

(version dimanche 19 mai 2002 : 7h15)

CONCOURS E3A : ENSAM-ESTP-ECRIN-ARCHIMEDE 10 MAI 02 8h-11h : Mathématiques 2 MP**Solution concertée PALISSE, Saint Exupéry Mantes la Jolie, VIDIANI, Carnot DIJON**

(Remarques : les exercices (1) et (2) sont progressifs et bien guidés ; quoique les calculs de (1) à partir de (5) sont longs si l'on veut être précis. Comme l'an dernier, le troisième exercice est une suite de "bidouillages" sans beaucoup de rapport avec le programme ; par exemple la signification de la question (3.3.a) n'est pas limpide !).

(Trois exercices classiques, portant sur des parties différentes du programme : matrices et fonctions affines,

équation différentielle, fonction de plusieurs variables ;  il y a quelques coquilles d'énoncé dans le (I.1.b) au bout de la 3ème ligne il manque un espace après le tout ; Dans le (I.5.a) la référence est fautive : c'est la question (4-a) qu'il faut invoquer)

Exercice 1**Des exemples de fonctions de E :**

(1) (1-a) $\varphi_i(x) = |x - a_i|$ est un élément de E : En effet $\varphi_i(x) = \begin{cases} a_i - x & \text{pour } a_0 = a \leq x \leq a_i \\ x - a_i & \text{pour } a_i \leq x \leq a_n = b \end{cases}$ est bien affine par morceaux.

(1-b) Il existe un unique élément δ_i de E : De façon générale, une fonction de E est entièrement définie par ses valeurs en les points de séparation de la subdivision : car le système en (A, B) $\begin{cases} Aa_i + B = 1 \\ Aa_{i+1} + B = 0 \end{cases}, i = 0..n-1$ ou $\begin{cases} Aa_{n-1} + B = 0 \\ Aa_n + B = 0 \end{cases}$, est Cramérien car de déterminant $a_i - a_{i+1} \neq 0, i = 0..n-1$. Ainsi $\delta_i(x) = \frac{x - a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}}$ sur $[a_i, a_{i+1}]$, $i = 0..n-1$.

(2-a) E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([a, b])$: En effet il est non vide (il contient la fonction nulle) et stable puisque toute combinaison linéaire d'applications affines (respectivement continues) est affine (respectivement continue).

(2-b) Montrer que B est une base de E :

■ **Solution 1 :** Précisons la réponse à (1b) : L'application de E dans $\mathbb{R}^n$ qui envoie f sur la liste de ses valeurs en les points de séparation de la subdivision, est un isomorphisme d'espaces vectoriels ; et la famille des delta est l'image réciproque de la base canonique.

■ **Solution 2 :** D'une part cette famille est libre (par la méthode des valeurs particulières d'une combinaison linéaire $\sum \lambda_i \delta_i$ aux points a_i), D'autre part elle est génératrice, puisque toute fonction f affine par morceaux sur les intervalles de la subdivision donnée est parfaitement déterminée par ses valeurs $f(a_i)$ et ainsi que pour l'utilisation des polynômes de LAGRANGE, on a immédiatement $f = \sum_{i=0}^n f(a_i) \delta_i$

(2-c) C est une base de E : Tout espace vectoriel de dimension $n+1$ admet comme nouvelle base n'importe quelle famille libre de cardinal $n+1 = \text{card}(\mathcal{C})$. Or avec les notations de l'énoncé si $\alpha_j \neq 0, j = 1.., n-1$ la fonction nulle, donc dérivable, aurait une dérivée à droite en a_j qui serait $\alpha_0 + \dots + \alpha_{j-1} + \alpha_j - \dots - \alpha_n$ différente de la dérivée à gauche qui serait $\alpha_0 + \dots + \alpha_{j-1} - \alpha_j - \dots - \alpha_n$.

Par conséquent $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$; Spécialisant alors $x = a_0 = a$ puis $x = a_n = b$ dans la relation donnée par l'énoncé on aurait $\alpha_n(b-a) = 0$ et $\alpha_0(b-a) = 0$; C est donc libre et comme elle est de cardinal $n+1 = \dim(E)$ elle en constitue bien une base.

