

Makrem Salhi : makremessalhi@gmail.com

**Inégalité de Hölder**

1. Soient  $x, y \in \mathbb{R}_+$ . L'inégalité de Young que l'on doit établir est trivialement vraie si  $x = 0$  ou  $y = 0$ . On suppose alors que  $x > 0$  et  $y > 0$ . Comme  $t \mapsto \ln(t)$  est concave sur  $\mathbb{R}_+$  car sa dérivée est décroissante, on déduit que

$$\ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p} \ln(x^p) + \frac{1}{q} \ln(y^q),$$

donc

$$\ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \geq \ln(xy).$$

Par suite,

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

2. Comme  $XY$  est une variable aléatoire finie, son espérance est finie et on a, par le théorème de Transfert,

$$\mathbf{E}(XY) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} xy P(X = x, Y = y).$$

Comme  $X$  et  $Y$  sont finies et positives, il vient, par la question précédente,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(XY) &= \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} xy P(X = x, Y = y) \\ &\leq \frac{1}{p} \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} x^p P(X = x, Y = y) + \frac{1}{q} \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} y^q P(X = x, Y = y) \\ &\leq \frac{1}{p} \sum_{x \in X(\Omega)} x^p \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) + \frac{1}{q} \sum_{y \in Y(\Omega)} y^q \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y) \\ &\leq \frac{1}{p} \sum_{x \in X(\Omega)} x^p P(X = x) + \frac{1}{q} \sum_{y \in Y(\Omega)} y^q P(Y = y) \\ &\leq \frac{\mathbf{E}(X^p)}{p} + \frac{\mathbf{E}(Y^q)}{q}. \end{aligned}$$

Soulignons ici que le passage de la ligne 2 à la ligne suivante dans la suite des inégalités ci-haut est justifié par le fait que les sommes sont finies, le passage de la ligne 3 à la ligne suivante utilise le fait que  $\{x, \quad x \in X(\Omega)\}$  est un système complet d'événements, de même pour l'ensemble  $\{y, \quad y \in Y(\Omega)\}$  et, enfin, la dernière ligne est juste une application du

théorème de Transfert.

Maintenant, si  $\mathbf{E}(X^p) = \mathbf{E}(Y^q) = 1$ , l'inégalité de Hölder est vérifiée. Notons aussi que  $X$  est positive et donc

$$\mathbf{E}(X^p) = 0 \iff \|X\|_p = 0,$$

de même,

$$\mathbf{E}(Y^q) = 0 \iff \|Y\|_q = 0.$$

Par suite, si  $X$  ou  $Y$  est nulle, l'inégalité est aussi automatiquement vérifiée.

Supposons alors que  $X > 0$  et  $Y > 0$ . Ainsi,

$$\mathbf{E}\left(\frac{X}{\|X\|_p}\right)^p = 1 = \left(\frac{Y}{\|Y\|_q}\right)^q.$$

D'après l'étude qu'on a fait,

$$\mathbf{E}\left(\frac{X}{\|X\|_p} \frac{Y}{\|Y\|_q}\right) \leq 1,$$

ce qui fournit

$$\mathbf{E}(XY) \leq \|X\|_p \|Y\|_q,$$

d'où le résultat.

3. Lorsque  $p = q = 2$ , on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Prouvons maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans sa version générale sans avoir recours à l'inégalité de Hölder. Pour cela, on considère deux variables aléatoires  $U$  et  $V$  admettant chacune un moment d'ordre 2 et on pose :  $f(t) = \mathbf{E}((tU + V)^2)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

Par suite,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \mathbf{E}(U)^2 t^2 + 2t\mathbf{E}(UV) + \mathbf{E}(V^2) \geq 0.$$

Donc,

$$\Delta' = (\mathbf{E}(UV))^2 - \mathbf{E}(U)^2 \mathbf{E}(V)^2 \leq 0.$$

Par conséquent,

$$|\mathbf{E}(UV)| \leq \sqrt{\mathbf{E}(U)} \sqrt{\mathbf{E}(V)}.$$

D'où le résultat.

