Corrigé du problème: autour de la fonction zeta alternée de Riemann

I Généralités

1. Pour $x>0$, la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n^x}\right)$ décroît vers 0, donc la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge par le critère spécial des séries alternées.
Pour $x\leqslant 0$, $\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ ne tend pas vers 0, ce qui montre la divergence grossière de la série.
Finalement, F est définie sur $]0,+\infty[$.
2. Pour $t\in[0,1[$, $g_n(t)=\frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}$ qui tend vers $\frac{1}{1+t}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Pour tout n, g_n est continue sur $[0,1[$ et est dominée par la fonction constante égale à 2 donc intégrable sur $[0,1[$. Le théorème de convergence dominée permet alors d'écrire
$$\begin{aligned}\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t\\ \int_0^1\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\\ \ln 2 &= F(1).\end{aligned}$$
3. Pour $x\geqslant 2$, $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$, terme général d'une série de Riemann convergente. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge donc normalement sur $[2,+\infty[$, et donc uniformément sur $[2,+\infty[$. Le théorème de la double limite s'applique, comme $F(x)=1+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ et que pour tout $n\geqslant 2$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{n^x}=0$, on obtient que F a pour limite 1 en $+\infty$.
4. (a) On fixe $x>0$ et on définit sur $[1,+\infty[$, $\quad\phi: u\mapsto\frac{\ln u}{u^x}$. La fonction ϕ est dérivable et
$$\phi'(u)=\frac{(1-x\ln u)}{u^{x+1}}$$
Cette dérivée est négative ou nulle pour $u\geqslant \mathrm{e}^{1/x}$, ce qui prouve que la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)$ est décroissante à partir du rang $\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{1/x}\right)+1$.
(b) Soit $a>0$. Pour tout n, la fontion $f_n: x\mapsto\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et a pour dérivée $x\mapsto\frac{(-1)^n\ln n}{n^x}$.
Comme la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)$ décroît à partir d'un certain rang et est de limite nulle (croissance comparée), la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n\ln n}{n^x}$ vérifie le critère spécial pour les séries alternées, en particulier son reste de rang n vérifie pour $x\in[a,+\infty[$ et pour $n\geqslant\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{1/a}\right)+1$,
$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n^x}\right|\leqslant\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x}\leqslant\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}.$$

Ce dernier terme tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui prouve la convergence uniforme de la série des dérivées $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}$ sur $[a,+\infty[$. Puisque de plus $\sum_n f_n$ converge simplement sur $[a,+\infty[$;on a que F est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$, et ce pour tout $a>0$, ce qui permet de conclure.

5. *Lien avec* ζ
   Soit $x>1$.

$$\begin{aligned} F(x)-\zeta(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}-1}{n^x} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2k)^x} \\ &= -2^{1-x}\zeta(x) \end{aligned}$$

   On en déduit bien que $F(x)=\zeta(x)(1-2^{1-x})$.

   Quand x tend vers $+\infty$, $2^{1-x}=\mathrm{e}^{(1-x)\ln 2}$ tend vers 0, donc $\frac{F(x)}{1-2^{1-x}}=\zeta(x)$ a la même limite que F, c'est à dire 1.

II Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

6. *Étude de la convergence*
   (a) Pour $x>1$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ est absolument convergente, comme le produit de deux séries absolument convergentes est absolument convergent, la série $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$ est absolument convergente (donc convergente). On a de plus $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} c_n(x)=(F(x))^2$.
   (b) On a

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k^x}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)^x} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^x}.$$

   Comme la fonction trinôme $k\mapsto k(n-k)$ a pour maximum $\frac{n^2}{4}$ atteint en $k=\frac{n}{2}$, on a

$$|c_n(x)| \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n^2/4)^x} = \frac{4^x(n-1)}{n^{2x}}.$$

   Pour n au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{n-1}{n^{2x}} \sim \frac{1}{n^{2x-1}}$. En particulier pour $0<x\leqslant\frac{1}{2}$, $\frac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$ ne tend pas vers 0, ce qui empêche $|c_n(x)|$ de tendre vers 0 et donc prouve la divergence grossière de $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$.

