

E3A PC 2019 Mathématiques 1 – Un corrigé

EXERCICE 1

1 – La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2.1 – La suite $(s_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{n+p}$

L'équivalent $\frac{1}{n+p} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p}$ nous informe en outre de sa divergence. De ces deux points :

La suite $(s_p)_{p \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

2.2 – Comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} s_p = +\infty$, on a pour $A = 2$: $\exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, s_p \geq 2$. En particulier pour $p = N$ on a $s_p \geq 2 > 1$.

3 – Comme $a_n = n + p_n$ on a $a_n \geq n$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$. La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est donc divergente.

4 – On a pour $0 \leq k \leq n-1$, $\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n}$, cette inégalité étant stricte pour $k = n-1$ (on rappelle que $n \geq 2$ et donc $n-1 > 0$). En sommant ces inégalités on obtient donc :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} = 1.}$$

Pour la seconde somme, on procède par récurrence. On appelle HR_n la propriété à démontrer.

• HR_2 signifie $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$; or $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1$ donc HR_2 est vraie.

• Soit $n \geq 2$ tel que HR_n soit vraie ; ainsi $\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > 1$ ce qui peut aussi s'écrire :

$\sum_{k=n}^{3n-2} \frac{1}{k} > 1$. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{n+1+k} = \sum_{k=n+1}^{3n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=n}^{3n-2} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1}$$

D'après HR_n on a donc :

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{n+1+k} > 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} = 1 - \frac{2}{3n} + \frac{6n}{9n^2-1}$$

Or $\frac{6n}{9n^2-1} > \frac{6n}{9n^2} = \frac{2}{3n}$ et finalement $\sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{n+1+k} > 1$ ce qui établit HR_{n+1} .

On vient de prouver par récurrence que pour $n \geq 2$ on a bien $\boxed{\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > 1.}$

5 – La première des inégalités ci-dessus nous indique que $p_n > n$ et donc $a_n > 2n$, tandis que la seconde nous indique que $p_n \leq 2n - 2$ et donc que $a_n \leq 3n - 2$. On en déduit l'encadrement :

$$2 < u_n \leq \frac{3n-2}{n}.$$

Donc si (u_n) a une limite ℓ on a par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus :

$$2 \leq \ell \leq 3$$

6 – Par définition de a_n on a : $\sum_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k} > 1$ et $\sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k} \leq 1$.

Donc $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n} > 1$ et $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n-1} \leq 1$; on déduit de cette dernière inégalité

que $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n-1} + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{a_n}$ et on a bien l'encadrement :

$$1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n-1} + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{a_n}$$

7 – La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$, donc pour $k \geq 1$ et

$t \in [k, k+1]$ on a $\frac{1}{k+1} \leq f(t) \leq \frac{1}{k}$ et en intégrant : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \frac{1}{k}$. On somme alors ces inégalités pour k entre 1 et $a_n - 1$:

$$\sum_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k+1} \leq \int_n^{a_n} f(t) dt \leq \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k}$$

Ou de façon plus explicite :

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq \int_n^{a_n} f(t) dt \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n-1}$$

Or on a déjà vu (question 6) que par minimalité $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n-1} \leq 1$, et par ailleurs que

$1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n-1} + \frac{1}{a_n}$, donc que $1 - \frac{1}{n} < \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n-1} + \frac{1}{a_n}$. On a donc bien :

$$1 - \frac{1}{n} < \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq \int_n^{a_n} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{a_n-1} \leq 1$$

8 – En calculant l'intégrale, on obtient : $1 - \frac{1}{n} \leq \ln\left(\frac{a_n}{n}\right) \leq 1$. Donc on obtient avec l'appui de la

maréchaussée : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{a_n}{n}\right) = 1$ c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = 1$, puis en composant par

l'exponentielle : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$. En d'autres termes, $a_n \sim ne$.

EXERCICE 2

1 – Vérifions d'abord la linéarité. On se donne $P, Q \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}\phi_a(P + \lambda Q) &= \left(\frac{1}{4} - X^2\right)(P + \lambda Q)' + aX(P + \lambda Q) \\ &= \left(\frac{1}{4} - X^2\right)P' + aXP + \lambda \left(\left(\frac{1}{4} - X^2\right)Q' + aXQ\right) \\ &= \phi_a(P) + \lambda \phi_a(Q)\end{aligned}$$

La linéarité étant établie il reste à montrer que $\mathbb{R}_{2n}[X]$ est stable par ϕ_a ; il suffit pour cela de vérifier l'image des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}$ est bien dans $\mathbb{R}_{2n}[X]$. On se donne donc $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$; on a alors :

$$\phi_a(X^k) = \begin{cases} (a-k)X^{k+1} + \frac{k}{4}X^{k-1} & \text{si } k \neq 0 \\ aX & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc sachant $2n \geq 2$ on a pour tout $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$: $\phi_a(X^k) \in \mathbb{R}_{2n}[X]$; par ailleurs $\phi_a(X^{2n}) \in \mathbb{R}_{2n}[X] \Leftrightarrow a = 2n$ et on peut conclure :

ϕ_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ si et seulement si $a = 2n$.

