

CCP 2021 – Maths 2 – Un corrigé

EXERCICE

1 – Soit $D \in D_n(\mathbb{R})$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$. On a alors :

$${}^t DA = DA = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{1,1} & \cdots & \lambda_1 a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n a_{n,1} & \cdots & \lambda_n a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Donc $\langle D|A \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_{i,i}$. Ainsi si $A \in (D_n(\mathbb{R}))^\perp$ on a en particulier pour $E_{k,k}$ avec $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$0 = \langle E_{k,k} | A \rangle = a_{k,k}$$

Donc les coefficients diagonaux de A sont tous nuls. Réciproquement, si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,i} = 0$

alors pour toute matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on a $\langle D|A \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_{i,i} = 0$.

L'orthogonal de $D_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

PROBLÈME

Partie I : quelques exemples

2 – Si A est diagonalisable, on pose alors $D = A$ et $N = 0$ et on vérifie immédiatement que le couple (D, N) vérifie les quatre propriétés de l'énoncé :

Si A est diagonalisable, sa décomposition de Dunford est $(A, 0)$.

De la même façon et avec une vérification tout aussi immédiate :

Si A est nilpotente, sa décomposition de Dunford est $(D, N) = (0, A)$.

On pose désormais $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a bien $A = D + N$, D est

diagonalisable car diagonale, N est nilpotente car $N^2 = 0$, mais $ND = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $DN = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

. On n'a donc pas $ND = DN$ et le couple (D, N) proposé n'est pas la décomposition de Dunford de A .

3 – Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; son polynôme caractéristique est $\chi_A = X^2 + 1$. Si A avait une décomposition de Dunford (D, N) dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors d’après l’énoncé on aurait $\chi_A = \chi_D$ et donc la matrice D diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ aurait un polynôme caractéristique non scindé : absurde. Ainsi :

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n’a pas de décomposition de Dunford dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4 – On a :

$$\chi_A = - \begin{vmatrix} 3-X & 0 & 8 \\ 3 & -1-X & 6 \\ -2 & 0 & -5-X \end{vmatrix} = (1+X) \begin{vmatrix} 3-X & 8 \\ -2 & -5-X \end{vmatrix} = (1+X)(X^2 + 2X + 1)$$

On a donc $\chi_A = (1+X)^3$.

Comme χ_A est scindé, A dispose d’une décomposition de Dunford notée (D, N) et la matrice D a pour polynôme caractéristique $\chi_D = \chi_A = (X+1)^3$. Donc $\text{Sp}(D) = \{-1\}$ et D étant de plus diagonalisable, elle est semblable à $-I_3$ qui n’est semblable qu’à elle-même.

Donc la décomposition de Dunford de A est (D, N) avec $D = -I_3$ et $N = A + I_3$, soit

explicitement : $N = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

5 – Comme (D, N) est une décomposition de Dunford de A on a $A = D + N$ et $ND = DN$. Ainsi $\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$.

Comme D est ici diagonale, on a $\exp(D) = \exp(-I_3) = \text{diag}(e^{-1}, e^{-1}, e^{-1}) = e^{-1}I_3$.

On calcule maintenant $N^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et par suite pour $n \geq 2$

$A^n = 0$. Donc :

$$\exp(N) = I_3 + N = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Et finalement : $\exp(A) = \frac{1}{e} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

6 – Posons $P = X(X-1)$. On a alors $P(A^2) = A^2(A^2 - I_3) = \underbrace{A^2(A - I_3)}_{=0}(A + I_3)$. Donc :

$$P = X(X-1) \text{ est un polynôme annulateur de } A^2.$$

Posons alors $D = A^2$ et $N = A - A^2$.

- On a $A = D + N$.
- P est un polynôme annulateur de A^2 , non nul, scindé et à racines simples. Donc A^2 est diagonalisable.
- Comme A et $I_3 - A$ commutent, on a $N^2 = A^2(I_3 - A)^2 = \underbrace{A^2(A - I_3)}_{=0}(A - I_3) = 0$, donc N est nilpotente.
- Comme N et D sont des polynômes en A , on a $ND = DN$.