Un cas particulier. La condition demandée équivaut à

$$(3) \quad \begin{cases} (\alpha + \beta + \gamma)x - u\alpha - v\beta - w\gamma = 0 & \text{pour } x \leq u \text{ et } x \geq w \\ \alpha(v-u) + \gamma(w-v) = 1 & \text{valeur en } v \end{cases}$$

Le système obtenu $\begin{cases} (1) \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ (2) \alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \\ (3) \alpha(v-u) + \gamma(w-v) = 1 \end{cases}$ a comme déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \\ v-u & 0 & w-v \end{vmatrix} = 2(w-v)(v-u) \neq 0$, et est donc cramérien et a donc une solution et une seule qui est, d'après les formules de CRAMER :

$$\alpha = \frac{(w-v)}{2(w-v)(v-u)} \quad \beta = \frac{-(w-u)}{2(w-v)(v-u)} \quad \gamma = \frac{(v-u)}{2(w-v)(v-u)} \quad \text{$$

Ce qui permet de voir une permutation circulaire dans ces formules.



(4-a) **Matrice de passage P ?** Nous avons déjà remarqué que pour $f \in E$, $f = \sum_{j=0}^n f(a_j)\delta_j$ et avec $f = \varphi_i$

$$\text{on a } \varphi_i = \sum_{j=0}^n |a_j - a_i| \delta_j.$$

Donc P est une matrice carrée d'ordre $n+1$ dont l'élément général est $\boxed{p_{i+1,j+1} = |a_j - a_i|}$

(4-b) **Expression de f sur la base $\mathcal{C}$:** D'après le cours le lien entre les anciennes composantes X (sur $\mathcal{B}$) et les nouvelles X' sur la nouvelle base $\mathcal{C}$ est $X = PX'$, par conséquent c'est la connaissance de P^{-1} qui donnerait $X' = P^{-1}X$ (contravariance).

(5-a) **Calculer P et son déterminant :**

En écrivant $\begin{cases} a_1 - a_0 = \frac{b-a}{n} \\ a_2 - a_1 = \frac{b-a}{n} \\ \dots\dots\dots \\ a_i - a_{i-1} = \frac{b-a}{n} \end{cases}$ et en ajoutant et réduisant ces i égalités on a $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$ et par conséquent $a_j - a_i = (j-i)\frac{b-a}{n}$, la matrice P dans ce cas particulier s'écrit $P = \frac{b-a}{n}Q$ où Q est une matrice d'ordre $n+1$ dont l'élément $q_{i+1,j+1} = |j-i| = |j+1-(i+1)|$. ainsi $\boxed{p_{i+1,j+1} = \frac{b-a}{n}|i-j| = \frac{b-a}{n}|j+1-(i+1)|}$

■ **Calcul du déterminant de P :** On a d'abord $\det(P) = \left(\frac{b-a}{n}\right)^n \det(Q)$.

Il reste à calculer le déterminant de Q .

$$\det(Q) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 0 & 1 & \dots & n-1 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & n-2 \\ * & * & * & \dots & * \\ i-1 & i-2 & i-3 & \dots & n+1-i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 1 \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{On ajoute la dernière colonne (numéro } n+1) \text{ à la première, et on a } \det(Q) = n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 0 & 1 & \dots & n-1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \dots & n-2 \\ 1 & i-2 & i-3 & \dots & n+1-i \\ 1 & \cdot & \cdot & \dots & 1 \\ 1 & n-1 & n-2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

On retranche les lignes "à reculons" :

$$\det(Q) = n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \dots & n \\ 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & -1 \end{vmatrix} = nD \text{ où } D \text{ est le déterminant d'ordre } n : D = \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & \dots & -1 \end{vmatrix};$$

On ajoute la dernière colonne de D à chacune des autres :

$$D = \begin{vmatrix} -2 & -2 & \dots & -1 \\ 0 & -2 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = -(-2)^{n-1}. \text{ Par suite } \boxed{\det(P) = n\left(\frac{b-a}{n}\right)^n (-1)^n 2^{n-1}} \quad \img alt="A small cartoon cat icon." data-bbox="710 755 735 780"/>$$