### Une inégalité de déviation

4. Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Le développement en série entière de la fonction ch fournit

$$\text{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

Comme  $(2n)! \geq 2.4 \dots (2n)$ , donc  $(2n)! \geq 2^n n!$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Il en résulte que

$$\text{ch}(t) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!}.$$

D'autre part, on sait que

$$e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!},$$

d'où l'inégalité recherchée.

5. Soient  $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ . Si  $t = 0$ , l'inégalité à prouver est vérifiée. Supposons alors que  $t > 0$  et posons

$$f_i(x) = e^{tc_i x}, \quad x \in \mathbb{R}, i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

L'indépendance mutuelle des variables aléatoires  $X_i$  implique l'indépendance mutuelle de la famille des variables aléatoires  $(f_i(X_i))_{1 \leq i \leq n}$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \exp \left( t \sum_{i=1}^n c_i X_i \right) \right) &= \mathbb{E} \left( \prod_{i=1}^n e^{tc_i X_i} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E} (e^{tc_i X_i}). \end{aligned}$$

D'autre part, par le théorème de Transfert, on a

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{E} (e^{tc_i X_i}) = \frac{1}{2} e^{tc_i} + \frac{1}{2} e^{-tc_i} = \text{ch}(tc_i).$$

Il vient, par la question précédente, que

$$\mathbb{E} \left( \exp \left( t \sum_{i=1}^n c_i X_i \right) \right) = \prod_{i=1}^n \text{ch}(c_i t) \leq \prod_{i=1}^n e^{\frac{c_i^2 t^2}{2}}.$$

Par suite,

$$\mathbb{E} \left( \exp \left( t \sum_{i=1}^n c_i X_i \right) \right) \leq \exp \left( \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2 \right).$$

6. Soient  $x \geq 0$ ,  $t \geq 0$  et  $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ . Si  $x = 0$ , le terme à gauche de l'inégalité à prouver est nul car il s'agit dans ce cas de la probabilité d'un événement impossible, et donc l'inégalité est automatiquement vérifiée si  $x = 0$ . Supposons donc que  $x > 0$ , comme l'application exponentielle est une bijection sur  $\mathbb{R}$ , on a

$$\left( \exp \left( x \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| \right) > e^{tx} \right) = \left( \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| > t \right).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left( \exp \left( x \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| \right) > e^{tx} \right) &= \mathbf{P} \left( \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| > t \right) \\ &= \mathbf{P} \left( \sum_{i=1}^n c_i X_i > t \right) + \mathbf{P} \left( \sum_{i=1}^n c_i X_i < -t \right) \\ &= \mathbf{P} \left( \sum_{i=1}^n c_i X_i > t \right) + \mathbf{P} \left( \sum_{i=1}^n c_i (-X_i) > t \right) \\ &= \mathbf{P} \left( \exp \left( x \sum_{i=1}^n c_i X_i \right) > e^{tx} \right) + \mathbf{P} \left( \exp \left( x \sum_{i=1}^n c_i (-X_i) \right) > e^{tx} \right) \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'inégalité de Markov fournit

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left( \exp \left( x \sum_{i=1}^n c_i X_i \right) > e^{tx} \right) &\leq e^{-xt} \mathbf{E} \left( \exp \left( x \sum_{i=1}^n c_i X_i \right) \right) \\ &\leq e^{-xt} \exp \left( \frac{x^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2 \right) \quad (\text{d'après la question 5}). \end{aligned}$$

Comme les variables aléatoires  $-X_i$  suivent aussi une loi de Rademacher car on a :  $(-X_i)(\Omega) = \{-1, 1\}$  et  $\mathbf{P}(-X_i = 1) = \mathbf{P}(-X_i = -1) = \frac{1}{2}$ , et comme les  $-X_i$  sont aussi indépendantes, l'inégalité de Markov et la question 5 donnent

$$\mathbf{P} \left( \exp \left( x \sum_{i=1}^n c_i (-X_i) \right) > e^{tx} \right) \leq e^{-xt} \exp \left( \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2 \right).$$

En conclusion, on a

$$\mathbf{P} \left( \exp \left( x \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| \right) > e^{tx} \right) \leq 2e^{-xt} \exp \left( \frac{x^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2 \right).$$

7. Soient  $t \geq 0$  et  $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ . Pour tout  $x > 0$ , on a, par bijectivité de la fonction exponentielle,

$$\mathbf{P} \left( \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| > t \right) = \mathbf{P} \left( \exp \left( x \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| \right) > e^{xt} \right).$$

En choisissant  $x = \frac{t}{\sum_{i=1}^n c_i^2}$ , l'inégalité précédente fournit immédiatement le résultat es-compté.