Les points (1) à (4) ont bien été vérifiés et $(D, N) = (A^2, A - A^2)$ est la décomposition de Dunford de A .

Partie II : un exemple par deux méthodes

7 – On calcule en un premier temps le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = - \begin{vmatrix} 3-X & -1 & 1 \\ 2 & -X & 1 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} - \begin{vmatrix} 2-X & -1 & 1 \\ 2-X & -X & 1 \\ 0 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = (X-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -X & 1 \\ 0 & -1 & 2-X \end{vmatrix}$$

Puis en retranchant la première colonne à la troisième et en développant par rapport à C_3 :

$$\chi_A = (X-2)(2-X) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)^2$$

Il s'en suit que A est diagonalisable si et seulement si $E_2(A) = \ker(A - 2I_3)$ est un plan. Or

$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Les deux dernières colonnes ne sont pas colinéaires, donc

$\text{rg}(A - 2I_3) \geq 2$ et par suite avec le théorème du rang $\dim(\ker(A - 2I_3)) \leq 1$. $E_2(A)$ n'est donc pas un plan : A n'est pas diagonalisable.

Comme les polynômes $X-1$ et $(X-2)^2$ sont premiers entre eux on a $\ker(\chi_A(A)) = \ker(A - I_3) \oplus \ker(A - 2I_3)^2$, et avec le théorème de Cayley-Hamilton :

$$\mathbb{R}^3 = \ker(A - I_3) \oplus \ker(A - 2I_3)^2 = \ker(u - \text{id}) \oplus \ker(u - 2\text{id})^2.$$

8 – Pour $X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on résout : $AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$. On pose

alors $e_1 = {}^t(0, 1, 1)$ et $\ker(u - \text{id}) = \text{Vect}\{e_1\}$.

Puis on résout : $AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$. On pose alors $e_2 = {}^t(1, 1, 0)$ et

$$\ker(u - 2\text{id}) = \text{Vect}\{e_2\}.$$

$$\text{On calcule } (A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

On résout alors $(A - 2I_3)^2 X = 0 \Leftrightarrow x = y$. On pose $e_3 = {}^t(0, 0, 1)$ et (e_2, e_3) et $\ker(u - 2\text{id})^2 = \text{Vect}\{e_2, e_3\}$. Cette famille étant visiblement libre, elle constitue une base de $\ker(u - 2\text{id})^2$ et comme $\mathbb{R}^3 = \ker(u - \text{id}) \oplus \ker(u - 2\text{id})^2$ on a par concaténation :

Une base de \mathbb{R}^3 est (e_1, e_2, e_3) avec $e_1 = {}^t(0, 1, 1)$, $e_2 = {}^t(1, 1, 0)$ et $e_3 = {}^t(0, 0, 1)$. En outre $\ker(u - \text{id}) = \text{Vect}\{e_1\}$, $\ker(u - 2\text{id}) = \text{Vect}\{e_2\}$ et $\ker(u - 2\text{id})^2 = \text{Vect}\{e_2, e_3\}$.

On a alors : $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = 2e_2$. On calcule $u(e_3) = {}^t(1, 1, 2) = e_2 + 2e_3$. Ainsi :

La matrice B de u dans la base (e_1, e_2, e_3) est $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

9 - Posons $D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a clairement $B = D_0 + N_0$, D_0 est

diagonalisable, $N_0^2 = 0$ et N_0 est ainsi nilpotente et enfin : $D_0 N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N_0 D_0$.

La décomposition de Dunford de B est ainsi (D_0, N_0) où D_0 et N_0 sont les matrices définies ci-dessus.

Appelons f et g les endomorphismes ayant pour matrices respectives D_0 et N_0 dans $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Il apparaît alors clairement que (f, g) est la décomposition de Dunford de u .

