

L'énoncé de cette épreuve, spécifique aux candidats de l'option M, comporte 5 pages.

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

Définitions et notations

1°) Le symbole \mathbb{N} représente l'ensemble des entiers naturels, \mathbb{N}^* l'ensemble des entiers naturels non nuls, \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels, \mathbb{R}_+^* l'ensemble des réels strictement positifs.

2°) Pour tout nombre réel x , on désigne par $[x]$ la partie entière de x , et par $\{x\}$ sa partie fractionnaire, c'est-à-dire $\{x\} = x - [x]$.

3°) Un nombre premier est par définition un entier naturel, strictement supérieur à 1 qui n'admet pas d'autre diviseur que lui-même et l'unité.

. Dans le problème, la lettre p représentera toujours un nombre premier.

. Etant donné un réel x , supérieur ou égal à 2, on pose $P(x) = \{p \mid p \in \mathbb{N}, p \text{ premier}, p \leq x\}$ conformément à la convention concernant la lettre p , toute somme du type

$$\sum_{p \in P(x)} f(p) \text{ pourra aussi être notée } \sum_{2 \leq p \leq x} f(p) .$$

4°) Dans l'ensemble des entiers naturels, la relation " k divise n " sera notée $(k \mid n)$.

Conformément à cette convention, toute somme du type $\sum_{k \in D(n)} f(k)$, où $D(n)$ représente l'ensemble des diviseurs entiers naturels de l'entier naturel non nul n , pourra aussi être notée $\sum_{k \mid n} f(k)$.

5°) Le symbole Log désigne la fonction logarithme népérien et la lettre e représente la base de cette fonction, c'est-à-dire l'unique réel tel que $\text{Log } e = 1$.

6°) Notation o (petit o). Etant données deux fonctions réelles de la variable réelle, f et g , on dit que " $f = o(g)$ au voisinage de $+\infty$ " si et seulement si

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*) (\exists A \in \mathbb{R}) (\forall x \in \mathbb{R}) (x > A \Rightarrow |f(x)| < \epsilon |g(x)|) .$$

On rappelle que si g est non nulle au voisinage de $+\infty$, cette condition équivaut aussi à

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 .$$

7°) Le but du problème est l'étude du comportement au voisinage de $+\infty$ de la fonction réelle π définie pour tout réel x , $x \geq 2$ par :

$$\pi(x) = \text{Card } P(x) = \sum_{2 \leq p \leq x} 1 .$$

PARTIE I

Observation

Le résultat de la 1ère question de la partie I n'est utilisé qu'à partir de la 3ème question de la partie III.

I - 1°) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite monotone de réels positifs, et soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels.

.../...

Montrer que pour tout couple d'entiers (M,N) tel que 1 < M < N on a :

$$\left| \sum_{n=M+1}^N a_n b_n \right| \leq 2 \max \{ a_{M+1}, a_N \} \cdot \max_{M \leq n \leq N} |s_n|$$

où on a posé :

$$s_n = \sum_{m=1}^n b_m \quad . \quad (\text{On pourra remarquer que } b_n = s_n - s_{n-1} \text{ et exprimer la somme } \sum_{n=M+1}^N a_n b_n$$

en fonction des a_n et des s_n).

I - 2°) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels et ϕ une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} continûment dérivable sur l'intervalle $[1, +\infty[$ de \mathbb{R} .

On pose pour tout réel $x, x \geq 1$ $A(x) = \sum_{n=1}^{[x]} a_n = \sum_{1 \leq n \leq x} a_n .$

a) Démontrer que pour tout réel $x, x \in [1, +\infty[$, A est intégrable sur le segment $[1, x]$ et on a :

$$\int_1^x \sum_{1 \leq n \leq u} a_n \phi'(u) du = \sum_{1 \leq n \leq x} a_n \int_n^x \phi'(u) du$$

b) En déduire que pour tout réel $x, x \in [1, +\infty[$, on a :

$$\sum_{1 \leq n \leq x} a_n \phi(n) = A(x) \phi(x) - \int_1^x A(u) \phi'(u) du$$

c) Application : en considérant la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $(\forall n \in \mathbb{N}^* a_n = 1)$, démontrer qu'il existe une constante réelle K_1 telle que l'on ait :

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad \left| \text{Log}([x]!) - x \text{Log} x + x \right| \leq K_1 (\text{Log} x) + 1 .$$

I - 3°) a) Démontrer que la suite de nombres réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \text{Log} n$ est convergente, la limite sera notée γ (constante d'Euler).

b) Démontrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^2} du$ est convergente et vérifier que $\gamma = 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^2} du .$

Pour la suite, on pose $I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^2} du$ pour tout x réel, $x \geq 1$.

c) On définit la fonction réelle U en posant $U(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N}^*)$ pour

tout réel $x, x \geq 1$.

Démontrer, en utilisant le 2°) b) (avec $\forall n \in \mathbb{N}^* a_n = 1$), qu'il existe une constante réelle K_2 telle que : $\forall x \in [1, +\infty[\quad \left| U(x) - (\text{Log} x) - \gamma \right| \leq \frac{K_2}{x} .$

d) Démontrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u} I(u) du$ est convergente . On pose $\delta = \gamma - 1 + \int_1^{+\infty} \frac{I(u)}{u} du .$

Soit V la fonction réelle définie en posant: $V(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \frac{1}{n} \text{Log} \frac{x}{n} , (n \in \mathbb{N}^*)$

pour tout réel $x, x \geq 1$.