On suppose désormais conformément à l'énoncé que $a = 2n$.

2 – Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned}\phi_a(P) &= \left(\frac{1}{4} - X^2\right) \left(\alpha \left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta + \beta \left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta-1} \right) + 2nX \left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta \\ &= -\alpha \left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta+1} - \beta \left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha+1} \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta + 2nX \left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta\end{aligned}$$

On peut alors remarquer que cette dernière formule reste vraie même si α ou β est nul.
On continue :

$$\begin{aligned}\phi_a(P) &= \left(-\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right) - \beta \left(X + \frac{1}{2}\right) + 2nX \right) P \\ &= \left((2n - \alpha - \beta)X + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) P\end{aligned}$$

De là on a par identification :

$$\phi_a(P) = \lambda P \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2n \\ \alpha - \beta = 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = n + \lambda \\ \beta = n - \lambda \end{cases}$$

Reste à vérifier que $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$: la condition $\lambda \in \llbracket -n, n \rrbracket$ assure que α et β sont bien des entiers naturels, et que P est un polynôme. On a en outre $\alpha + \beta = 2n$ donc $\deg(P) = 2n$ et $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$. En conclusion :

Pour $\lambda \in \llbracket -n, n \rrbracket$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, le polynôme $P = \left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta$ vérifie $\phi_a(P) = \lambda P$ si et seulement si $\begin{cases} \alpha = n + \lambda \\ \beta = n - \lambda \end{cases}$.

3 – On vient de prouver que les entiers $\lambda \in \llbracket -n, n \rrbracket$ sont valeurs propres ; on dispose ainsi de $2n+1$ valeurs propres, et ϕ_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ qui est de dimension $2n+1$. Donc ϕ_a a au plus $2n+1$ valeurs propres et ainsi : $\text{Sp}(\phi_a) = \llbracket -n, n \rrbracket$ et les sous-espaces propres sont des droites. On dispose d'un vecteur non nul de chaque sous-espace propre, qui en constitue donc une base.

Ainsi : $\text{Sp}(\phi_a) = \llbracket -n, n \rrbracket$ et pour $\lambda \in \llbracket -n, n \rrbracket$ on a : $E_\lambda(\phi_a) = \text{Vect} \left(\left(X + \frac{1}{2}\right)^{n+\lambda} \left(X - \frac{1}{2}\right)^{n-\lambda} \right)$.

Avec les images calculées à la question 1, la matrice M de ϕ_a dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & & & \\ 2n & 0 & 2/4 & & \\ & 2n-1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 2n/4 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Et le spectre de M est $\llbracket -n, n \rrbracket$. De là si on pose $B = M + nI_{2n}$ on a alors pour $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \in \text{Sp}(B) \Leftrightarrow \det(B - \lambda I_{2n}) = 0 \Leftrightarrow \det(M - (\lambda - n)I_{2n}) = 0 \Leftrightarrow \lambda - n \in \text{Sp}(M) \Leftrightarrow \lambda - n \in \llbracket -n, n \rrbracket$$

Donc $\text{Sp}(B) = \llbracket 0, 2n \rrbracket$ et les coefficients diagonaux de B sont tous égaux à n .

5 – On a ainsi $\text{Sp}(\phi_a + n \text{Id}) = \llbracket 0, 2n \rrbracket$.

Or si f est un endomorphisme d'un espace E , λ une valeur propre de f et si x est un vecteur propre associé, on a $f^2(x) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$ ce qui montre que λ^2 est valeur propre de f^2 .

Donc en considérant l'endomorphisme $(\phi_a + n \text{Id})^2$, cet endomorphisme a pour valeur propres $0, 1, 4, 9, \dots, (2n)^2$ (et il n'y en a pas d'autre : on vient de trouver $2n+1$ valeurs propres distinctes pour un endomorphisme d'un espace de dimension $2n+1$).