### Inégalités de Khintchine

8. En posant  $x_0 = 0$ , on a

$$X(\Omega) \subset \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$$

où :  $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_m$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ . Ainsi,  $F_X(t) = 1$  si  $t > x_m$ ,  $F_X(t) = 0$  si  $t < x_0$  et  $F_X$  est constante sur chaque intervalle  $[x_j, x_{j+1}]$  pour  $j = 0, \dots, m-1$ . On en déduit que  $F_X$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi, la fonction  $t \mapsto t^{p-1} F_X(t)$  est continue par morceau sur  $\mathbb{R}$ , comme elle est nulle sur  $[x_m, +\infty[$ , on déduit qu'elle est intégrable et

donc  $\int_{\mathbb{R}_+} t^{p-1} F_X(t) dt$  converge. De surcroît, on a

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t) dt &= \int_0^{x_m} t^{p-1} F_X(t) dt \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} t^{p-1} F_X(t) dt \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} t^{p-1} \sum_{j=k+1}^m P(X=x_j) dt \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=k+1}^m P(X=x_j) \int_{x_k}^{x_{k+1}} t^{p-1} dt \\
 &= \frac{1}{p} \sum_{j=1}^m P(X=x_j) \sum_{k=0}^{j-1} (x_k^{p+1} - x_k^p) \\
 &= \frac{1}{p} \sum_{j=1}^m P(X=x_j) x_j^p \\
 &= \frac{1}{p} \mathbf{E}(X^p) \quad (\text{théorème de Transfert}).
 \end{aligned}$$

9. La fonction  $u : t \mapsto t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et, par puissances comparées,  $u(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  ( $t \rightarrow \pm\infty$ ). Comme la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable au voisinage de  $+\infty$ , il en est de même pour la fonction  $u$  qui est alors intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . D'où la convergence de l'intégrale en question.

Par ailleurs, en posant

$$X = \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|,$$

on observe que  $X$  est une variable aléatoire réelle positive et finie car les  $X_i$  sont finies. En prenant  $p = 4$  dans l'égalité établie dans la question précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(X^4) &= 4 \int_0^{+\infty} t^3 \mathbf{P}(X > t) dt \\
 &\leq 8 \int_0^{+\infty} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (\text{d'après la question 7}).
 \end{aligned}$$

10. On a

$$\left( \sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 X_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n c_i c_j X_i X_j.$$

Notons que :  $\mathbf{E}(X_i) = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , donc si  $i \neq j$ , par indépendance des  $X_i$ , on a

$$\mathbf{E}(X_i X_j) = \mathbf{E}(X_i) \mathbf{E}(X_j) = 0.$$

De plus, par le théorème de Transfert, on a  $\mathbf{E}(X_i^2) = 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Ainsi, par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbf{E} \left( \left( \sum_{i=1}^n c_i X_i^2 \right) \right) = \sum_{i=1}^n c_i^2.$$

11. Afin de simplifier les notations, posons  $S = \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|$  et  $c = \sum_{i=1}^n c_i^2$ . Je propose deux méthodes :

**Première méthode** : par application de la question 8 pour la variable aléatoire  $X = S$  qui est manifestement positive et finie, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(S^p) &= p \int_0^{+\infty} t^{p-1} P(S > t) dt \\ &\leq 2p \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-\frac{t^2}{2c}} dt \quad (\text{d'après la question 7}) \\ &\leq 2pc^{\frac{p}{2}} \int_0^{+\infty} u^{p-1} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (\text{changement de variable } = \frac{t}{\sqrt{c}}). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\left\| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right\|_p \leq \beta_p \left\| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right\|_2,$$

où

$$\beta_p = 2p \left( \int_0^{+\infty} u^{p-1} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right)^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}_+^*.$$

