ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1985

***

MP'

MATHEMATIQUES II

(4 pages dactylographiées)

Dans tout le problème, on se place dans un espace E affine euclidien orienté de dimension 3 ; le temps t décrit un intervalle non vide et non réduit à un point. On donne un point fixe O et un vecteur fixe unitaire $\vec{k}$, qui définissent une droite matérielle D. On donne d'autre part un point mobile G et un vecteur unitaire mobile $\vec{u}$, qui définissent une droite matérielle mobile Δ. Les positions à l'instant t de G, $\vec{u}$ et Δ sont notées $G(t)$, $\vec{u}(t)$, Δ_t ; on supposera que les fonctions $t \mapsto G(t)$ et $t \mapsto \vec{u}(t)$ admettent pour tout t une dérivée continue.

Chaque fois que, dans la suite de cet énoncé, on parlera d'un point matériel de D (resp. de Δ) il s'agira d'un point matériel situé sur D (resp. sur Δ) et invariablement lié à elle, c'est-à-dire d'un point P tel que $\overrightarrow{OP} = \mu\, \vec{k}$ (resp. un point M tel que $\overrightarrow{GM} = \lambda \vec{u}$), où μ (resp. λ) est indépendant du temps.

La deuxième partie du problème étudie un cas particulier de la situation considérée dans la première partie, mais elle est très largement indépendante de celle-ci.

PREMIERE PARTIE

I-1. Soit c une constante non nulle. A tout λ réel on associe le point matériel M_λ de Δ et le point matériel P_λ de D tels qu'à chaque instant :

$$\overrightarrow{GM_\lambda} = \lambda \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{OP_\lambda} = c\, \lambda \vec{k}$$

a) Calculer $\overrightarrow{P_\lambda M_\lambda}^2$.

b) Etablir l'équivalence des propriétés suivantes :

i. Pout tout λ réel, la distance $P_\lambda M_\lambda$ des points P_λ et M_λ est indépendante de t.

ii. Pour au moins trois valeurs distinctes de λ, la distance $P_\lambda M_\lambda$ est indépendante de t.

iii. Les trois quantités

$$\vec{u}.\vec{k} \quad , \quad (\vec{u}-c\vec{k}).\overrightarrow{OG} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OG}^2$$

sont indépendantes de t.

I-2. On se place dans les hypothèses de la question précédente. On suppose qu'il existe un réel strictement positif R tel que, pour au moins trois valeurs distinctes de λ, la distance $P_\lambda M_\lambda$ soit à chaque instant égale à R. Etablir qu'alors $P_\lambda M_\lambda = R$ est vrai pour tout λ et tout t. Que dire de $\vec{u}$ et de c ? Comment le mouvement de M_λ se déduit-il de celui de G ?

I-3. Soit c une constante non nulle. A tout λ réel non nul on associe cette fois le point matériel M_λ de Δ et le point matériel Q_λ de D vérifiant à chaque instant $\overrightarrow{GM}_\lambda = \lambda\, \vec{u}$ et $\overrightarrow{OQ}_\lambda = \dfrac{c}{\lambda}\, \vec{k}$

a) Calculer $\overrightarrow{Q_\lambda M_\lambda}^2$.

b) Etablir l'équivalence des propriétés suivantes :

i. Pout tout $\lambda \neq 0$, la distance $Q_\lambda M_\lambda$ est indépendante de t

ii. Pour au moins trois valeurs distinctes et non nulles de λ, la distance $Q_\lambda M_\lambda$ est indépendante de t.

iii. Les trois quantités :

$$\vec{u}.\vec{OG}, \quad \vec{k}.\vec{OG} \quad \text{et} \quad \vec{CG}^2 - 2c\,\vec{u}.\vec{k}$$

sont indépendantes de t.

c) La distance $Q_\lambda M_\lambda$ peut-elle être indépendante à la fois de λ et de t ?

I-4. On considère trois points matériels de Δ distincts, A_0, A_1, A_2 et trois points matériels de D, distincts, B_0, B_1, B_2. On recherche un couple de points matériels, Φ sur Δ, F sur D, tels que

$$\overline{\Phi A_0}.\overline{FB_0} = \overline{\Phi A_1}.\overline{FB_1} = \overline{\Phi A_2}.\overline{FB_2} \bullet$$

Etablir qu'il y a existence et unicité d'un tel couple si et seulement si :

$$\frac{\overline{A_0A_2}}{\overline{A_0A_1}} \neq \frac{\overline{B_0B_2}}{\overline{B_0B_1}}$$

I-5. Δ est supposée mobile de telle sorte qu'il existe trois points matériels distincts A_0, A_1, A_2 de Δ et trois points matériels distincts B_0, B_1, B_2 de D tels que les trois distances A_0B_0, A_1B_1 et A_2B_2 soient constantes.

Déduire des questions précédentes que, pour tout point matériel M de Δ, à l'exception peut-être d'un seul, la trajectoire de M est tracée sur une sphère dont le centre est sur D ; que dire, s'il existe, de la trajectoire du point exceptionnel ?