EXERCICE 3

1.1 – Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{E}$ on a $\Phi(u) = (a, b, c) \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = a \\ u_1 = b \\ u_2 = c \end{cases}$. Or il existe une

seule suite u vérifiant la relation de récurrence d'ordre 3 définissant $\mathfrak{E}$ et ayant trois conditions initiales fixées. En d'autres termes, Φ est bijective, et on a explicitement :

$$\Phi^{-1}(a,b,c) = u \text{ où } u \text{ est la suite définie par } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \begin{cases} a & \text{si } n \equiv 0 [3] \\ b & \text{si } n \equiv 1 [3] \\ c & \text{si } n \equiv 2 [3] \end{cases}$$

1.2 – Φ est par ailleurs clairement linéaire et constitue donc un isomorphisme de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^3$. Par suite on a $\dim(\mathcal{E}) = 3$.

2.1 – Comme Φ^{-1} est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathcal{E}$, l'image par Φ^{-1} d'une base de $\mathbb{R}^3$ est une base de $\mathcal{E}$. Donc (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathcal{E}$.

2.2 – Avec la caractérisation de $\Phi^{-1}(a,b,c)$ énoncée lors de la question 1.1, on peut dire en posant $e_1 = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $e_2 = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $e_3 = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qu'on a pour tout entier naturel n :

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 [3] \\ 0 & \text{si } n \equiv 1 [3] \\ 0 & \text{si } n \equiv 2 [3] \end{cases}, \quad v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 0 [3] \\ 1 & \text{si } n \equiv 1 [3] \\ 0 & \text{si } n \equiv 2 [3] \end{cases} \text{ et } w_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 0 [3] \\ 0 & \text{si } n \equiv 1 [3] \\ 1 & \text{si } n \equiv 2 [3] \end{cases}$$

3 – Appelons $\langle . | . \rangle$ le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^3$. On remarque ainsi que pour $u, v \in \mathcal{E}$ on a : $(u|v) = \langle \Phi(u) | \Phi(v) \rangle$. Il résulte alors de la bilinéarité de Φ et du fait que $\langle . | . \rangle$ soit un produit scalaire que $(. | .)$ est une forme bilinéaire positive. Reste à montrer qu'elle est définie. On se donne donc $u \in \mathcal{E}$ telle que $(u|u) = 0$. On a alors $\langle \Phi(u) | \Phi(u) \rangle = 0$ et donc $\Phi(u) = 0$, et par injectivité de Φ on en déduit alors $u = 0$, ce qui achève la preuve : $(. | .)$ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.

4 – Pour $i, j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ on a : $(\varepsilon_i | \varepsilon_j) = \langle \Phi(\varepsilon_i) | \Phi(\varepsilon_j) \rangle = (e_i | e_j) = \delta_{i,j}$ (on rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique). On a prouvé que $\mathcal{B}$ est une famille orthonormale de $\mathcal{E}$ et à ce titre elle est libre. Comme $\dim(\mathcal{E}) = 3$ c'est donc une base, et ainsi : $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de $\mathcal{E}$.

5.1 – Montrons d'abord la linéarité : on se donne $u, v \in \mathcal{E}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et on pose $a = d(u)$, $b = d(v)$ et $c = d(u + \lambda v)$.

On a alors pour tout n : $c_n = u_{n+1} + \lambda v_{n+1} = a_n + \lambda b_n$, et donc $c = a + \lambda b$ d'où : $d(u + \lambda v) = d(u) + \lambda d(v)$: d est bien linéaire.

Soit maintenant $u \in \mathcal{E}$ et $w = d(u)$. On a alors pour tout n : $w_{n+3} = u_{n+4} = u_{n+1} = w_n$, donc $w \in \mathcal{E}$. Il résulte de ces deux points que d est bien un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

5.2 – Les quatre premiers termes de ε_1 sont : $(1, 0, 0, 1)$ et donc les trois premiers de $d(\varepsilon_1)$ sont $(0, 0, 1)$. Ainsi $\Phi(d(\varepsilon_1)) = \Phi(\varepsilon_3)$ et par injectivité : $d(\varepsilon_1) = \varepsilon_3$.

On établit de même que $d(\varepsilon_2) = \varepsilon_1$ et $d(\varepsilon_3) = \varepsilon_2$. Donc la matrice M de d dans $\mathfrak{B}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5.3 - \text{Pour } \lambda \in \mathbb{R} \text{ on a } \chi_M(\lambda) = - \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \stackrel{L_3 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3}{=} (\lambda - 1) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On retranche L_3 à L_2 et on obtient :

$$\chi_M(\lambda) = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda - 1 \end{vmatrix}$$

Et finalement : $\chi_M(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$. Le discriminant du trinôme $\lambda^2 + \lambda + 1$ étant < 0 , χ_M n'est pas scindé et M n'est pas diagonalisable.