**Deuxième méthode** : soit  $\lambda > 0$  et considérons la fonction  $f(x) = x^p e^{-\lambda x}$  définie sur  $\mathbb{R}_+$ . On a  $f'(x) = x^{p-1} e^{-\lambda x} (p - \lambda x)$  et par suite :  $\sup_{x \geq 0} f(x) = f\left(\frac{p}{\lambda}\right)$ . Ainsi,

$$\forall x \geq 0, \quad x^p \leq \frac{1}{\lambda^p} p^p e^{-p} e^{\lambda x}.$$

Il en découle que

$$S^p \leq \frac{1}{\lambda^p} p^p e^{-p} e^{\lambda S}.$$

Par croissance de l'espérance, on a

$$\mathbf{E}(S^p) \leq \frac{1}{\lambda^p} p^p e^{-p} \mathbf{E}(e^{\lambda S}).$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(S^p) &\leq \frac{p^p e^{-p}}{\lambda^p} \left( \mathbf{E} \left( \exp \left( \lambda \sum_{i=1}^n c_i X_i \right) \right) + \mathbf{E} \left( \exp \left( \sum_{i=1}^n c_i (-X_i) \right) \right) \right) \\ &\leq \frac{p^p e^{-p}}{\lambda^p} \left( 2e^{\frac{c}{2} \lambda^2} \right) \quad (\text{d'après la question 5}). \end{aligned}$$

En choisissant  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{c}}$ , on obtient

$$\mathbf{E}(S^p) \leq 2p^p e^{-p} e^{\frac{1}{2} c^{\frac{p}{2}}}.$$

On en déduit aussitôt que

$$\left\| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}} p e^{\frac{p-2}{2}} \left\| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right\|_2.$$

D'où l'inégalité souhaitée.

12. Soit  $p \geq 2$ . La fonction  $g : t \mapsto t^{\frac{p}{2}}$  est convexe sur  $\mathbb{R}_+^*$  car sa dérivée  $f'(t) = \frac{p}{2} t^{\frac{p}{2}-1}$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Posons encore  $S = \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|$ , par le théorème de Transfert, on a

$$\mathbf{E}(S^2) = \sum_{s \in S(\Omega)} s^2 \mathbf{P}(S = s).$$

Ainsi, en utilisant la convexité de  $g$  et en gardant en mémoire le fait que l'on a :  $\sum_{s \in S(\Omega)} P(S = s) = 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}(S^2))^{\frac{p}{2}} &= g \left( \sum_{s \in S(\Omega)} s^2 \mathbf{P}(S = s) \right) \\ &\leq \sum_{s \in S(\Omega)} \mathbf{P}(S = s) g(s^2) \\ &= \sum_{s \in S(\Omega)} s^p \mathbf{P}(S = s) \\ &= \mathbf{E}(S^p) \quad (\text{théorème de Transfert}). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\left\| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right\|_2 \leq \left\| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right\|_p.$$

13. Un simple calcul fournit

$$\theta = \frac{p}{4-p},$$

comme  $1 \leq p < 2$ , on déduit immédiatement que  $\theta \in ]0, 1[$ .

14. Soulignons que la question précédente fournit l'identité

$$1 = \frac{1}{\frac{p}{2\theta}} + \frac{1}{\frac{2}{1-\theta}},$$

de plus, on a

$$\frac{p}{2\theta} = \frac{4-p}{2} \geq 1 \text{ et } \frac{2}{1-\theta} = \frac{2(4-p)}{2-p} \geq 1.$$

Posons, comme d'habitude,  $S = \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| \geq 0$ . En écrivant

$$S^2 = S^{2\theta+2(1-\theta)},$$

puis en appliquant l'inégalité de Hölder obtenue dans la question 2, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(S^2) &= \mathbf{E}(S^{2\theta} S^{2(1-\theta)}) \\ &\leq \left( \mathbf{E}(S^{2\theta})^{\frac{p}{2\theta}} \right)^{\frac{2\theta}{p}} \left( \mathbf{E}(S^{2(1-\theta)})^{\frac{2}{1-\theta}} \right)^{\frac{1-\theta}{2}} \\ &\leq \left( \mathbf{E}(S^p) \right)^{\frac{2\theta}{p}} \left( \mathbf{E}(S^4) \right)^{\frac{1-\theta}{2}} \end{aligned}$$