(5-b) **Exprimer δ_i en fonction de φ_{i-1} , φ_i et φ_{i+1} :** Il suffit d'appliquer le résultat obtenu en (3) avec

$$v = a_i, u = a_{i-1} \text{ et } w = a_{i+1}, \text{ ce qui par substitution donne } \boxed{\delta_i = \frac{n}{2(b-a)}[\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}]} \quad \img alt="A small cartoon cat icon." data-bbox="750 845 775 870"/>$$

i variant de 1 à $n-1$.

(5-c) **Expliciter $C_1, \dots, C_{n-1}$:** C'est une simple écriture matricielle du résultat précédent : $P^{-1} =$

$$\frac{n}{2(b-a)} \begin{bmatrix} * & 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ * & -2 & 1 & \dots & 0 & * \\ * & 1 & -2 & \dots & 0 & * \\ * & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & * \\ * & 0 & 1 & \dots & 1 & * \\ * & 0 & 0 & \dots & -2 & * \\ * & 0 & 0 & \dots & 1 & * \end{bmatrix}.$$

(5-d) **Finir le calcul de P^{-1} :**

On part de la formule écrite dès (4.a) $f = \sum_{j=0}^n f(a_j) \delta_j$ et on l'applique avec ces a_j équidistribués et $f = \varphi_0$ ce qui

donne : $\varphi_0 = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n i \delta_i$;

Or grâce aux formules obtenues en (5.b)

$$\begin{cases} 1 & \delta_1 = \frac{n}{2(b-a)}(\varphi_0 - 2\varphi_1 + \varphi_2) \\ 2 & \delta_2 = \frac{n}{2(b-a)}(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3) \\ 3 & \delta_3 = \frac{n}{2(b-a)}(\varphi_2 - 2\varphi_3 + \varphi_4) \\ \dots & \dots \\ k & \delta_k = \frac{n}{2(b-a)}(\varphi_{k-1} - 2\varphi_k + \varphi_{k+1}) \\ (k+1) & \delta_{k+1} = \frac{n}{2(b-a)}(\varphi_k - 2\varphi_{k+1} + \varphi_{k+2}) \\ (k+2) & \delta_{k+2} = \frac{n}{2(b-a)}(\varphi_{k+1} - 2\varphi_{k+2} + \varphi_{k+3}) \\ \dots & \dots \\ (n-2) & \delta_{n-2} = \frac{n}{2(b-a)}(\varphi_{n-3} - 2\varphi_{n-2} + \varphi_{n-1}) \\ (n-1) & \delta_{n-1} = \frac{n}{2(b-a)}(\varphi_{n-2} - 2\varphi_{n-1} + \varphi_n) \end{cases}$$

En multipliant chaque ligne par le facteur qui est dans la première colonne, et remarquant que $k-2(k+1)+k+2=0$ on réduit en diagonale et il reste : $\varphi_0 = \frac{1}{2}(\varphi_0 - n\varphi_{n-1} + (n-1)\varphi_n) + (b-a)\delta_n$ soit $n\varphi_{n-1} - (n-1)\varphi_n = 2(b-a)\delta_n$

et $\delta_n = \frac{1}{2(b-a)}(\varphi_0 + n\varphi_{n-1} - (n-1)\varphi_n)$ et la colonne $C_n = \frac{1}{2(b-a)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ n \\ -n+1 \end{pmatrix} = \frac{n}{2(b-a)} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \frac{1}{n} - 1 \end{pmatrix}.$

■ De même comme $\varphi_1 = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^n |i-1| \delta_i$ et toujours d'après (5.b) et le même type de simplification que dans la première partie de la question :

