

Olivier HALGAND

I. Généralités

1. Si  $x < 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = +\infty$ ; pour  $x = 0$ ,  $\frac{1}{n^x} = 1$ . Donc, si  $x \neq 0$ , le terme général ne tend pas vers 0 (il n'a même pas de limite). Donc, la série diverge grossièrement.

Si  $x > 0$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = 0$ . Ainsi,  $\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$  est le terme général d'une série alternée dont le terme général, en valeur absolue, tend vers 0 en décroissant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n + 1 > n > 0, \text{ donc : } (n + 1)^x > n^x > 0 \text{ et ainsi : } \frac{1}{(n + 1)^x} < \frac{1}{n^x}.$$

On en déduit, d'après le critère spécial des séries alternées, que la série est alors convergente.

Finalement, F est définie sur  $]0, +\infty[$ .

2. • On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison  $-t \neq 1$ . Donc :

$$\forall t \in [0, 1[, \quad g_n(t) = \sum_{k=0}^n (-t)^k = \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1 - (-t)} = \frac{1 - (-1)^n t^{n+1}}{1 + t} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{1 + t}.$$

Donc, la suite de fonction  $(g_n)$  converge simplement vers la fonction  $g : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ .

• Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $g_n$  est positive et continue sur  $[0, 1[$  et est majorée par la fonction constante  $t \mapsto 2$ , continue sur  $[0, 1]$ . D'après le théorème de convergence dominée, on peut donc écrire :

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g_n(t) dt$$

avec :

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(t) dt = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t} = \left[ \ln|1 + t| \right]_0^1 = \ln 2,$$

et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-t)^k dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^k dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \left[ \frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Et donc, finalement :

$$\boxed{F(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.}$$

3. Soit  $x \geq 2$ . Alors :  $\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right| \leq \frac{1}{n^2}$  qui est le terme général d'une série de Riemann convergente :

la série  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$  est donc normalement convergente sur  $[2, +\infty[$ .

On en déduit donc :  $F(x) = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{n^x}$  avec, pour  $n \geq 2$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = 0$ . La convergence normale, donc uniforme, sur  $[2, +\infty[$ , implique que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{n^x} \right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{n^x} \right) = 0.$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.}$$

4. (a) • On considère la fonction  $u : t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$  définie sur  $]0, +\infty[$ . Alors  $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$  (comme quotient de fonctions qui le sont, dont le dénominateur ne s'annule pas) et :

$$\forall t \in ]0, +\infty[, \quad u'(t) = \frac{1}{t} \frac{1}{t^x} + \ln t \frac{-x}{t^{x+1}} = \frac{1 - x \ln t}{t^{x+1}}.$$

La fonction  $u$  admet donc un extremum en  $t = e^{\frac{1}{x}}$  qui est  $u\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{xe}$ . De plus :  $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} u(t) = -\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$  par croissances comparées. On en déduit le tableau de variations suivant :

$t$	0	$e^{\frac{1}{x}}$	$+\infty$
$u'(t)$		+	-
$u$	$-\infty$	$\frac{1}{xe}$	0

• On en déduit que la suite  $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n \geq 1}$  est strictement décroissante à partir du rang  $\lfloor e^{\frac{1}{x}} \rfloor + 1$ .

(b) • Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in ]0, +\infty[$ , on a :  $g_n(x) = (-1)^{n-1} e^{-x \ln n}$ . Donc  $g_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$  et :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad g'_n(x) = (-1)^{n-1} (-\ln n) e^{-x \ln n} = \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}.$$

Or, d'après la question précédente, la suite  $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n \geq 1}$  est strictement décroissante (à partir du rang  $\lfloor e^{\frac{1}{x}} \rfloor + 1$ ) et tend vers 0 (par croissances comparées). D'après le critère spécial des séries alternées, on en déduit que la série alternée  $\sum \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n^x}$  converge, et donc son reste de rang  $n$  vérifie pour  $x \in [a, +\infty[$  et pour  $n \geq \lfloor e^{\frac{1}{x}} \rfloor + 1$ ,

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \ln k}{k^x} \right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit donc que  $\boxed{\text{la série des dérivées } \sum f'_n \text{ converge uniformément sur } [a, +\infty[.}$

• Pour tout  $a > 0$ , on sait donc que  $\sum f_n$  converge simplement et  $\sum f'_n$  converge uniformément sur  $[0, +\infty[$ . Donc,  $F = \sum f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, +\infty[$ , et donc :  $\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, +\infty[.}$

