 + \frac{1}{4}V_3$ et $X_0 = V_1 - \frac{1}{12}V_3$, d'où:

$$\left(\alpha_1(X_0) = \frac{5}{12},\ \alpha_2(X_0) = \frac{1}{3},\ \alpha_3(X_0) = \frac{1}{4}\right) \quad \text{et} \quad \left(\alpha_1(X_1) = \frac{5}{12},\ \alpha_2(X_0) = 0\ \alpha_3(X_0) = -\frac{1}{12}\right).$$

10c. Pour $k \in \mathbb{N}$, nous avons:

$$\begin{cases} \sigma_k^{M_5,X_0,\tau_5} = A \Longleftrightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^k + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^k \geq 0 \Longleftrightarrow k \in \mathbb{N} \\ \sigma_k^{M_5,X_1,\tau_5} = A \Longleftrightarrow -\frac{1}{12}\left(\frac{3}{5}\right)^k \geq 0 \Longleftrightarrow k \in \emptyset \end{cases}$$

donc (M_5, X_0, τ_5) et (M_5, X_1, τ_5) sont associées aux trajectoires A^∞ et B^∞.

11a. En notant $v_i(X)$ la i-ème composante de X dans la base (V_1, V_2, V_3), nous avons:

$$X = \sum_{i=1}^{3} \lambda v_i(X_1) + (1-\lambda)v_i(X_0)$$

d'où, pour tout $i \in \{1,2,3\}$:

$$\alpha_i(X) = v_i(X)V_i(1) = \sum_{i=1}^{3} \left(\lambda v_i(X_1) + (1-\lambda)v_i(X_0)\right) V_i(1) = \lambda\alpha_i(X_1) + (1-\lambda)\alpha_i(X_0).$$

(nouvelle faute de frappe: il faut lire X_0 et pas X_2)

11b. Soit $\lambda \in [0,1[$. Nous avons cette fois, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\sigma_k^{M_5,X_\lambda,\tau_5} = A \iff (1-\lambda)7^k + (3/4-\lambda)6^k \geq 0 \iff \left(\frac{7}{6}\right)^k \geq \frac{\lambda - 3/4}{1-\lambda}$$

en remarquant que $1-\lambda > 0$. Comme $\left(\frac{7}{6}\right)^k$ tend en croissant vers $+\infty$, il existe bien un entier naturel ℓ_λ tel que la trajectoire associée à (M_5, X_λ, τ_5) soit $B^{\ell_\lambda - 1}A^\infty$.

Remarque: l'énoncé est un peu optimiste, car nous n'avons étudié que les trajectoires associées à des distribution du segment $[X_0, X_1]$ (et on voit bien que la propriété $\alpha_0 + \alpha_1 = 0$ nous a bien aidé).

12a. Il y a sans doute une erreur d'énoncé, comme à la question 10b. L'énoncé correct est sans doute (avec $\alpha_0 = -\tau_4$ qui ne dépend pas de X):

$$\forall x \in [1,+\infty[,\ \exists \mu_x \in]0,1[,\ \alpha_0 + \mu_x \sum_{j=1}^{3} \alpha_j(X_0)\rho_j^x + (1-\mu_x)\sum_{j=1}^{3} \alpha_j(X_1)\rho_j^x = 0$$

soit encore ($\alpha_1(X_0) = \alpha_1(X_1) = -\alpha_0$):

$$\forall x \in [1,+\infty[,\ \exists \mu_x \in]0,1[,\ \mu_x \sum_{j=2}^{3} \alpha_j(X_0)\rho_j^x + (1-\mu_x)\sum_{j=2}^{3} \alpha_j(X_1)\rho_j^x = 0$$

D'autre part, l'énoncé à échangé les rôles de X_0 et X_1 ($\mu = 1-\lambda$, d'où la condition $\mu > 0$ qui remplace $\lambda < 1$). Tout cela est très maladroit, d'autant que cette question 12 n'est qu'un prolongement élémentaire de la question 11.

Cette question est évidente, puisque la condition s'écrit (car $\mu > 0$):

$$\mu_x = \frac{1}{4}\,\frac{6^x}{6^x + 7^x}.$$

Il existe bien un unique $\mu_x \in \left]0\,,\frac{3}{26}\right]$ vérifiant la condition.

12b. Le choix d'imposer $\sigma_k^{M_5,X_\lambda,\tau_5} = B$ pour $k = \ell'$ n'est pas très heureux! On peut appliquer la question précédente avec $x = \ell' + 1$, qui est bien supérieur ou égal à 1. La valeur $\lambda = 1 - \mu_{\ell'+1}$ donne le résultat souhaité.

12c. Dans la question précédent, nous avons construit $\lambda \in]0,1]$ tel que $\ell_\lambda = \ell' + 1$. Comme $\ell_0 = 0$, nous avons donc montré que $\{\ell_\lambda,\ \lambda \in [0,1]\} = \mathbb{N}$: cet ensemble n'est donc mas majoré.

12d. Les question 11 et 12 prouvent:

$$\left\{\left(\sigma_k^{M_5,X_\lambda,\mu_5}\right)_{k\in\mathbb{N}},\ \lambda \in [0,1]\right\} = \left\{B^k A^\infty,\ k \in \mathbb{N}\right\}.$$

13 Il y a une dernière erreur d'énoncé: il faut lire $\alpha_0(X) + \alpha_1(X) = 0$ pour toute distribution ($\alpha_0 = -\tau$ ne dépend pas de X). La condition $\tau = V_1(1)$ est d'ailleurs nécessaire puisque V_1 est une distribution (c'est moins évident qu'elle est suffisante): pourquoi l'énoncé n'a-t-il pas simplement posé $\tau = V_1(1)$?