Par suite, d n'est pas diagonalisable.

5.4 – On remarque que comme 1 est valeur propre simple de M et donc de d , alors l'ensemble $\mathfrak{D}$ des invariants est une droite. Or la suite constante à 1 est visiblement invariante par d , donc $\mathfrak{D}$ est la droite engendrée par la suite constante à 1. Concrètement, $\mathfrak{D}$ est donc l'ensemble des suites constantes.

5.5 – La matrice M de d dans la base orthonormale $\mathfrak{B}$ est visiblement une matrice orthogonale (ses colonnes forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$). De ce fait, d est une isométrie de $\mathfrak{E}$.

Pour $u \in \mathfrak{E}$ on pose $v = d^3(u)$; on a alors $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+3} = u_n$, donc $v = u$ et ce pour tout $u \in \mathfrak{E}$; donc $d^3 = \text{Id}$.

5.6 – Appelons U la suite constante égale à 1. On a pour $u \in H$:

$$(d(u)|U) = (d(u)|d(U)) = (u|U) = 0$$

(la première égalité car U est invariant, la seconde car d est une isométrie, la dernière car H est l'orthogonale de $\mathfrak{D} = \text{Vect}(U)$). Donc $d(u) \perp U$ et ainsi $d(u) \in H$. On a bien montré que H est stable par d .

5.7 – Soit $\tilde{d}$ l'endomorphisme induit par d sur H . Si on considère une base $\mathfrak{B}_H = (V, W)$ de H , alors (U, V, W) est une base $\mathfrak{B}_0$ de $\mathfrak{E}$ dans laquelle la matrice de d a la décomposition par bloc :

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}_0}(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & A \end{pmatrix}, \text{ où } A = \mathfrak{M}_{\mathfrak{B}_H}(\tilde{d})$$

De là $\det(d) = \det(A) = \det(\tilde{d})$. Or avec le 5.3 : $\det(d) = -\chi_M(0) = 1$, donc $\det(\tilde{d}) = 1$. Ainsi $\tilde{d}$ est une isométrie (car restriction d'une isométrie) positive du plan H , donc $\tilde{d}$ est une rotation.

Soit θ l'angle de cette rotation (en supposant avoir orienté préalablement H). On déduit de $d^3 = \text{Id}_{\mathbb{E}}$ que $\tilde{d}^3 = \text{Id}_H$ et donc que $3\theta \equiv 0 [2\pi]$, puis que $\theta \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{3} \right]$. Ainsi l'angle de cette rotation peut être $0, \frac{2\pi}{3}$ ou $-\frac{2\pi}{3}$ modulo 2π . $\theta = 0$ est à rejeter car sinon les restrictions de d aux espaces supplémentaires $\mathcal{D}$ et H seraient l'identité, ce qui amènerait $d = \text{Id}$ ce qui n'est pas le cas. Il reste donc $\theta = \pm \frac{2\pi}{3}$, le signe étant lié à l'orientation choisie sur H .

Il serait possible d'aller plus loin en choisissant une base de H comme directe, et de déterminer le signe de θ pour ce choix d'orientation, mais cela ne me semble pas dans l'esprit du programme.

EXERCICE 4

1 – On a pour $z \in \mathbb{C}$: $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$; le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$.

2 – Soient M et N deux matrices semblables de $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$, et f l'endomorphisme associé à M . Si on appelle $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^d$ on a alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = M$. On sait qu'il existe alors une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{K}^d$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(f) = N$.

Par suite : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f^p) = M^p$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(f^p) = N^p$. M^p et N^p apparaissant ainsi comme deux matrices d'un même endomorphisme, elles sont alors semblables.

Complétons ce résultat pour la suite : si P est une matrice inversible telle que $P^{-1}MP = N$, alors P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$, et en appliquant la formule de changement de base sur les matrices de f^p on obtient $P^{-1}M^pP = N^p$.

3.1 – Pour $z \in \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{aligned} s(z) &= \frac{1}{2i} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(1 - (-1)^n)}_{=0 \text{ si } n \text{ est pair}} \frac{(iz)^n}{n!} \end{aligned}$$

Donc en ne gardant que les valeurs impaires de la sommation :

$$s(z) = \frac{1}{i} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

Or $i^{2p+1} = (-1)^p i$, ce qui permet de conclure :

$$s(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p z^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

3.2 – On établit de même : $c(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p z^{2p}}{(2p)!}$

4 – Pour $m \in \mathbb{N}$ on a : $\sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\gamma I_2)^{2n+1} = \left(\sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \gamma^{2n+1} \right) I_2 \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} s(\gamma) I_2$.

