

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE, DE TECHNIQUES AVANCÉES,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE
DE LA MÉTALLURGIE ET DE L'INDUSTRIE DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (OPTION T.A.)

2ème épreuve M

MATHEMATIQUES

(4 h)

1982

Notations et résultats admis

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{C} , $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E , 1 ($\in \mathcal{L}(E)$) l'endomorphisme identité de E . $\mathcal{L}(E)$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$ telle que :

$$\forall u \text{ et } v \in \mathcal{L}(E) : \|u \circ v\| \leq \|u\| \cdot \|v\| .$$

On supposera que la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{L}(E)$ est construite à partir d'une norme $|\cdot|$ sur E en posant :

$$\|u\| = \sup_{|x|=1} |u(x)| \text{ pour } u \in \mathcal{L}(E)$$

Si (u_k) est une suite dans $\mathcal{L}(E)$, on dira que la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge et a pour somme v dans $\mathcal{L}(E)$ si la suite (v_n) telle que $v_n = \sum_{k=1}^n u_k$ converge et a pour limite v dans l'espace normé $\mathcal{L}(E)$; on écrit alors :

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} u_k .$$

Soit E^* le dual de E ; soient $x \in E$, $y \in E^*$; $\langle y, x \rangle$ est la valeur prise par y en x .

Le sujet comporte quatre parties ; seules les deux premières parties sont indépendantes l'une de l'autre.

1ère partie

Dans la partie I, R désigne un réel > 0 ou $+\infty$ et D_R le disque ouvert de rayon R dans \mathbb{C}

(si $R = +\infty : D_R = \mathbb{C}$) ; $f : D_R \rightarrow \mathbb{C}$ désigne une fonction développable en série entière dans le disque D_R :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ si } z \in D_R ,$$

(le rayon de convergence de la série entière du second membre étant $\geq R$).

Il sera admis : $\forall r \in]0, R[, \forall n \in \mathbb{N}$, il vient :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta}) d\theta$$

I - 1°) Montrer que, pour r donné $\in]0, R[$, la fonction définie sur $[0, 2\pi]$ par $\theta \rightsquigarrow f(re^{i\theta})$ est bornée.

2°) Soit $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$ pour $r < R$. Montrer, pour tout $r \in]0, R[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité :

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

3°) On suppose que $R = +\infty$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\exists r_0 > 0, \exists m \in \mathbb{N}$ et $\exists C > 0$ tels que $\forall r > r_0, M(r) \leq C r^m$,

b) f est une fonction polynôme de degré $\leq m$.

Démontrer que si $|f(z)|$ est borné pour $z \in \mathbb{C}$ alors f est une fonction constante.

4°) On considère les propriétés suivantes :

c) (A_n) est une suite dans $\mathcal{L}(E)$ telle que $\forall z \in D_R$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} z^n A_n$ converge dans $\mathcal{L}(E)$.

d) (A_n) est une suite dans $\mathcal{L}(E)$ telle que le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \|A_n\| \text{ est supérieur ou égal à } R.$$

Etablir que (d) implique (c).

.../...

5°) Soient (A_n) et (B_n) deux suites dans $\mathcal{L}(E)$ satisfaisant la propriété (c) ; posons pour $z \in D_R$:

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n A_n, \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n B_n.$$

a) Démontrer :

$$\forall x \in E, \forall y \in E^*, \forall z \in D_R : \langle y, \phi(z)(x) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \langle y, A_n(x) \rangle.$$

b) Démontrer que, pour qu'il existe un voisinage V de 0 dans \mathbb{C} (avec $V \subset D_R$) tel que $\phi(z) = \psi(z)$ pour $z \in V$ il faut et il suffit que les suites (A_n) et (B_n) soient identiques.

6°) Les notations étant celles de la question 5°) on pose :

$$C_n = \sum_{k=0}^n A_{n-k} \circ B_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On suppose que (A_n) et (B_n) satisfont la propriété (d) plus forte que (c), établir que pour $n \in \mathbb{N}$, $z \in D_R$ on a :

$$\left\| \left(\sum_{k=0}^n z^k A_k \right) \circ \left(\sum_{k=0}^n z^k B_k \right) - \sum_{k=0}^{2n} z^k C_k \right\| \leq a(z) \sum_{k=n+1}^{\infty} |z|^k \|B_k\| + b(z) \sum_{k=n+1}^{\infty} |z|^k \|A_k\|$$

où il a été posé :

$$a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k \|A_k\|, \quad b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k \|B_k\|,$$

démontrer : $\phi(z) \circ \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k C_k$ pour $z \in D_R$.