DEUXIEME PARTIE

On introduit ici deux vecteurs fixes $\vec{i}$ et $\vec{j}$ tels que le repère $\mathcal{R} = (O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ soit orthonormé direct. Le temps t, sauf dans la dernière question, décrit $\mathbb{R}$ tout entier.

On pose

$\vec{I} = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$

$\vec{J} = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$

$\vec{u} = \sin 2t\,\vec{J} + \cos 2t\,\vec{k} = -\sin 2t \sin t\,\vec{i} + \sin 2t \cos t\,\vec{j} + \cos 2t\,\vec{k}$

et on définit un point mobile G par

$\vec{OG} = 2\cos t\,\vec{I}$

Conformément au préambule, Δ désigne la droite matérielle mobile définie par G et $\vec{u}$.

II-1. Préciser la courbe Γ décrite par G ; on appellera A le point de Γ le plus éloigné de l'origine O.

II-2. Pour tout réel λ, on désigne par M_λ le point matériel de Δ défini par $\vec{GM_\lambda} = \lambda\vec{u}$, et par C_λ la courbe trajectoire de M_λ.

a) Etablir que C_λ est, pour $\lambda \neq 0$, tracée sur une sphère dont le centre est situé sur D ; on en précisera le centre et le rayon.

b) Donner les coordonnées cartésiennes x, y, z dans le repère $\mathcal{R}$ du point $M_\lambda(t)$, position de M_λ à l'instant t.

c) Comparer C_λ et $C_{-\lambda}$.

d) Comparer, pour tout t, Δ_t et $\Delta_{t+\pi}$.

II-3.

a) Soit S la surface engendrée par Δ_t quand t décrit $\mathbb{R}$. Quelle est l'intersection de S et du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$?

b) Les coordonnées du point générique M de l'espace dans le repère $(A\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant notées X, Y, Z, on introduit des coordonnées cylindriques dans ce repère, c'est-à-dire que l'on utilise r, θ, Z avec :

$$X = r\cos\theta \qquad Y = r\sin\theta$$

Etablir qu'il existe un système de coordonnées cylindriques (r, θ, Z) de $M_\lambda(t)$ dans ce repère tel que $\theta = t + \frac{\pi}{2}$; le donner. Donner une représentation de S du type $f(r, \theta, Z) = 0$.

c) P étant un plan passant par la droite $(A\ ;\ \vec{k})$, établir que l'intersection de S et P est composée de droites que l'on précisera et dont on discutera le nombre.

II-4. Dans cette question et les deux suivantes, on étudie la courbe C_1 décrite par $M_1(t)$ quand t décrit $\mathbb{R}$; pour plus de simplicité C_1 et $M_1(t)$ seront notés C et M(t).

a) Etablir que les coordonnées cartésiennes de M(t) dans $\mathcal{F}$ sont

$$x(t) = 2 - 2(\sin^2 t)(1 + \cos t)$$

$$y(t) = 2\sin t\cos t\,(1 + \cos t)$$

$$z(t) = \cos 2t$$

b) Soit L(t) le milieu du segment d'extrémités M(t) et $M(t + \pi)$. Déterminer la courbe décrite par L lorsque t décrit $\mathbb{R}$; on indiquera ses projections sur les trois plans de coordonnées du repère $\mathcal{F}$, sa nature, ses éléments remarquables.

II-5. Soit W la courbe projection orthogonale de C sur le plan $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ et m(t) la projection orthogonale de M(t) sur ce plan.

a) Un point G de Γ, distinct de A, étant fixé, donner une construction des points d'intersection de W avec la droite (AG) ; on pourra utiliser le cercle de centre G tangent à la droite (OA).

b) Construire la courbe W.

c) Quelle est la projection orthogonale sur le plan $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ de la partie de S formée des points $M_\lambda(t)$ tels que $-1 \leqslant \lambda \leqslant 1$?

II-6. Etudier et tracer les courbes V et U, projections orthogonales respectives de C sur les plans $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{k})$ et $(O\ ;\ \vec{j}, \vec{k})$. Quelle propriété résulte pour V (resp. pour U) de l'étude faite en (II-4.b) ? Que dire de la position relative de C et du plan d'équation

$$z = \frac{x}{2}\ ?$$

II-7. Dans cette question, t décrit l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Un solide mobile Σ est lié à la droite matérielle Δ, c'est-à-dire que G et $\vec{u}$ sont fixes par rapport à Σ. Soit $\vec{\ell}$ le vecteur lié à Σ qui à l'instant $t = \frac{\pi}{4}$ coïncide avec $\vec{I}$. On pose à chaque instant $\vec{\ell} = \cos\Psi\ \vec{I} + \sin\Psi\ \vec{u} \wedge \vec{I}$

(on légitimera cette écriture), et l'on suppose que Ψ est une fonction de t admettant une dérivée continue.

a) Trouver l'expression de Ψ en fonction de t pour que le mouvement de Σ soit constamment tangent à un mouvement de rotation, c'est-à-dire pour que, pour tout t, il existe un mouvement de rotation ayant à cet instant même torseur de vitesses que le mouvement de Σ.

b) Montrer que les plans normaux, à un instant t donné, aux trajectoires des points matériels de Δ ont une droite en commun.