Toujours grâce aux formules obtenues en (5.b)

$$\begin{cases} 0 & \delta_1 = \frac{n}{2(b-a)}(\varphi_0 - 2\varphi_1 + \varphi_2) \\ 1 & \delta_2 = \frac{n}{2(b-a)}(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3) \\ 2 & \delta_3 = \frac{n}{2(b-a)}(\varphi_2 - 2\varphi_3 + \varphi_4) \\ \dots & \dots \\ (k-1) & \delta_k = \frac{n}{2(b-a)}(\varphi_{k-1} - 2\varphi_k + \varphi_{k+1}) \\ k & \delta_{k+1} = \frac{n}{2(b-a)}(\varphi_k - 2\varphi_{k+1} + \varphi_{k+2}) \\ (k+1) & \delta_{k+2} = \frac{n}{2(b-a)}(\varphi_{k+1} - 2\varphi_{k+2} + \varphi_{k+3}) \\ \dots & \dots \\ (n-3) & \delta_{n-2} = \frac{n}{2(b-a)}(\varphi_{n-3} - 2\varphi_{n-2} + \varphi_{n-1}) \\ (n-2) & \delta_{n-1} = \frac{n}{2(b-a)}(\varphi_{n-2} - 2\varphi_{n-1} + \varphi_n) \end{cases}$$

$$\varphi_1 = \frac{b-a}{n} \delta_0 + \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_{n-1}(-2n+4+n-3) + (n-2)\varphi_n) + \frac{b-a}{n}(n-1)\delta_n \stackrel{\text{d'après le résultat précédent encadré}}{=} \frac{b-a}{n} \delta_0 + \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_{n-1}(-n+1) + (n-2)\varphi_n) + \frac{b-a}{n}(n-1)\frac{1}{2(b-a)}(\varphi_0 + n\varphi_{n-1} - (n-1)\varphi_n) = \frac{b-a}{n} \delta_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_{n-1}(n-1+1-n) + \varphi_n(n-2 - \frac{(n-1)^2}{n})\right)$$

$$\text{soit après réduction : } \varphi_1 = \frac{b-a}{n} \delta_0 + \frac{1}{2}\left((1 - \frac{1}{n})\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_n(n-2 - \frac{n^2-2n+1}{n})\right) = \frac{b-a}{n} \delta_0 + \frac{1}{2}\left((1 - \frac{1}{n})\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_n(n-2-n+2-\frac{1}{n})\right)$$

Ce qui donne comme colonne $C_0 = \frac{n}{2(b-a)} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} - 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ +\frac{1}{n} \end{pmatrix}.$

Ce dernier calcul étant assez pénible, il y a aussi la possibilité de le mener par la méthode des coefficients indéterminés.



Espace vectoriel $S_{2\pi}$: Il s'agit en effet de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$: (1-a) l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ et l'espace des fonctions complexes 2π -périodiques.

CNS φ solution soit 2π -périodique : C'est évidemment nécessaire, car si une solution est 2π -périodique (1-b) sa dérivée également. La condition est suffisante, car si on pose $\psi(x) = \varphi(x + 2\pi)$ elle est immédiatement solution et vérifie les mêmes conditions initiales en $x = 0$ que φ : d'après CAUCHY-LIPCHITZ $\psi = \varphi$ qui est donc 2π -périodique.

La série de FOURIER de f converge vers f : La série de FOURIER d'une application f , 2π -périodique (2-a) de classe C^1 par-morceaux, converge normalement vers f si f est continue... A fortiori si f est, comme ici, de classe C^2 .

(2-b-i) **Récurrence liant c_{k-1} et c_k :** Alors là, c'est la classe C^3 qui permet d'affirmer que les séries des dérivées première et seconde convergent normalement (cf. relations entre coefficients de f et de f') ; ce qui justifie la dérivation terme à terme, d'une part, et l'identification des coefficients d'autre part. La convergence normale de la série premier membre ($=0$), permet en effet d'affirmer que c'est la série de FOURIER de la fonction nulle, donc que ses coefficients sont nuls. (On peut aussi, quand on a préalablement montré que les coefficients obtenus sont bien les coefficients de FOURIER de la fonction, le justifier par PARSEVAL $\frac{(a_0)^2}{2} + \sum a_n^2 + b_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2 = 0$ implique que tous les coefficients sont nuls)

On obtient $\boxed{c_{k-1} = (k-1)(k-2)c_k}$

(2-b-ii) **Déduire que $c_k = 0$ pour $k \leq 1$:** La spécialisation $k = 2$ dans la relation précédente donne $c_1 = 0$, puis la récurrence descendante donne $c_{k-1} = 0$ quand $c_k = 0$.