Nous noterons $\sigma(\lambda) = \left(\sigma_k^{M,X_\lambda,\tau}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Nous avons besoin de revenir aux définitions des $\alpha_i(X)$ pour obtenir comme ci-dessus:

$$\forall i \in \{1,2,3\},\ \alpha_i(X) = \lambda\alpha_i(X_1) + (1-\lambda)\alpha_i(X_0)$$

ce qui donne, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sigma_k(\lambda) = A \iff & \lambda\left(\alpha_2(X_1)\rho_2^k + \alpha_3(X_1)\rho_3^k\right) + (1-\lambda)\left(\alpha_2(X_0)\rho_2^k + \alpha_3(X_0)\rho_3^k\right) \geq 0 & (1) \\ \iff & \underbrace{[\lambda\alpha_2(X_1) + (1-\lambda)\alpha_2(X_0)]}_{=a_\lambda} + \underbrace{[\lambda\alpha_2(X_1) + (1-\lambda)\alpha_2(X_0)]}_{=b_\lambda}\left(\frac{\rho_3}{\rho_2}\right)^k \geq 0 & (2) \end{aligned}$$

D'autre part, les conditions imposées sur les σ_k de X_0 et X_1 donnent:

$$\begin{cases} \alpha_2(X_0) \geq 0 & \text{et} \quad \alpha_2(X_0) + \alpha_3(X_0) \geq 0 \\ \alpha_2(X_1) \leq 0 & \text{et} \quad \alpha_2(X_1) + \alpha_3(X_1) < 0 \end{cases}$$

Pour λ fixé, la discussion se fait selon les valeurs de b_λ et a_λ, et cela devient très fastidieux:

- 1er cas: $b_\lambda > 0$ (ce cas ne peut se produire que si $\alpha_3(X_0)$ ou $\alpha_3(X_1)$ est strictement positif); la suite $\left(a_\lambda + b_\lambda\left(\frac{\rho_3}{\rho_2}\right)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Si $a_\lambda \geq 0$, cette suite est strictement positive et $\sigma\lambda = A^\infty$; si $-b_\lambda < a_\lambda < 0$, il existe un entier $\ell_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma(\lambda) = A^{\ell_0+1}B^\infty$. Enfin, si $a_\lambda \leq -b_\lambda$, la suite est négative et $\sigma_\lambda = B^\infty$.

- 2ème cas: $b_\lambda = 0$ (ce cas ne peut se produire que si $\alpha_3(X_0)$ et $\alpha_3(X_1)$ sont de signes opposés), $\sigma(\lambda)$ est constante et vaut donc soit $\sigma(0) = A^\infty$, soit $\sigma(1) = B^\infty$.

- 3ème cas: $b_\lambda < 0$; ce cas est symétrique du premier et on obtient soit A^∞, soit B^∞, soit $B^{\ell_0+1}A^\infty$.

Nous obtenons donc quatre types de suites:

a) $\sigma(\lambda) = A^\infty$ dans les trois cas ($b_\lambda > 0$ et $a_\lambda \geq 0$), ($b_\lambda = 0$ et $a_\lambda \geq 0$) et ($b_\lambda < 0$ et $a_\lambda \geq -b_\lambda$) ;

b) $\sigma(\lambda) = A^{\ell_0+1}B^\infty$ quand ($b_\lambda > 0$ et $-b_\lambda < a_\lambda < 0$);

c) $\sigma(\lambda) = B^{\ell_0+1}A^\infty$ quand ($b_\lambda < 0$ et $0 < a_\lambda < -b_\lambda$);

d) $\sigma(\lambda) = B^\infty$ dans les trois cas ($b_\lambda > 0$ et $a_\lambda \leq -b_\lambda$), ($b_\lambda = 0$ et $a_\lambda < 0$) et ($b_\lambda < 0$ et $a_\lambda \leq 0$) ;

Il resterait à recoller les morceaux en regardant quels cas peuvent effectivement arriver quand λ décrit $[0,1]$. On peut peut-être montrer que l'on ne peut pas obtenir (pour des valeurs différentes de λ) le cas b et d, mais je ne vois pas de raison simple.

On peut aussi remarquer que pour toute valeur $\ell \in \mathbb{N}$, on a :

$$\alpha_2(X_1)\rho_2^\ell + \alpha_3(X_1)\rho_3^\ell < 0 \leq \alpha_2(X_0)\rho_2^\ell + \alpha_3(X_0)\rho_3^\ell,$$

donc il existe $\lambda_\ell \in [0,1]$ tel que

$$\lambda_\ell \left(\alpha_2(X_1)\rho_2^\ell + \alpha_3(X_1)\rho_3^\ell\right) + (1-\lambda_\ell)\left(\alpha_2(X_0)\rho_2^\ell + \alpha_3(X_0)\rho_3^\ell\right) = 0.$$

Cela laisse conjecturer que si l'on peut être dans le cas b (resp. d), alors le langage contient tous les mots $B^{\ell_0+1}A^\infty$ (resp. pour $A^{\ell_0+1}B^\infty$) pour tout $\ell_0 \in \mathbb{N}$, et on peut peut-être montrer que le langage cherché est soit $\{A^{\ell_0}B^\infty,\ \ell_0 \in \mathbb{N}\} \cup \{A^\infty\}$, soit $\{B^{\ell_0}A^\infty,\ \ell_0 \in \mathbb{N}\} \cup \{B^\infty\}$.