15. Soit  $S = \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|$ . La question précédente montre que

$$\mathbf{E}(S^2) \leq \left( \mathbf{E}(S^p) \right)^{\frac{2\theta}{p}} \left( \mathbf{E}(S^4) \right)^{\frac{1-\theta}{2}}.$$

Par la question 11, en choisissant  $p = 4$ , il existe une constante  $\mu > 0$  telle que

$$\mathbf{E}(S^4) \leq \mu \left( \mathbf{E}(S^2) \right)^2.$$

Ainsi,

$$\mathbf{E}(S^2) \leq \mu^{\frac{1-\theta}{2}} \left( \mathbf{E}(S^2) \right)^{1-\theta} \left( \mathbf{E}(S^p) \right)^{\frac{2\theta}{p}}.$$

On en déduit que

$$\left( \mathbf{E}(S^2) \right)^{1-\theta} \left\{ \mu^{\frac{1-\theta}{2}} \left( \mathbf{E}(S^p) \right)^{\frac{2\theta}{p}} - \left( \mathbf{E}(S^2) \right)^\theta \right\} \geq 0.$$

Comme  $\left( \mathbf{E}(S^2) \right)^{1-\theta} \geq 0$ , on conclut que

$$\left( \mathbf{E}(S^2) \right)^\theta \leq \mu^{\frac{1-\theta}{2}} \left( \mathbf{E}(S^p) \right)^{\frac{2\theta}{p}}.$$

En conclusion, on a

$$\left( \mathbf{E}(S^2) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \mu^{\frac{1-\theta}{4\theta}} \left( \mathbf{E}(S^p) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En posant

$$\tilde{\alpha}_p = \frac{1}{\mu^{\frac{1-\theta}{4\theta}}},$$

on obtient l'inégalité voulue.

16. On pose :  $\alpha_p = \min(\tilde{\alpha}_p, 1)$  et le résultat demandé découle immédiatement des questions 12 et 15.

### Une première conséquence

17. L'application  $\varphi$  est bien définie car il s'agit de l'espérance de variables aléatoires finies. En outre,  $\varphi$  est manifestement symétrique, elle est linéaire à gauche car l'espérance est linéaire et elle est positive par positivité de l'espérance. Finalement, si  $\varphi(X, X) = 0$ , alors, comme  $X \in L^0(\Omega)$ , on a  $\|X\| = 0$  et donc  $X = 0$ . Il en découle que  $\varphi$  est bien un produit scalaire sur  $L^0(\Omega)$ .

18. Soit  $u \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ , alors  $\psi(u)$  est une variable aléatoire finie comme somme finie de variables aléatoires finies, d'où le résultat.

Pour tout  $u, v \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ , on a

$$\begin{aligned}\varphi(\psi(u), \psi(v)) &= \varphi\left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_i X_i, \sum_{j=0}^{+\infty} v_j X_j\right) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_i v_j \varphi(X_i, X_j) \quad (\text{les deux sommes sont finies}).\end{aligned}$$

Par ailleurs, par indépendance des  $X_i$ , on a

$$\varphi(X_i X_j) = \mathbf{E}(X_i X_j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ 1, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

On en déduit que

$$\varphi(\psi(u), \psi(v)) = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i v_i = \langle u, v \rangle,$$

ceci montre que  $\psi$  conserve le produit scalaire.