7. Désormais on suppose que $x=1$.
   (a) On a $\displaystyle\frac{1}{X(n-X)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{n-X}\right)$. Ainsi

$$c_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right) = \frac{2(-1)^n H_{n-1}}{n}.$$

(b) Posons $t_n = \dfrac{H_{n-1}}{n}$ pour $n \geqslant 2$. On a

$$t_{n+1} - t_n = \frac{nH_n - (n+1)H_{n-1}}{n(n+1)} = \frac{1 - H_{n-1}}{n(n+1)} \leqslant 0,$$

ce qui prouve la décroissance de (t_n).

(c) On sait que $H_n \sim \ln n$, on en déduit que $\frac{2H_{n-1}}{n} \sim \frac{2\ln(n-1)}{n}$ qui tend vers 0 par croissance comparée.
Comme on vient de voir que $\left(\frac{2H_{n-1}}{n}\right)$ est en plus décroissante, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$ est convergente par le critère spécial des séries alternées.

III. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de zeta au voisinage de 1.

8. *Développement asymptotique en 1*

(a) Puisque F est dérivable en 1, on a pour x au voisinage de 1 :

$$F(x) = F(1) + (x-1)F'(1) + o(x-1) = \ln 2 + (x-1)F'(1) + o(x-1).$$

Comme $1-x$ est au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned} 1 - 2^{1-x} &= 1 - \mathrm{e}^{(1-x)\ln 2} \\ &= 1 - \left(1 + (1-x)\ln 2 + \frac{((1-x)\ln 2)^2}{2!} + o((x-1)^2)\right) \\ &= (x-1)\ln 2 - \frac{((x-1)\ln 2)^2}{2!} + o((x-1)^2). \end{aligned}$$

(b) On a ainsi

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= \frac{\ln 2 + (x-1)F'(1) + o(x-1)}{(x-1)\ln 2 - \frac{((x-1)\ln 2)^2}{2!} + o((x-1)^2)} \\ &= \frac{1}{(x-1)\ln 2}\left(\frac{\ln 2 + (x-1)F'(1) + o(x-1)}{1 - (x-1)\frac{\ln 2}{2} + o(x-1)}\right) \\ &= \frac{1}{(x-1)\ln 2}\left[\ln 2 + (x-1)F'(1) + o(x-1)\right]\left(1 + (x-1)\frac{\ln 2}{2} + o(x-1)\right) \\ &= \frac{1}{(x-1)\ln 2}\left(\ln 2 + (x-1)F'(1) + (x-1)\frac{(\ln 2)^2}{2} + o(x-1)\right) \\ \zeta(x) &= \frac{1}{(x-1)} + \left(\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2}\right) + o(1). \end{aligned}$$

9. *Développement asymptotique en 1 (bis)*

(a) Par la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^x}$, on a

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x},$$

ce qui donne facilement l'encadrement souhaité.

(b) On a en sommant de $n=1$ à N, l'encadrement de la question précédente

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{N} v_n(x) \leqslant 1 - \frac{1}{(M+1)^x} \leqslant 2,$$

ce qui prouve que la série $\sum_n v_n(x)$ est convergente puisque c'est une série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est majorée.

(c) Pour $x \in]1,2]$ et $N \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \sum_{n=1}^{N} v_n(x) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} - \int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} - \left[\frac{(N+1)^{1-x}-1}{1-x}\right] \end{aligned}$$

puis en faisant tendre N vers l'infini, comme les deux termes de la somme de droite convergent, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \zeta(x) + \frac{1}{1-x}.$$

(d) Prenons x dans $[1,2]$. En sommant de $n=N+1$ à M l'encadrement du départ, on a

$$0 \leqslant \sum_{n=N+1}^{M} v_n(x) \leqslant \frac{1}{(N+1)^x} - \frac{1}{(M+1)^x},$$

ce qui donne en faisant tendre M vers l'infini,

$$0 \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n(x) \leqslant \frac{1}{(N+1)^x} \leqslant \frac{1}{N+1}.$$

Ce reste de rang N converge donc uniformément vers 0 sur $[1,2]$, ce qui prouve que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge uniformément sur $[1,2]$.