(2-b-iii) **Calculer c_k :**

Toujours la récurrence donne $\begin{cases} 2.1.c_3 = c_2 \\ 3.2.c_4 = c_3 \\ \dots\dots\dots \\ (k-1).(k-2).c_k = c_{k-1} \end{cases}$. En réduisant par transitivité on a $\boxed{c_k = \frac{c_2}{(k-1)!(k-2)!}}$

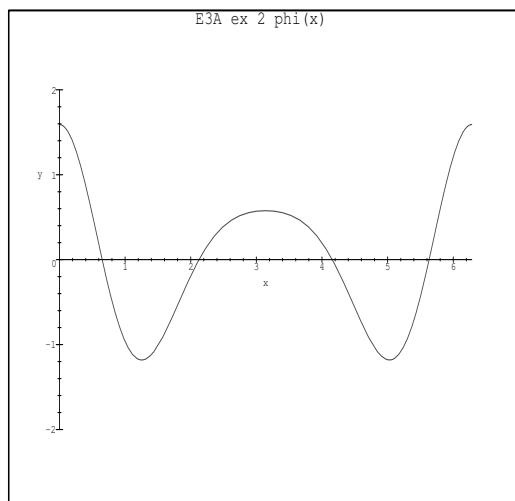
$S_{2\pi}$ n'est pas réduit à la fonction nulle et déterminer sa dimension : Toute valeur de c_2 convient : la série (3) converge bien, et même très bien, d'après l'expression ci-dessus... On a une droite de solutions 2π -périodiques alors que l'espace de toutes les solutions est de dimension 2. Donc, elles ne sont pas toutes 2π -périodiques.

(4-a) **Montrer que φ_1 et φ_2 sont respectivement paire et impaire :** En regroupant partie réelle et partie imaginaire des termes de la série de φ (une série complexe $\sum z_n$, converge si et seulement si les séries de parties réelles et celle des parties imaginaires convergent conséquence du fait que toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{C}$) (On peut aussi dire, qu'on a le droit de le faire car, on vient de démontrer qu'il y a absolue convergence donc commutative convergence) on a immédiatement $\varphi_1(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{(k-1)!(k-2)!}$ et $\varphi_2(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{(k-1)!(k-2)!}$ qui sont bien respectivement de la parité demandée.

(4-b) **Montrer que $\varphi_1(0) > 0$:** En effet $\varphi_1(0) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!(k-2)!}$ somme convergente de termes tous > 0 est > 0 .

(4-c) **φ_1 change de signe au moins quatre fois sur $[0, 2\pi[$:** $\varphi_1(\frac{\pi}{2}) < 0$, $\varphi_1(\pi) > 0$, $\varphi_1(\frac{3\pi}{2}) < 0$, car les séries à considérer vérifient le fameux critère spécial des séries alternées.

On pourrait faire un tracé de φ_1 au moyen d'un DEplot de Maple, mais il faudrait écrire un système pour séparer la partie réelle et la partie imaginaire de φ dans l'équation (E). Il est plus commode d'utiliser la fonction définie par la série de FOURIER associée, d'autant qu'elle converge très rapidement. Il faut cependant se méfier, car Maple se plante dès qu'on fait tracer le graphe avec une somme à 500 termes ; il vaut mieux se limiter à 100, d'ailleurs l'erreur est minime entre le tracé d'une somme partielle S_{00} et $\varphi_1(x)$ vu la rapidité de la convergence. Le programme Maple suivant : `g := (x,n) -> sum(cos(k*x)/((k-1)!*(k-2)!), k = 2..n); plot(g(x,100), x = 0..2*Pi, y = -2..2, scaling = constrained, title = 'E3A ex 2 phi(x)');` donne le graphe ci-dessous ; On voit bien les 4 changements de signe démontrés dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.