Or A est la matrice dans la base canonique de u , donc si on appelle D et N les matrices respectives de f et g dans la base canonique alors (D, N) vérifie les points (1) à (4) et constitue la décomposition de Dunford de A .

La matrice de passage de la base canonique à \mathfrak{B} est $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on a ainsi $D = P D_0 P^{-1}$

et $N = P N_0 P^{-1}$. On détermine P^{-1} en résolvant, pour $X = {}^t(x, y, z)$ et $Y = {}^t(a, b, c)$:

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} y = a \\ x + y = b \\ x + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a + b \\ y = a \\ z = a - b + c \end{cases}$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et :

$$D = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi que : $N = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La décomposition de Dunford de A est (D, N) avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10 – La décomposition en éléments simples d'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{(X-2)^2}$$

- On multiplie par $X-1$ et on évalue en 1 : $a = 1$.
- On multiplie par $(X-2)^2$ et on évalue en 2 : $c = 1$.
- On multiplie par X et on regarde la limite en $+\infty$: $0 = a + b$ et donc $b = -1$.

Finalement : $\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X-2} + \frac{1}{(X-2)^2}$.

Par suite : $1 = (X-2)^2 - (X-1)(X-2) + (X-1) = (X-2)^2 + (3-X)(X-1)$.

Si on pose $U = 3-X$ et $V = 1$ on a l'égalité de Bézout : $(X-1)U + (X-2)^2V = 1$ et de plus $\deg(U) < 2$ et $\deg(V) < 1$.

11 – On va utiliser à plusieurs reprises dans cette question que des polynômes en u commutent. Ainsi partant de $(X-1)U + (X-2)^2V = 1$ on a $U(u) \circ (u - \text{id}) + V(u) \circ (u - 2\text{id})^2 = \text{id}$, puis en évaluant en $x \in \mathbb{R}^3$: $p(x) + q(x) = x$.

En outre $(u - \text{id})(p(x)) = V(u) \circ (u - \text{id}) \circ (u - 2\text{id})^2(x)$. Or d'après le théorème de messieurs Cayley et Hamilton on a $(u - \text{id}) \circ (u - 2\text{id})^2 = 0$ et donc $p(x) \in \ker(u - \text{id})$.

De même $(u - 2\text{id})(q(x)) = U(u) \circ (u - \text{id}) \circ (u - 2\text{id})^2(x) = 0$ et $q(x) \in \ker(u - 2\text{id})^2$.

En résumé, pour $x \in \mathbb{R}^3$: $\begin{cases} x = p(x) + q(x) \\ p(x) \in \ker(u - \text{id}) \\ q(x) \in \ker(u - 2\text{id})^2 \end{cases}$, et $\mathbb{R}^3 = \ker(u - \text{id}) \oplus \ker(u - 2\text{id})^2$.

On en déduit que p est la projection sur $\ker(u - \text{id})$ de direction $\ker(u - 2\text{id})^2$ et que q est la projection sur $\ker(u - 2\text{id})^2$ de direction $\ker(u - \text{id})$.

12 – On rappelle que $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et que (e_1) est une base de $\ker(u - \text{id})$ et que (e_2, e_3) est une base de $\ker(u - 2\text{id})^2$. Donc la matrice de p dans \mathfrak{B} est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et celle de q est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ La matrice de } p + 2q \text{ dans } \mathfrak{B} \text{ est alors } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On reconnaît là la matrice D_0 de la question 8 donc $p + 2q = f$ (cf question 9 : on a appelé (f, g) la décomposition de Dunford de u). Il s'en suit que :

$$D = V(A)(A - 2I_3)^2 + 2U(A)(A - I_3) = (A - 2I_3)^2 + 2(3I_3 - A)(A - I_3)$$

Après développement : $D = -A^2 + 4A - 2I_3$ et $N = A - D = A^2 - 3A + 2I_3$.