(e) Grâce à la convergence uniforme sur $[1,2]$, $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ est continue en 1^+, ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1) = \lim_{x\to 1^+} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x),$$

ce qui donne en utilisant les questions précédentes

$$\gamma = \lim_{x\to 1^+} \left(\zeta(x) + \frac{1}{1-x}\right).$$

Cela permet de conclure que pour x au voisinage de 1^+, on a

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).$$

10. *Application*
On a donc obtenu deux développements asymptotiques (avec celui de la question 8) de ζ en 1^+. L'unicité de la limite donne que $\gamma = \frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2}$, on trouve alors que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n} = -F'(1) = \left(\frac{\ln 2}{2} - \gamma\right) \ln 2.$$

III Calcul des $F(2k)$ à l'aide des nombres de Bernoulli

11. Soit (B_n) une suite de polynômes de Bernoulli. Comme $B_1' = B_0 = 1$, $B_1 = X + c$. De plus $\int_0^1 B_1 = \frac{1}{2} + c = 0$, ce qui donne $B_1 = X - \frac{1}{2}$. De même, on obtient $B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$.Il vient $b_1 = \frac{-1}{2}$ et $b_2 = \frac{1}{6}$.

12. Pour $n \geqslant 2$, $B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n' = \int_0^1 nB_{n-1} = n \underbrace{\int_0^1 B_{n-1}}_{0} = 0$.

13. *Symétrie*
Considérons le polynôme $C_n = (-1)^n B_n(1 - X)$.
On a $C_0 = 1$ et pour $n \geqslant 1$, $C_n' = (-1)^n(-1)B_n'(1 - X) = (-1)^{n-1} nB_{n-1}(1 - X) = nC_{n-1}$.
Enfin, $\int_0^1 C_n = \int_0^1 (-1)^n B_n(1 - x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n \int_0^1 B_n(u)\,\mathrm{d}u = 0$, par le changement de variable $u = 1 - x$. La suite de polynômes (C_n) vérifie donc les propriétés des polynômes de Bernoulli, par unicité on a $B_n = C_n$, ce qui donne $B_n(1 - X) = (-1)^n B_n(X)$.

14. *Développement en série de Fourier*
Soit k un entier naturel. L'application 2π-périodique g_k est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$ puisque $g_k(2\pi) = B_{2k}(1) = B_{2k}(0) = g_k(0)$ (c'est bien vrai pour $k = 0$ puisque puisque $B_0 = 1$). Le théorème de convergence normale s'applique et g_k est limite simple sur $\mathbb{R}$ (il y a convergence normale, mais ce n'est pas utile ici) de sa série de Fourier. Il ne reste plus qu'à prouver que g_k est paire pour conclure.
Si $x \in [-\pi, 0]$,
$g_k(-x) = B_{2k}(\frac{-x}{2\pi}) = B_{2k}(1 + \frac{x}{2\pi}) = B_{2k}\left(\frac{2\pi+x}{2\pi}\right) = g_k(x + 2\pi) = g_k(x)$, l'avant dernière égalité découle du fait que $x + 2\pi \in [\pi, 2\pi]$.