Exercice 3

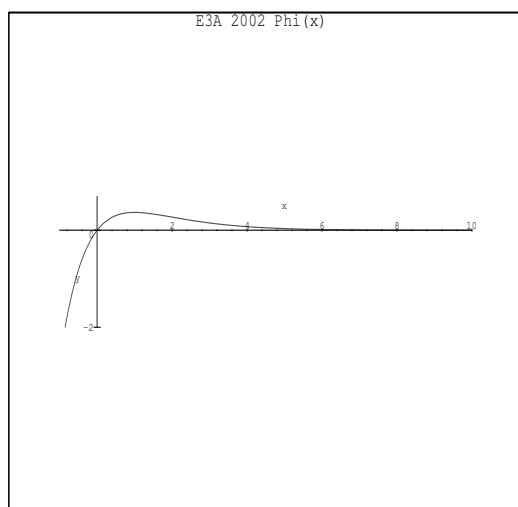
(1-a) **Variations φ et discuter l'équation $\varphi(x) = \lambda$:**

Comme $\varphi'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$ on a le tableau de variations

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
φ'	+	+	+	0 - -
φ	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow \frac{1}{e} \searrow 0$

d'où également

la discussion immédiate évidente d'ailleurs sur le graphe ci dessous : donné par le programme Maple $\text{phi} := x \rightarrow x * \exp(-x)$; $\text{plot}(\text{phi}(x), x = -1..10, y = -2..0.7, \text{title} = 'E3A2002 \phi(x)', \text{scaling} = \text{constrained}, \text{ytickmarks} = 2)$;



$\lambda \leq 0$	une seule solution (négative)
$0 < \lambda < \frac{1}{e}$	deux solutions (positives séparées par 1
$\lambda = \frac{1}{e}$	une solution double $x = 1$
$\lambda > 1$	pas de solution réelle

(1-b) **Montrer que φ restreinte à $] - \infty, 0[$ définit un C^∞ difféomorphisme de $] - \infty, 0[$ sur lui même :** En effet cette restriction est strictement monotone, continue dérivable et de dérivée non nulle sur l'intervalle donné, et l'image est d'après le tableau de variation $] - \infty, 0[$.

Extrémums de f ? On remarque, ce qui facilitera la dérivation, que $f(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$. Comme f est de

(2) classe infinie, tout extrémum éventuel doit être critique donc on doit avoir $\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi'(x)\varphi(y) = e^{-x}(1-x)y e^{-y}$; symétriquement $\frac{\partial f}{\partial y} = \varphi'(y)\varphi(x) = e^{-y}(1-y)x e^{-x}$; Les points critiques sont ceux qui vérifient $\begin{cases} (1-x)y = 0 \\ x(1-y) = 0 \end{cases}$
 $\iff (x, y) = (0, 0)$ ou $(x, y) = (1, 1)$;

Le premier $(0, 0)$ n'est pas extrémum local, c'est un col, car $f(x, x) = \varphi(x)^2 > 0$ et $f(x, -x) = -x^2 < 0$ pour $x \neq 0$.

Le second est un MAXIMUM LOCAL car $f(x, y) = \varphi(x)\varphi(y) \leq_{\text{pour } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0} (\frac{1}{e})^2 = \varphi(1)^2 = f(1, 1)$ l'égalité n'étant atteinte qu'en $(1, 1)$ (pour $x, y \geq 0$). Ce n'est pas un maximum global car $f(x, x)$ tend vers plus l'infini quand x tend vers moins l'infini.



(3-a) **Montrer que par tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ passe une ligne de niveau Γ_λ et une seule : ?** Il en passe une avec $\lambda_0 = f(x_0, y_0) =$ et la valeur de λ est ainsi parfaitement déterminée !

(3-b) **Vecteur tangent à Γ_λ en (x_0, y_0) :** Le théorème des fonctions implicites s'applique en tout point non critique ; et le vecteur tangent est alors orthogonal au gradient donc, au point (x_0, y_0) la tangente est dirigée par $[x_0(1 - y_0), y_0(x_0 - 1)]$.