5. • Soit  $x > 1$ . Alors :

$$F(x) - \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^x} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{-2}{n^x} = - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{(2p)^x} = -2^{1-x} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^x}.$$

D'où :  $\forall x > 1, \quad F(x) - \zeta(x) = -2^{1-x}\zeta(x).$

• On en déduit immédiatement que :  $\forall x > 1, \quad F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x).$

• D'après la question 3., on sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ . De plus :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2^{1-x}) = 1$ . On en déduit donc que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1.$

## II. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

6. (a) Si  $x > 1$ , alors la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n^x}$  converge absolument. Or le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est absolument convergente, donc convergente. Donc :

$$\forall x > 1, \quad \sum_{n \geq 2} c_n(x) \text{ converge et : } \sum_{n=2}^{+\infty} c_n(x) = (F_n(x))^2.$$

(b) • Soit  $x > 0$ . Alors :

$$\forall n \geq 2, \quad c_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k^x} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)^x} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{[k(n-k)]^x}.$$

Or, pour  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $k(n-k) = -k^2 + kn$  admet pour maximum  $\frac{n^2}{4}$  en  $\frac{n}{2}$ , et donc :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \frac{1}{k(n-k)} \geq \frac{4}{n^2} \quad \text{et donc : } |c_n(x)| \geq (n-1) \left(\frac{4}{n^2}\right)^x = \frac{4^x(n-1)}{n^{2x}}.$$

• Or, si  $0 < x \leq \frac{1}{2}$ , alors  $\frac{n-1}{n^{2x}}$  ne tend pas vers 0, donc la série  $\sum c_n(x)$  diverge grossièrement.

7. (a) • On a la décomposition en éléments simples suivante :  $\frac{1}{N(n-X)} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{X} + \frac{1}{n-X} \right).$

• On en déduit que :  $c_n(1) = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right) = \frac{(-1)^n}{n} \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right),$

$$\text{d'où : } c_n(1) = \frac{2(-1)^n H_{n-1}}{n}.$$

(b) Soit  $n \geq 2$ . Alors :

$$\frac{H_n}{n+1} - \frac{H_{n-1}}{n} = \frac{H_{n-1} + \frac{1}{n}}{n+1} - \frac{H_{n-1}}{n} = H_{n-1} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n(n+1)} = H_{n-1} \frac{-1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)},$$

donc :

$$\frac{H_n}{n+1} - \frac{H_{n-1}}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} (H_{n-1} - 1).$$

Or :  $H_{n-1} \geq 1$ , et donc :  $\frac{H_n}{n+1} - \frac{H_{n-1}}{n} < 0$ . On en déduit donc que la suite  $\left( \frac{H_{n-1}}{n} \right)_{n \geq 2}$  est décroissante.

(c) On sait de plus que  $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$ , et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_{n-1}}{n} = 0$ . Ainsi, toujours d'après le critère spécial des séries alternées, on en déduit que  $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$  converge.

### III. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de zeta au voisinage de 1

8. (a) La formule de Taylor-Young s'écrit (au voisinage de 1) :  $F(x) = F(1) + F'(1)(x-1) + o(x-1)$ , donc :

$$F(x) = \ln 2 + F'(1)(x-1) + o(x-1).$$

Posons  $v : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 - 2^{1-x} = 1 - e^{(1-x)\ln 2}$ . Alors  $v$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et :

$$v'(x) = \ln 2 e^{(1-x)\ln 2} \quad \text{et} \quad v''(x) = -\ln^2 2 e^{(1-x)\ln 2}.$$

La formule de Taylor-Young s'écrit alors, au voisinage de 1 :

$$v(x) = v(1) + v'(1)(x-1) + \frac{v''(1)}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2),$$

soit :

$$v(x) = \ln 2(x-1) - \frac{\ln^2 2}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

(b) D'après la question I.5., on sait que, pour  $x > 1$  :  $\zeta(x) = \frac{F(x)}{1 - 2^{1-x}}$ . On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= \frac{\ln 2 + F'(1)(x-1) + o(x-1)}{\ln 2(x-1) - \frac{\ln^2 2}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)} = \frac{1}{\ln 2(x-1)} \frac{\ln 2 + F'(1)(x-1) + o(x-1)}{1 - \frac{\ln 2}{2}(x-1) + o(x-1)} \\ &= \frac{1}{\ln 2(x-1)} \left( \ln 2 + F'(1)(x-1) + o(x-1) \right) \left( 1 + \frac{\ln 2}{2}(x-1) + o(x-1) \right) \\ &= \frac{1}{\ln 2(x-1)} \left[ \ln 2 + \left( F'(1) + \frac{\ln^2 2}{2} \right) (x-1) + o(x-1) \right] \end{aligned}$$

