Concours Centrale - Supélec 1996

Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Option M, P'

On note $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien orienté de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On désigne d'autre part par $\mathscr{A}$ l'ensemble des couples (α, f) de fonctions à valeurs réelles vérifiant les propriétés suivantes :

α et f sont définies, continues et croissantes sur $[1,+\infty[$,

α et f sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]1,+\infty[$,

$\alpha(1) = f(1) = 0$,

$\forall x \in]1,+\infty[$, $f'(x) > 0$,

$f'(x) \to +\infty$ quand $x \to 1^+$.

Pour tout couple $(\alpha, f) \in \mathscr{A}$, on considère la surface $S_{\alpha,f}$ de $\mathscr{E}$ définie paramétriquement par

$$\overrightarrow{OM}(u,v) = \alpha(u)\vec{i} + u\vec{e_v} + f(u)\vec{k}$$

où $\vec{e_v} = \cos v\ \vec{i} + \sin v\ \vec{j}$

et $(u,v) \in [1,+\infty[\times [0,2\pi]$

Partie I -

I.A - Montrer que $S_{\alpha,f}$ admet un plan de symétrie. En donner une équation.

I.B - Étudier, suivant les valeurs du réel z_0, l'intersection de $S_{\alpha,f}$ avec le plan P_{z_0} d'équation $z = z_0$. Préciser la nature de cette intersection et en déduire une interprétation géométrique des paramètres u et v.

I.C - Montrer que l'intersection de $S_{\alpha,f}$ et du plan d'équation $y = 0$ est la réunion de deux courbes disjointes. On note C_1 (respectivement C_2) celle de ces deux courbes qui contient le point de coordonnées $(1,0,0)$ (respectivement $(-1,0,0)$).

I.D -

I.D.1) Déterminer en tout point, $M(u,v)$ de $S_{\alpha,f}$ tel que $u \neq 1$, les vecteurs dérivés partiels $\dfrac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial v}$.

I.D.2) Déterminer en tout point, $M(u,v)$ de $S_{\alpha,f}$ tel que $u \neq 1$, un vecteur normal $\vec{N}$.

I.D.3) Que peut-on dire de $\vec{N}$ en tout point de C_1 ou de C_2 où ce vecteur est défini ? Quelle propriété de ces deux courbes met-on ainsi en évidence ?

Partie II -

II.A - Expliciter en tout point $M(u,v)$ de $S_{\alpha,f}$ tel que $u \neq 1$ les quantités suivantes :

$$E = \left\|\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial u}\right\|^2,\ F = \frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial v},\ G = \left\|\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial v}\right\|^2,$$

$$l = \left[\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial u},\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial v},\frac{\partial^2\overrightarrow{M}}{\partial u^2}\right],\ m = \left[\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial u},\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial v},\frac{\partial^2\overrightarrow{M}}{\partial u\partial v}\right],\ n = \left[\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial u},\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial v},\frac{\partial^2\overrightarrow{M}}{\partial v^2}\right],$$

où pour tout couple $(\vec{V_1},\vec{V_2})$ de vecteurs, $\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}$ est leur produit scalaire et où, pour tout triplet $(\vec{V_1},\vec{V_2},\vec{V_3})$ de vecteurs, $[\vec{V_1},\vec{V_2},\vec{V_3}]$ est leur produit mixte pris dans cet ordre. On s'intéresse désormais aux surfaces vérifiant la condition

$$En - 2Fm + Gl = 0 \qquad (1)$$

en tout point où le premier membre est défini.

II.B - Montrer que (1) peut s'écrire sous la forme $A(u) + B(u)\cos v = 0$ et expliciter $A(u)$ et $B(u)$.

II.C - En déduire que $S_{\alpha,f}$ vérifie (1) en tout point où le premier membre de cette équation est défini, si, et seulement si, le couple (α, f) de $\mathcal{S}$ est solution d'un système de deux équations différentielles du second ordre que l'on explicitera.

Partie III -

On suppose, dans cette partie que α est la fonction nulle (que l'on notera 0).

III.A - Montrer que la condition (1) se réduit alors à l'équation différentielle

$$uf'' + (1 + f'^2)f' = 0 \qquad (2)$$

III.B - Établir que toute solution f non constante de (2) a une dérivée qui ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$.

III.C - Expliciter la solution f de (2) telle que $(0, f) \in \mathcal{S}$.

III.D - Quelle est la nature géométrique de la surface $S_{0,f}$ correspondante ? Que représentent les courbes C_1 et C_2 (voir I.C) pour cette surface ?

Partie IV -

On suppose, dans cette partie, que $S_{\alpha,f}$ vérifie la condition (1), α n'étant pas la fonction nulle.

IV.A - Exprimer α' en fonction de f'. On pourra, à cet effet, poser $w = \dfrac{\alpha'}{f'}$ et résoudre l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par w.

IV.B - Écrire une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par la fonction $\psi = \dfrac{1}{f'^2}$ et donner la solution générale de cette équation.

IV.C - En déduire que l'on a

$$f(u) = \int_1^u \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}, \quad \alpha(u) = \int_1^u \frac{ct^2\,dt}{\sqrt{P(t)}},$$

où c est une constante réelle strictement positive et où

$$P(t) = (t^2 - 1)(c^2t^2 + 1)$$

IV.D - Tracer sur un même graphique les courbes C_1 et C_2 (voir I.C) correspondant à une même valeur de c. On précisera notamment les demi-tangentes aux points de paramètre $u = 1$ et les branches infinies.

••• FIN •••