(3-c) **Axe de symétrie commun des Γ_λ :** Comme $f(x, y) = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y)\varphi(x) = f(y, x)$ symétrique en (x, y) toutes les courbes Γ_λ admettent la droite Δ d'équation $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ comme axe de symétrie.

(4-a) **CNS pour que Γ_λ^+ soit non vide :** On doit avoir : $\varphi(y) = \lambda \frac{e^x}{x} < e^{-1}$; l'étude des variations faite en (1) montre que $\lambda < e^{-2} \approx \mathbf{0.13534}$ est une condition nécessaire et suffisante pour que Γ_λ^+ soit non vide. (l'évaluation numérique est commode pour choisir les bons λ pour le tracé non vide).

(4-b) **Alors Γ_λ^+ est bornée :** On a $xe^{-x}ye^{-y} = \lambda > 0$ avec $x > 0$ par conséquent $y > 0$ et la courbe est déjà toute entière dans le premier quadrant. Mais comme alors $0 < \varphi(x) < \frac{1}{e}$ $\varphi(y) = \frac{\lambda}{\varphi(x)} \geq \lambda e$ donc si (voir le graphe de φ) $0 < a < 1 < b$ et tels que $\varphi(a) = \varphi(b) = \lambda e$ alors $a \leq y \leq b$ et aussi par raison de symétrie $a \leq x \leq b$ alors $\Gamma_\lambda^+ \subseteq [a, b]^2$ est bien bornée.

(Remarque : on peut plus généralement démontrer que toute courbe d'équation $f(x) + g(y) = C$ où, f, g sont des fonctions continues ayant plus l'infini comme limite en $\pm\infty$ est bornée ; pour l'exemple de ce problème il suffit de prendre le logarithme des deux membres pour s'y ramener (Voir par exemple Bréal 95 p 211, oral 98 numéro 72, oral 95 numéro 269, rms janvier 97 numéro 299)

(4-c) **Γ_λ^- peut être caractérisée par une équation de la forme $\mathbf{y} = \mathbf{g}_\lambda(\mathbf{x})$:**

Là encore $\varphi(x)\varphi(y) = \lambda$ donne aussi $y < 0$. la courbe est dans le troisième quadrant. Pour $\lambda > 0$ et $x < 0$, l'équation $\varphi(y) = \lambda \frac{e^x}{x}$ admet une unique solution $y < 0$ d'après (1b). Comme φ est croissante et $\frac{1}{\varphi}$ décroissante, g est décroissante. Quand x tend vers 0^- , $\lambda \frac{e^x}{x}$ tend vers $-\infty$, donc $g(x)$ tend vers $-\infty$. De façon analogue, $g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.

(5-a) **Caractériser Γ_λ par une équation de la forme $\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \lambda$:**

Les formules de changement de base $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ donnent $x = X - Y$ et $y = X + Y$, et on obtient

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (\mathbf{X}^2 - \mathbf{Y}^2)\exp(-2\mathbf{X})$$



(5-b) **On suppose $\lambda < 0$. Montrer que la branche Γ_λ^- de la courbe Γ_λ se caractérise par une équation de la forme $\mathbf{Y} = \mathbf{G}_\lambda(\mathbf{X})$:**

On en déduit $|Y| = \sqrt{X^2 - \lambda e^{2X}}$; mais il ne faut pas oublier la condition $X < Y$, d'où $Y = \sqrt{X^2 - \lambda e^{2X}}$. Les variations de G sont données par le signe de $X - \lambda e^{2X}$. Plus précisément, soit b telle que $\varphi(b) = 2\lambda$: $G'(X) > 0$ si et seulement si $2X > b$ et $G'(X) < 0$ si et seulement si $2X < b$. Lorsque X tend vers $-\infty$, la branche admet pour asymptote la droite d'équation $Y = -X$. Tandis qu'en $+\infty$, on a $Y = \sqrt{-\lambda}e^X$ pour courbe asymptote. La branche Γ_λ^+ s'obtient en remplaçant Y par $-Y$, ce qui revient exactement à faire la symétrie par rapport à la droite $y = x...$

(5-c) **On suppose $\lambda > 0$. Caractériser la branche Γ_λ^+ par une équation de la forme $\mathbf{Y} = \pm \mathbf{G}_\lambda(\mathbf{X})$:**