D'où :

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \left( \frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} \right) + o(1).$$

9. (a) Soit  $t \in [n, n+1]$ . Alors :  $\forall x \in [1, 2], \quad n^x \leq t^x \leq (n+1)^x$  et donc :

$$\frac{1}{n^x} \geq \frac{1}{t^x} \geq \frac{1}{(n+1)^x}.$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient donc :

$$\frac{1}{n^x} = \int_n^{n+1} \frac{dt}{n^x} \geq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \geq \int_n^{n+1} \frac{dt}{(n+1)^x} = \frac{1}{(n+1)^x}.$$

On en tire donc :

$$0 \leq v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}.$$

(b) Pour  $x = 1$ , on a :  $0 \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$  qui est le terme général d'une série de Riemann convergente, donc la série  $\sum \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$  converge.

Pour  $x \in ]1, 2]$ , les séries  $\sum \frac{1}{n^x}$  et  $\sum \frac{1}{(n+1)^x}$  sont des séries de Riemann convergentes, donc la somme des deux est aussi convergente.

Ainsi, pour tout  $x \in [1, 2]$ , la série à termes positifs  $\sum v_n(x)$  est majorée par une série convergente, donc  $\sum v_n(x)$  converge.

(c) Soit  $x \in ]1, 2]$ . Alors la somme partielle d'ordre  $N$  est :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N v_n(x) &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} - \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} - \int_1^{N+1} \frac{dt}{t^x} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} - \left( \frac{1}{(-x+1)(N+1)^{x+1}} - \frac{1}{-x+1} \right) \underset{N \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} + \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \zeta(x) + \frac{1}{1-x}.$$

(d) D'après la question 9.(a), on sait que :

$$\forall x \in [1, 2], \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}.$$

Donc, pour tous entiers  $n$  et  $N$  tels que  $0 < n < N$ , on obtient par télescopie :

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^N v_k(x) \leq \frac{1}{(n+1)^x} - \frac{1}{(N+1)^x}.$$

On en déduit que le reste d'ordre  $n$  vérifie :

$$0 \leq R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x) \leq \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0.$$

Ainsi, la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} v_n$  converge uniformément sur  $[1, 2]$ .

(e) D'après la question précédente, on peut donc écrire :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} v_n(x) \right),$$

soit :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left( \zeta(x) + \frac{1}{1-x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1) = \gamma.$$

On en déduit donc que, pour  $x$  au voisinage de  $1^+$  :

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).$$

10. Par unicité du développement limité, on obtient donc :

$$\gamma = \frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2},$$

d'où :

$$-F'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n} = \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2.$$

#### IV. Calcul des $\zeta(2k)$ à l'aide des nombres de Bernoulli

11. D'après la formule de récurrence :  $B'_1 = B_0 = 1$ , donc  $B_1 = X + b_1$  avec :

$$0 = \int_0^1 (t + b_1) dt = \left[ \frac{t^2}{2} + b_1 t \right]_0^1 = \frac{1}{2} + b_1, \quad \text{donc :} \quad b_1 = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi :  $B_1 = X - \frac{1}{2}$  et :  $b_1 = -\frac{1}{2}$ .

De la même manière :  $B'_2 = 2B_1 = 2X - 1$ , donc :  $B_2 = X^2 - X + b_2$ , avec :

$$0 = \int_0^1 (t^2 - t + b_2) dt = \left[ \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + b_2 t \right]_0^1 = -\frac{1}{6} + b_2 \quad \text{et :} \quad b_2 = \frac{1}{6}.$$

Ainsi :  $B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$  et :  $b_2 = \frac{1}{6}$ .

12. Soit  $n \geq 2$ . Alors :

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B'_n(t) dt = \int_0^1 n B_{n-1}(t) dt, \quad \text{donc :} \quad B_n(1) - B_n(0) = 0.$$

13. Posons :  $\forall n \in \mathbb{N}, Q_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$  et vérifions que la suite des polynômes  $Q_n$  vérifie les propriétés de la suite de polynômes de Bernoulli.