2ème partie

II - 1°) Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et m entier > 1 fixés. Montrer qu'il existe alors une suite (ϵ_n) telle que :

$$\begin{cases} \|u^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|u^m\|^{\frac{1}{m}} (1 + \epsilon_n) \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0 \end{cases}$$

où $u^n = u \circ \dots \circ u$ (n fois). (On pourra utiliser le fait que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit sous la forme $n = q(n)m + r(n)$ avec $0 \leq r(n) < m$, $r(n)$ et $q(n) \in \mathbb{N}$).

2°) Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ la limite suivante :

$$v(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u^n\|^{\frac{1}{n}}$$

existe et est égale à la borne inférieure de l'ensemble des $\|u^n\|^{\frac{1}{n}}$, $n \geq 1$.

3°) Etablir que pour $\lambda \in \mathbb{C}$, u et $v \in \mathcal{L}(E)$ on a les relations :

- $v(u) \leq \|u\|$
- $v(\lambda u) = |\lambda| v(u)$
- $v(u \circ v) = v(v \circ u)$
- $v(u^k) = v(u)^k, \quad k \in \mathbb{N}$.

Indication : remarquer : $(u \circ v)^n = u \circ (v \circ u)^{n-1} \circ v$

4°) Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ il vient :

- lorsque $v(u) < 1$, $\mathcal{A} - u$ est un automorphisme de E ; la série $\sum_{n=0}^{\infty} u^n$ ($u^0 = \mathcal{A}$) converge et $(\mathcal{A} - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$.

• lorsque $v(u) > 1$, cette série diverge.

.../...

3ème partie

III - 1°) Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n$ est convergente ($u^0 = \mathbb{1}$). On notera

$\exp : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ la fonction telle que :

$$\exp(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n.$$

2°) Calculer $\exp(0)$ et $\exp(z\mathbb{1})$, $z \in \mathbb{C}$.

3°) Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $p \in \mathbb{N}$ on pose $S_p(u) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} u^k$. Montrer que si u et $v \in \mathcal{L}(E)$ et u et v

commutent alors $\|S_p(u) \circ S_p(v) - S_p(u+v)\| \leq \sum_{k=p+1}^{2p} \frac{1}{k!} (\|u\| + \|v\|)^k$, et $\exp(u) \circ \exp(v) = \exp(u+v)$

4°) Etablir que, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $\exp(u)$ est un automorphisme de E et $(\exp(u))^{-1} = \exp(-u)$.

5°) On désigne par C_n^k (k, n entiers avec $0 \leq k \leq n$) les coefficients de la formule du binôme ; établir que si k est fixé, la suite de terme général $t_n = \frac{1}{n^k} C_n^k$ pour $n \geq k$ croît et a pour limite $\frac{1}{k!}$. Montrer que

$$\exp(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{1} + \frac{1}{n} u)^n, \quad u \in \mathcal{L}(E).$$

6°) Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ est fixé, l'élément $(\mathbb{1} + \frac{1}{n} u)^{-n}$ est défini dès que n est un entier assez grand et que $\exp(-u) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{1} + \frac{1}{n} u)^{-n}$

4ème partie

On considère une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ c'est-à-dire une partie \mathcal{A} de $\mathcal{L}(E)$ ayant les deux propriétés suivantes :

(a) \mathcal{A} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ contenant $\mathbb{1}$.

(b) \mathcal{A} est stable par composition des endomorphismes ($\forall u \in \mathcal{A}, \forall v \in \mathcal{A}$ il vient : $u \circ v \in \mathcal{A}$)

on dira que \mathcal{A} est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$ si $u \circ v = v \circ u$ lorsque u et $v \in \mathcal{A}$.

1°) Etablir que si $u \in \mathcal{A}$ alors $\exp(u) \in \mathcal{A}$

2°) Si u et $v \in \mathcal{A}$, on définit la fonction $\phi_{u,v}(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{L}(E)$ par :

$$\phi_{u,v}(z) = \exp(zu) \circ v \circ \exp(-zu), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Montrer que $\phi_{u,v}(z) \in \mathcal{A}$ et peut s'écrire sous la forme $\phi_{u,v}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n A_n$ où

(A_n) est une suite dans \mathcal{A} dont on calculera les termes A_0 et A_1 .

3°) Etablir que, dans les conditions du 2°) on a : $v(\phi_{u,v}(z)) = v(v)$.

Indication : Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \phi_{u,v}^n(z) = \phi_{u,v}^n(z)$.

4°) Etablir que pour que u et v commutent, il faut et il suffit qu'il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C} : \|\phi_{u,v}(z)\| \leq C \|v\|.$$

Indication : Utiliser la question I - 3°)

5°) Etablir que si pour tout $u \in \mathcal{A}$ on a $\|u^2\| = \|u\|^2$ alors \mathcal{A} est une sous algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$. (On pourra remarquer que l'hypothèse entraîne que $v(u) = \|u\|$ pour $u \in \mathcal{A}$).