Partie III : une preuve de l'unicité de la décomposition

13 – Soit λ une valeur propre de u et $x \in E_\lambda(u)$. On a alors $u(x) = \lambda x$ et donc $v \circ u(x) = \lambda v(x)$. Sachant $v \circ u = u \circ v$ on en déduit $u(v(x)) = \lambda v(x)$ et donc $v(x) \in E_\lambda(u)$. On a montré :

Tout sous-espace propre de u est stable par v .

Comme u est diagonalisable, on a $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$, et en appelant v_i l'endomorphisme induit par u sur $E_{\lambda_i}(u)$, v_i est diagonalisable (car endomorphisme induit sur un sous-espace stable par un endomorphisme diagonalisable). Soit \mathfrak{B}_i une base de vecteurs propres de v_i . Les vecteurs de \mathfrak{B}_i sont également vecteurs propres de u car éléments de $E_{\lambda_i}(u)$. Donc les vecteurs de \mathfrak{B}_i sont vecteurs propres communs à u et à v .

Comme $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$, la concaténée \mathfrak{B} des \mathfrak{B}_i est une base de E , dont les vecteurs sont vecteurs propres communs à u et à v : on a trouvé une base commune de diagonalisation pour u et v .

14 – Soient A et B diagonalisables qui commutent d'endomorphismes associés α et β . Il existe alors une base de vecteurs propres communs à α et β . Soient A' et B' les matrices diagonales de α et β dans cette base commune de diagonalisation. La matrice dans cette base de $\alpha - \beta$ est alors la matrice diagonale $A' - B'$, ce qui montre que $A - B$ est diagonalisable.

15 – On se donne A et B nilpotentes qui commutent, d'indices de nilpotence respectifs a et b . Comme elles commutent, on a avec le binôme de Newton :

$$(A - B)^{a+b} = \sum_{k=0}^{a+b} \binom{a+b}{k} (-1)^{a+b-k} A^k B^{a+b-k}$$

Or pour $a \leq k \leq a+b$ on a $A^k = 0$ et pour $0 \leq k < a$ on a $a+b-k > b$ donc $B^{a+b-k} = 0$, et donc $(A-B)^{a+b} = 0$: $A-B$ est nilpotente.

16 – Supposons que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit diagonalisable et nilpotente, et soit f son endomorphisme canoniquement associé. Il existe alors une base \mathcal{B} dans laquelle la matrice D de f est diagonale et il existe par ailleurs $k \in \mathbb{N}$ tel que $M^k = 0$. On a alors $f^k = 0$ puis $D^k = 0$. D s'écrit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et alors $D^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ et comme $D^k = 0$ les λ_i sont tous nuls. Donc $D = 0$ puis $f = 0$ et finalement $M = 0$.

La matrice nulle est la seule matrice diagonalisable et nilpotente.

17 – On suppose qu'il existe deux couples (D, N) et (D', N') vérifiant les propriétés (1) à (4) et tels que D, N, D' et N' soient des polynômes en A .

Comme D et D' sont des polynômes en A , D et D' sont deux matrices diagonalisables qui commutent. D'après la question 14 $D-D'$ est diagonalisable. De la même façon avec la question 15, $N-N'$ est nilpotente. Or de $A = N + D = N' + D'$ on déduit $N - N' = D - D'$. Donc $N - N'$ est nilpotente et diagonalisable donc nulle d'après la question 16. Ainsi $N = N'$ puis $D = D'$. On a montré :

La décomposition de Dunford d'une matrice à polynôme caractéristique scindé est unique.

Partie IV : non continuité de l'application $A \mapsto D$

18 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2021 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a visiblement $\text{Sp}(A) = \{1\}$ et si A était diagonalisable elle serait semblable à I_2 qui n'est semblable qu'à elle-même. On aurait ainsi $A = I_2$ ce qui est gênant.

Donc A n'est pas diagonalisable. Or $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2021 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_U + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_V$, matrices toutes deux

diagonalisables (la première car ayant 2 valeurs propres et étant de taille 2).

On vient d'exhiber un exemple de matrices appartenant à \mathcal{D} dont la somme n'est pas dans \mathcal{D} , donc \mathcal{D} n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ lorsque $n = 2$.