15. *Expresion des coefficients*
    (a) Soit $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$. On va effectuer deux intégrations par parties (IPP) successives. Pour la première, on posera $u = B_{2k}(\frac{t}{2\pi})$ et $v' = \cos(nt)$, pour la deuxième on posera $u = B_{2k-1}(\frac{t}{2\pi})$

et $v' = \sin(nt)$.

$$\begin{aligned}
a_n(k) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B_{2k}(\frac{t}{2\pi})\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\
\underbrace{=}_{IPP} &\ \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\left[B_{2k}(\frac{t}{2\pi})\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{2\pi}}_{0} - \int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}B'_{2k}(\frac{t}{2\pi})\frac{\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{-k}{n\pi^2}\int_0^{2\pi} B_{2k-1}(\frac{t}{2\pi})\sin(nt)\,\mathrm{d}t \quad \text{car } B'_{2k}(\tfrac{t}{2\pi}) = 2kB_{2k-1}(\tfrac{t}{2\pi}) \\
\underbrace{=}_{IPP} &\ \frac{-k}{n\pi^2}\left(\left[B_{2k-1}(\frac{t}{2\pi})\frac{\cos nt}{-n}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}B'_{2k-1}(\frac{t}{2\pi})\frac{\cos(nt)}{-n}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{-k}{n\pi^2}\left(\frac{-1}{n}\left(B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0)\right) + \int_0^{2\pi}\frac{2k-1}{-2n\pi}B_{2k-2}(\frac{t}{2\pi})\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{k}{(n\pi)^2}\left(B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0)\right) - \frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2}a_n(k-1).
\end{aligned}$$

(b) Soit $n \geqslant 1$. On a

$$a_n(1) = \frac{1}{n^2\pi^2}\left(\underbrace{B_1(1) - B_1(0)}_{1}\right) - \frac{1}{2n^2\pi^2}a_n(0).$$

Comme $a_n(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos nt\,\mathrm{d}t = 0$ pour $n \geqslant 1$, on a

$$a_n(1) = \frac{1}{n^2\pi^2}.$$

(c) Soit $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 2$. On a $2k-1 \geqslant 3$ d'où $B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0) = 0$.
Ainsi $a_n(k) = (2k)(2k-1)\dfrac{-1}{4n^2\pi^2}a_n(k-1)$. Une récurrence sur k immédiate donne alors

$$\begin{aligned}
a_n(k) &= \left(\frac{-1}{4n^2\pi^2}\right)^{k-1}\frac{(2k)!}{2}a_n(1) \\
&= \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}}.
\end{aligned}$$

On remarque pour la suite que cette formule reste vraie pour $k = 1$.

16. *Conclusion*
Soit $k \geqslant 1$. Comme $2k \geqslant 2$, on a $a_0(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B_{2k}(\frac{t}{2\pi})\,\mathrm{d}t = 0$.
L'égalité entre g_k et sa série de Fourier évaluée en $x = 0$, donne

$$g_k(0) = b_{2k} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(k) = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k-1}\pi^{2k}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}},$$

ce qui donne

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1}2^{2k-1}\pi^{2k}b_{2k}}{(2k)!}.$$

17. *Calcul effectif des b_n*

(a) La formule de Taylor appliquée au polynôme B_n de degré n donne

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

Or $B_n^{(k)}(X) = n(n-1)\dots(n-k+1)B_{n-k}(X)$, ce qui donne

$$\frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} = \binom{n}{k} b_{n-k},$$

et permet de conclure.

(b) Avec $x = 1$, on obtient $B_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}$, comme pour $n \geqslant 2$, $B_n(1) = B_n(0)$, on obtient $b_n = b_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}$ et donc $b_{n-1} = \dfrac{-1}{n} \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}$. Finalement la suite (b_n) est définie par

$$b_0 = 1, \quad \forall n \geqslant 1, \quad b_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k.$$

Voici une petite procédure MAPLE donnant la valeur exacte des b_k :

```
> b[0] :=1 : for n to 10 do b[n] :=-1/(n+1)*sum(binomial(n+1,k)*b[k],k=0..n-1) ;
od ;
```

On trouve alors par exemple

$$b_{10} = \frac{5}{66},$$

et

$$\zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93\ 555} \quad \text{et} \quad F(10) = \frac{73\pi^{10}}{6\ 842\ 880}.$$