- Pour  $n = 0$ , on obtient :  $Q_0(X) = B_0(1 - X) = 1 = B_0(X)$ .
- Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on peut écrire :

$$Q'_n(X) = (-1)^n \cdot (-1) B'_n(1 - X) = (-1)^{n-1} n B_{n-1}(1 - X) = n Q_{n-1}(X).$$

- Enfin :

$$\int_0^1 Q_n(t) dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(1 - t) dt \stackrel{u=1-t}{=} (-1)^n \int_1^0 B_n(u) (-du) = 0.$$

Ainsi, d'après l'unicité de la suite des polynômes de Bernoulli, on peut affirmer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X).$$

14. La fonction  $g_k$  est continue sur  $[0, 2\pi[$ . De plus :  $g_k(0) = B_{2k}(0) = B_{2k}(1) = g_k(2\pi)$ . On en déduit donc,  $B_{2k}$  étant une fonction polynomiale donc continue, que  $g_k$  est continue sur  $[0, 2\pi]$ , et donc, par  $2\pi$ -périodicité, sur  $\mathbb{R}$ .

De même,  $g_k$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, 2\pi[$ , elle est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .

On en déduit que la série de Fourier de  $g_k$  est normalement convergente sur  $\mathbb{R}$  et sa somme est égale à  $g_k$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = \frac{a_0(k)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n(k) \cos(nx) + b_n(k) \sin(nx) \right).$$

Or :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(-x) = g_k(2\pi - x) = B_{2k} \left( \frac{2\pi - x}{2\pi} \right) = B_{2k} \left( 1 - \frac{x}{2\pi} \right) = (-1)^{2k} B_{2k} \left( \frac{x}{2\pi} \right) = g_k(x).$$

Ainsi,  $g_k$  est paire et donc tous les coefficients  $b_n(k)$  sont nuls. Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = \frac{a_0(k)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(k) \cos(nx).$$

15. (a) Pour  $n \geq 1$  et  $k \geq 1$ , les coefficients de Fourier sont donnés par :

$$\begin{aligned} a_n(k) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B_{2k} \left( \frac{x}{2\pi} \right) \cos(nx) \, dx \\ &\stackrel{\text{I.P.P.}}{=} \frac{1}{\pi} \left[ B_{2k} \left( \frac{x}{2\pi} \right) \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} B'_{2k} \left( \frac{x}{2\pi} \right) \frac{\sin(nx)}{n} \, dx \\ &= 0 - \frac{1}{2n\pi^2} \int_0^{2\pi} B'_{2k} \left( \frac{x}{2\pi} \right) \frac{\sin(nx)}{n} \, dx = -\frac{1}{2n\pi^2} \int_0^{2\pi} 2k B_{2k-1} \left( \frac{x}{2\pi} \right) \sin(nx) \, dx \\ &\stackrel{\text{I.P.P.}}{=} -\frac{k}{n\pi^2} \left( \left[ B_{2k-1} \left( \frac{x}{2\pi} \right) \frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} B'_{2k-1} \left( \frac{x}{2\pi} \right) \frac{-\cos(nx)}{n} \, dx \right) \\ &= -\frac{k}{n^2\pi^2} \left[ -B_{2k-1}(1) + B_{2k-1}(0) \right] - \frac{k}{2n^2\pi^3} \int_0^{2\pi} B'_{2k-1} \left( \frac{x}{2\pi} \right) \cos(nx) \, dx \\ &= \frac{k}{n^2\pi^2} \left[ B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0) \right] - \frac{k}{2n^2\pi^3} \int_0^{2\pi} (2k-1) B_{2k-2} \left( \frac{x}{2\pi} \right) \cos(nx) \, dx \\ &= \frac{k}{n^2\pi^2} \left[ B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0) \right] - \frac{2k(2k-1)}{4n^2\pi^2} \times \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B_{2(k-1)} \left( \frac{x}{2\pi} \right) \cos(nx) \, dx \end{aligned}$$

D'où :

$$\forall n \geq 1, \forall k \geq 1, \quad a_n(k) = \frac{k}{(n\pi)^2} \left[ B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0) \right] - \frac{2k(2k-1)}{(2n\pi)^2} a_n(k-1).$$