Donc $\varphi(\gamma I_2)$ existe et $\varphi(\gamma I_2) = s(\gamma) I_2$.

5.1 – C'est une question de cours : A étant une matrice de taille 2 ayant deux valeurs propres distinctes $\alpha \neq \beta$, A est alors semblable $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, et donc il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}AP = B$.

5.2 – On se donne $m \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} B^{2n+1} = \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \begin{pmatrix} \alpha^{2n+1} & 0 \\ 0 & \beta^{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n \beta^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{pmatrix}$$

Puis en utilisant le théorème de 'limite par coordonnées' :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} B^{2n+1} = \begin{pmatrix} s(\alpha) & 0 \\ 0 & s(\beta) \end{pmatrix}$$

Donc : $\varphi(B)$ existe et $\varphi(B) = \begin{pmatrix} s(\alpha) & 0 \\ 0 & s(\beta) \end{pmatrix}$.

On regarde maintenant $\sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} = \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} P B^{2n+1} P^{-1} = P \left(\sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} B^{2n+1} \right) P^{-1}$.

Par continuité (car linéaire en dimension finie) de $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mapsto P^{-1}MP$ on a alors :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} P \left(\sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} B^{2n+1} \right) P^{-1} = P \varphi(B) P^{-1}$$

Donc : $\varphi(A)$ existe et $\varphi(A) = P \varphi(B) P^{-1}$.

6.1 – On sait que toute matrice complexe est trigonalisable (le polynôme caractéristique est toujours scindé sur $\mathbb{C}$). Donc A est semblable à une matrice triangulaire supérieure, et par invariance du polynôme caractéristique pour des matrices semblables, celle-ci se présente sous la forme $C = \begin{pmatrix} \alpha & y \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. En d'autres termes, il existe $Q \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $Q^{-1}AQ = C$.

6.2 – On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $A = \alpha I_2 + J$. αI_2 et J commutent et de plus $J^2 = 0$.

Donc pour $n \geq 1$: $C^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \underbrace{J^k}_{=0 \text{ si } k \geq 2} = \alpha^n I_2 + n\alpha^{n-1} J$. On notera que la formule reste vraie pour $n = 0$. Explicitement :

$$C^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1}y \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$$

6.3 – On calcule d'abord $\varphi(C)$. Pour $m \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} C^{2n+1} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} & y \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{(2n)!} \\ 0 & \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{pmatrix}$$

Et par calcul de limite par coordonnées on obtient :

$\varphi(C)$ existe et $\varphi(C) = \begin{pmatrix} s(\alpha) & yc(\alpha) \\ 0 & s(\alpha) \end{pmatrix}$. Par un raisonnement analogue au 5.2 on a alors :
 $\varphi(A)$ existe et $\varphi(A) = Q\varphi(C)Q^{-1}$.

7 – Pour $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$, son polynôme caractéristique est scindé et on est dans l'un des deux cas abordés lors des questions 5 et 6. Dans chacun de ces deux cas $\varphi(A)$ existe, ce qui en assure l'existence dans tous les cas.

8 – S'il existait $X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\varphi(X) = T$ avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1^{er} cas : si X a deux valeurs propres distinctes α et β .

Alors on a vu que T serait semblable à $\begin{pmatrix} s(\alpha) & 0 \\ 0 & s(\beta) \end{pmatrix}$, et par invariance du polynôme caractéristique on aurait $s(\alpha) = s(\beta) = 1$ et donc T serait semblable à I_2 qui n'est semblable qu'à elle-même. Donc $T = I_2$ ce qui est gênant ! Cette hypothèse doit donc être rejetée.

2^{ième} cas : si X a une valeur propre double α .

On a alors vu qu'il existe un complexe y tel que T soit semblable à $\begin{pmatrix} s(\alpha) & yc(\alpha) \\ 0 & s(\alpha) \end{pmatrix}$. Pour

la même raison on a $s(\alpha) = 1$. Mais $s(\alpha)^2 + c(\alpha)^2 = \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1$, ce qui entraîne $c(\alpha) = 0$ et à nouveau T serait semblable à I_2 ce qui conduit à la même contradiction.

On peut conclure qu'il n'existe pas de matrice $X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\varphi(X) = T$.