19. Notons que  $\psi$  est linéaire et donc  $\mathbf{R} = \psi(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})})$  est un sous espace vectoriel de  $L^0(\Omega)$ . Soient  $U, V \in \mathbf{R}$ , il existe alors  $u, v \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$  tels que

$$U = \psi(u) = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i X_i \quad \text{et} \quad V = \psi(v) = \sum_{i=0}^{+\infty} v_i X_i.$$

Notons  $n$  le plus grand indice pour lequel  $u_i = v_i = 0$  pour tout  $i \geq n$ . Ainsi,

$$U = \sum_{i=0}^n u_i X_i \quad \text{et} \quad V = \sum_{i=0}^n v_i X_i.$$

En combinant les questions 11 et 16, on observe que

$$\alpha_p \|U\|_2 \leq \|U\|_p \leq \beta_p \|U\|_2.$$

Cela montre que les normes  $\|\cdot\|_p$  et  $\|\cdot\|_2$  sont équivalents sur  $\mathbf{R}$ . Par suite, les normes  $\|\cdot\|_q$  et  $\|\cdot\|_2$  sont équivalents sur  $\mathbf{R}$ . Par transitivité de la relation d'équivalence des normes, on déduit que les normes  $\|\cdot\|_p$  et  $\|\cdot\|_q$  sont équivalents sur  $\mathbf{R}$ .

### Une deuxième conséquence

20. Soit  $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ , posons :  $S = \left| \sum_{j=1}^k a_j X_j \right|$ . Par le théorème de Transfert, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(S) &= \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{-1, 1\}^k} \left| \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i \right| P(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_k = \varepsilon_k) \\ &= \frac{1}{2^k} \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{-1, 1\}^k} \left| \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i \right| \quad (\text{les } X_i \text{ sont indépendantes}).\end{aligned}$$

D'autre part, les questions 11 et 16 assurent l'existence de deux constantes  $\beta_1 > 0$  et  $\alpha_1 > 0$  telles que

$$\alpha_1 \|S\|_2 \leq \mathbf{E}(S) \leq \beta_1 \|S\|_2.$$

En outre, on a, par la question 10,

$$\|S\|_2 = \|(a_1, \dots, a_k)\|_2^{\mathbb{R}^k},$$

d'où le résultat demandé.

21. On ordonne les  $n = 2^k$  éléments de  $\{-1, 1\}^k$  de manière arbitraire, on observe aussi que l'application  $T$  est linéaire et injective. En effet, si  $(a_1, \dots, a_k) \in \ker(T)$ , alors, on a, en particulier :  $\sum_{i=1}^k \text{sign}(a_i) a_i = 0$  et donc  $a_i = 0$  pour tout  $i = 1, \dots, k$ . Par suite,  $F = T(\mathbb{R}^k)$  est s-ev de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $k$ . Soit  $x \in F$ , il existe alors  $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$  tel que  $x = T(a_1, \dots, a_k)$  et on a

$$\|x\|_1^{\mathbb{R}^n} = \frac{1}{2^k} \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{-1, 1\}^k} \left| \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i \right|.$$

D'autre part, en posant  $S_1 = \sum_{i=1}^k a_i X_i$ , on voit que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(S_1^2) &= \mathbf{E} \left( \sum_{i,j=1}^k a_i a_j X_i X_j \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^k a_i a_j \mathbf{E}(X_i X_j) \\ &= \sum_{i=1}^k a_i^2 \\ &= \left( \|(a_1, \dots, a_k)\|_2^{\mathbb{R}^k} \right)^2. \end{aligned}$$

Cependant, on a, par le théorème de Transfert,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(S_1^2) &= \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{-1, 1\}^k} \left( \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i \right)^2 \mathbf{P}(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_k = \varepsilon_k) \\ &= \frac{1}{2^k} \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{-1, 1\}^k} \left( \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i \right)^2 \\ &= n \|T(a_1, \dots, a_k)\|_2^{\mathbb{R}^n} \\ &= n \|x\|_2^{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|(a_1, \dots, a_k)\|_2^{\mathbb{R}^k} = \sqrt{n} \|x\|_2^{\mathbb{R}^n}.$$

On conclut, à l'aide de la question précédente, que

$$\forall x \in F, \quad \alpha_1 \sqrt{n} \|x\|_2^{\mathbb{R}^n} \leq \|x\|_1^{\mathbb{R}^n} \leq \beta_1 \sqrt{n} \|x\|_2^{\mathbb{R}^n},$$

d'où le résultat prononcé.