(b) En particulier pour  $k = 1$  on obtient :

$$\forall n \geq 1, \quad a_n(1) = \frac{1}{(n\pi)^2} \left[ B_1(1) - B_1(0) \right] - \frac{2}{(2n\pi)^2} a_n(0),$$

avec :

$$B_1(1) - B_1(0) = -1 \quad \text{et} \quad a_n(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nx) \, dx = \frac{1}{n\pi} \left[ \sin(nx) \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Donc :

$$\forall n \geq 1, \quad a_n(1) = \frac{1}{(n\pi)^2}.$$

(c) Or, pour  $k \geq 2$  on sait que :  $B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0) = 0$  et donc, pour  $n \geq 1$  et  $k \geq 2$  on peut écrire :

$$\begin{aligned} a_n(k) &= -\frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2} a_n(k-1) \\ a_n(k-1) &= -\frac{(2k-2)(2k-3)}{(2n\pi)^2} a_n(k-2) \\ &\vdots \\ a_n(2) &= -\frac{4 \times 3}{(2n\pi)^2} a_n(1) \end{aligned}$$

Par produit, il vient alors (les  $a_n(k)$  étant non nuls) :

$$a_n(k) = (-1)^{k-1} \frac{(2k)(2k-1)\dots 3}{[(2n\pi)^2]^{k-1}} a_n(1) = (-1)^{k-1} \frac{(2k)!}{2 \times (2n\pi)^{2k-2}} a_n(1),$$

et donc :

$$\forall n \geq 1, \forall k \geq 2, \quad a_n(k) = \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{2^{2k-1} (n\pi)^{2k}}.$$

**16.** Par définition :  $\forall k \geq 1, \quad \zeta(2k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ . Or, on vient de montrer que :

$$\frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} a_n(k).$$

On obtient donc :

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} a_n(k) = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(k).$$

De plus, d'après la question **14.**, on sait que :  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(k) = g_k(0) - \frac{a_0(k)}{2}$  avec :

$$a_0(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B_{2k} \left( \frac{x}{2\pi} \right) dx \stackrel{x=2\pi t}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^1 B_{2k}(t) (2\pi dt) = 0.$$

$$\Leftrightarrow g_k(0) = B_{2k}(0) = b_{2k}.$$

Finalement :

$$\forall k \geq 1, \quad \zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} b_{2k}.$$

**17. (a)** On sait que la polynôme de Bernoulli  $B_n$  est de degré  $n$ . La formule de Taylor à l'ordre  $n$  en 0 s'écrit donc :

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{B_n^{(k)}}{k!} X^k.$$

Montrons donc par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, B_n^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} b_{n-k}$ .

• **Initialisation** : Pour  $n = 0$  on a :  $B_0^{(0)} = B_0 = 1 = b_0$ .

• **Hérédité** : Supposons la propriété vraie pour un entier naturel  $n$  donné quelconque.

Alors, pour  $k = 0$  on a :  $B_{n+1}^{(0)}(0) = B_{n+1}(0) = \frac{(n+1)!}{(n+1-0)!} b_{n+1}$  et la propriété est donc vérifiée.

Pour  $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ , on a :

$$B_{n+1}^{(k)}(0) = (B'_{n+1})^{(k-1)}(0) = ((n+1)B_n)^{(k-1)}(0) \stackrel{\text{H.R.}}{=} (n+1) \frac{n!}{(n-(k-1))!} b_{n-(k-1)} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!} b_{n+1-k}.$$

Ainsi, la propriété est héréditaire et donc vérifiée pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Finalement, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} X^k.$$

**(b)** En évaluant l'égalité précédente en 1 on obtient :  $\forall n \geq 2$

$$B_n(1) = B_n(0) = b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k}.$$

D'où, en "sortant" les termes pour  $k = 0$  et  $k = 1$  de la somme :

$$b_n = b_n + nb_{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} b_{n-k},$$

et donc :

$$\forall n \geq 2, \quad b_{n-1} = -\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} b_{n-k} = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} b_k,$$

ce qu'on peut encore écrire :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad b_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k,}$$

Voici un exemple d'algorithme programme en langage Python :

```
def facto(k) : # Calcul de la factorielle de k
    rep=1
    if(k>1) :
        for i in range(2,k+1) :
            rep=rep*i
    return rep

def binom(n,p) : # Calcul du coef. binomial (n/p)
    if(n<p) :
        rep=0
    else :
        rep=facto(n)/(facto(p)*facto(n-p))
    return rep

nbernoulli=[] # Création de la liste des nbs
nbernoulli.append(1) # de Bernoulli
n=int(input("Quel n? : ")) # Calculs des n premiers nbs
for i in range(1,n+1) :
    ber=0
    j in range(0,i) :
        ber=ber+binom(i+1,j)*nbernoulli[j]
    nbernoulli.append(-1.0*ber/(i+1))

print nbernoulli # Affichage de la liste
```