On obtient un contre-exemple plus général lorsque $n \geq 3$ en prenant (avec les décompositions par blocs) $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ qui n'est pas diagonalisable pour la même raison et $D_1 = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $D_2 = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ qui sont diagonalisables et de somme égale à M .

Finalement : \mathcal{D} n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ lorsque $n \geq 2$.

Par ailleurs pour P inversible, l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire sur l'espace de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et à ce titre continue.

19 – Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On sait que $\text{Sp}(M) \neq \emptyset$.

1^{er} cas : si $\text{Sp}(M)$ est un singleton

$\text{Sp}(M) = \{\lambda\}$. On sait alors qu'il existe une matrice inversible P telle que $M = PTP^{-1}$ où T est une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à λ . Soit $D = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$: $T_k = T + \frac{1}{k}D$. T_k est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont $\lambda + \frac{1}{k}, \lambda + \frac{2}{k}, \dots, \lambda + \frac{n}{k}$; ceux-ci sont deux à deux distincts et donc T_k a n valeurs propres deux à deux distinctes et est à ce titre diagonalisable. Il s'en suit que $M_k = PT_kP^{-1}$ est diagonalisable. Or $\lim_{k \rightarrow +\infty} T_k = T$ donc avec la continuité de la question 19 : $\lim_{k \rightarrow +\infty} M_k = M$. On a écrit M comme limite d'une suite de matrices diagonalisables.

2^{ième} cas : si $\text{card}(\text{Sp}(M)) \geq 2$

Soient alors $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de M ; il existe une matrice inversible P et une matrice triangulaire T dont les coefficients diagonaux appartiennent à $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ telles que $M = PTP^{-1}$. On pose $r = \min_{1 \leq i < j \leq p} |\lambda_i - \lambda_j| > 0$. Soit

$D = \text{diag}\left(r, \frac{r}{2}, \dots, \frac{r}{n}\right)$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$: $T_k = T + \frac{1}{k}D$ et $M_k = PT_kP^{-1}$. On a de la même

façon $\lim_{k \rightarrow +\infty} M_k = M$. De plus les coefficients diagonaux de T_k s'écrivent $\lambda_{i_j} + \frac{jr}{kn}$ pour $j = 1 \dots n$ et avec $i_j \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

Pour $1 \leq m < \ell \leq n$ et $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\left(\lambda_{i_\ell} + \frac{\ell r}{kn}\right) - \left(\lambda_{i_m} + \frac{mr}{kn}\right) = (\lambda_{i_\ell} - \lambda_{i_m}) + \frac{r(\ell - m)}{kn}$. Si

$\lambda_{i_\ell} = \lambda_{i_m}$ la quantité ci-dessus est strictement positive, et sinon $|\lambda_{i_\ell} - \lambda_{i_m}| \geq r$ tandis que $0 < \frac{r(\ell - m)}{kn} \leq \frac{r(n-1)}{n} < r$. Donc $(\lambda_{i_\ell} - \lambda_{i_m}) + \frac{r(\ell - m)}{kn} \neq 0$.

Ainsi les termes diagonaux de la matrice triangulaire T_k sont deux à deux distincts et T_k est diagonalisable et on termine comme dans le premier cas.

Ainsi dans tous les cas, pour $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de matrices diagonalisables qui converge vers M : \mathfrak{D} est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

20 – On note tout d'abord que toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ a un polynôme caractéristique scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et donc une unique décomposition de Dunford. L'application φ de l'énoncé est donc bien définie sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. D'après la question 2, si $A \in \mathfrak{D}$ alors $\varphi(A) = A$ et donc :

La restriction de φ à \mathfrak{D} est l'identité de \mathfrak{D} .

Si φ était continue sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ on aurait alors par densité $\varphi = \text{Id}_{\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})}$ et la matrice de la question 4 fournit un exemple de matrice A telle que $\varphi(A) \neq A$. Donc : φ n'est pas continue sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$