On fait une étude en tout point analogue : Cette fois, $Y = \pm \sqrt{X^2 - \lambda e^{2X}}...$

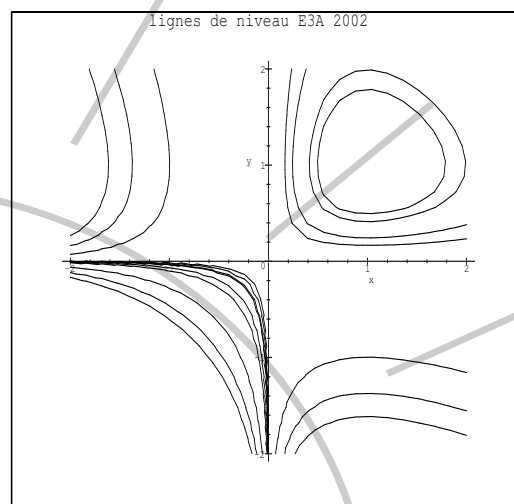
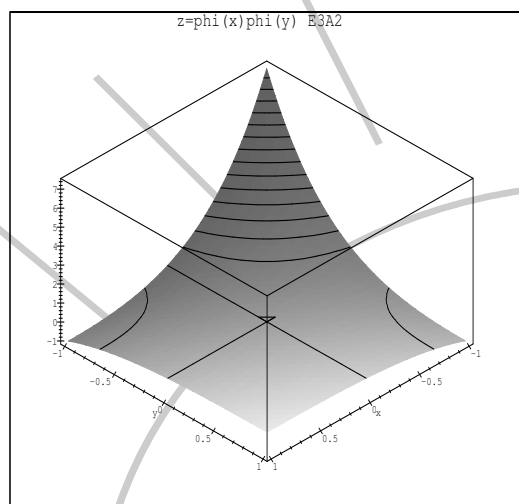
À une symétrie près par rapport à OX on prend $Y = \sqrt{X^2 - \lambda e^{2X}} = e^X \sqrt{(\varphi(X))^2 - \lambda}$; Le domaine de définition est caractérisé par $|\varphi(X)| \geq \sqrt{\lambda}$. Comme la condition $x > 0$ donne $X > Y \geq 0$ cela se traduit (voir le graphe de φ par $\varphi(X) \geq \sqrt{\lambda}$ donc $0 < a \leq X \leq b$ avec l'existence de $0 < a \leq 1 \leq b$, qui dépendent de λ .

Comme Y' est du signe de $X - \lambda e^{2X}$ donc celui de $Xe^{-2X} - \lambda$ donc de $\varphi(2X) - 2\lambda$ on a une discussion
 $\begin{cases} \lambda < \frac{1}{2e} & \text{il existe } [c, d] \subseteq [a, b] \text{ où } Y \text{ croît, décroissante dans le complémentaire} \\ \lambda \geq \frac{1}{2e} & Y \text{ décroît dans } [a, b] \end{cases}$

Indiquer sur un graphique l'allure des diverses lignes de niveau de la fonction $\mathbf{f}$: En s'aidant de

(6) Maple et des résultats obtenus dans les questions précédentes on a le graphique ci dessous : d'abord la surface $z = f(x, y)$ (programme Maple : `plot3d(phi(x)*phi(y), x = -1..1, y = -1..1, title = 'z = phi(x)*phi(y)E3A2', axes = boxed, style = patchcontour)`;) puis les lignes de niveaux $f(x, y) = \lambda$; (programme Maple : `p/ = phi(x) * phi(y) - t : with(plots) : implicitplot({seq(p, t = [-3, -2, -1, 0.05, 0.07, 0.1, 0.11, 0.2, 0.3, 1, 2, 3])}, x = -2..2, y = -2..2, color =`

$black, title = 'lignesdeniveauE3A2002'$); La discussion précédente, permet de reconnaître suivant le quadrant où elles se trouvent, les intervalles pour λ auxquelles elles sont associés.



FIN DU PROBLÈME

Vidiani MP1 Carnot