Montrer, en utilisant le 2°) b) (avec $\forall n \in \mathbb{N}^* a_n = \frac{1}{n}$), qu'il existe une constante réelle K_3 telle que $\forall x \in [1, +\infty[\quad \left| V(x) - \frac{1}{2} (\text{Log} x)^2 - \gamma \text{Log} x - \delta \right| \leq \frac{K_3}{x} .$

.../...

PARTIE IIObservation

Le candidat pourra, en première lecture, traiter d'abord la question II - 3°) b) en admettant le résultat de II - 3°) a).

Soit μ la fonction réelle définie sur \mathbb{N}^* par :

$$\begin{cases} \mu(1) = 1 \\ \mu(n) = (-1)^r \text{ si } n \text{ est le produit de } r \text{ nombres premiers distincts} \\ \mu(n) = 0 \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

μ est appelée fonction de Möbius .

II - 1°) Montrer que pour tout entier naturel n , non nul, $\sum_{k|n} \mu(k)$ est égal à 1 si $n = 1$, à 0 si $n > 1$.

[Pour $n > 1$, on pourra écrire la décomposition de n en facteurs premiers, sous la forme $n = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_r^{i_r}$ (avec $i_k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k = 1, 2, \dots, r$) puis caractériser et dénombrer les diviseurs k de n pour lesquels on a $\mu(k) \neq 0$].

II - 2°) Soit f une fonction réelle définie sur l'intervalle $[1, +\infty[\subset \mathbb{R}$.

Pour tout x appartenant à $[1, +\infty[$, on pose $F(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} f\left(\frac{x}{n}\right)$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

a) Vérifier que l'on a $\forall x \in [1, +\infty[\quad f(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right)$

b) E désignant le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications de $[1, +\infty[$ dans \mathbb{R} , on appelle Φ l'application de E dans lui-même définie par $\Phi(f) = F$.

Montrer que Φ est un automorphisme de E .

Un couple (f, F) de fonctions réelles définies sur $[1, +\infty[$, tel que $F = \Phi(f)$ est appelé un μ -couple.

II - 3°) a) Pour tout x réel, $x \in [2, +\infty[$, et tout entier naturel p , premier, tel que $p \leq x$,

on pose $v_p(x) = \max \{v \mid v \in \mathbb{N}^* \mid p^v \leq x\}$ et $i_p(x) = \sum_{v=1}^{v_p(x)} \left[\frac{x}{p^v} \right]$.

Démontrer que la décomposition de $[x]!$ en facteurs premiers s'écrit :

$$[x]! = \prod_{2 \leq p \leq x} p^{i_p(x)}$$

(pour tout entier v , tel que $1 \leq v \leq v_p(x)$, on pourra dénombrer les entiers m $2 \leq m \leq [x]$, dont la composition en facteurs premiers contient p avec un exposant supérieur ou égal à v).

b) Soit Λ la fonction réelle définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} \Lambda(n) = \text{Log } p & \text{si la décomposition de } n \text{ en facteurs premiers est de la forme} \\ & n = p^v \text{ avec } v \in \mathbb{N}^* \\ \Lambda(n) = 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Soit alors Ψ la fonction réelle définie sur $[1, +\infty[$ par $\Psi(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \Lambda(n)$.

Démontrer que $\Phi(\Psi)$ est la fonction telle que :

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad \Phi(\Psi)(x) = \text{Log}([x]!) .$$

.../...

PARTIE IIIObservation

Le candidat pourra, en première lecture, traiter d'abord la question III-4°) en admettant le résultat de III-3°).

III - 1°) Soit (f, F) un μ -couple, on suppose qu'il existe une constante réelle positive H et une constante réelle β , avec $0 \leq \beta < 1$, telles que pour tout $x \in [1, +\infty[$ $|F(x)| \leq Hx^\beta$

Démontrer que, pour tout réel $x \in [1, +\infty[$ on a $|f(x)| \leq \frac{Hx}{1-\beta} - \frac{H\beta x^\beta}{1-\beta}$.

(On pourra majorer la somme $\sum_{1 \leq n \leq x} \frac{1}{n^\beta}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) au moyen d'une intégrale).

III - 2°) a) Soit (f, F) un μ -couple. On suppose qu'il existe cinq constantes réelles A, B, C, K et β avec $0 \leq \beta < 1$ telles que pour tout $x \in [1, +\infty[$.

$$|F(x) - A x \text{Log}^2 x - B x \text{Log} x - C x| \leq K x^\beta.$$

- Montrer que l'on peut choisir a, b, c , constantes réelles, de façon que, en posant

$f_0(x) = f(x) - a x \text{Log} x - b x - c$ pour tout $x \in [1, +\infty[$, et $F_0 = \Phi(f_0)$, il existe une constante réelle positive H telle que l'on ait : $\forall x \in [1, +\infty[$ $|F_0(x)| \leq H x^\beta$.

- En déduire qu'il existe une constante H_1 telle que :

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad |f(x) - 2Ax \text{Log} x| \leq H_1 x.$$

b) Application : Ψ désignant la fonction introduite dans le II-3°), démontrer que

$\frac{\Psi(x)}{x}$ est bornée quand x décrit $[1, +\infty[$.

III - 3°) On pose pour tout réel $x \in [1, +\infty[$ $M(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \mu(n)$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

- On admettra dans la suite du problème que $\frac{M(x)}{x}$ est un infiniment petit quand x tend vers $+\infty$.

Ce résultat peut se traduire par :

$$"M(x) = o(x) \text{ au voisinage de } +\infty";$$

ou encore par :

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \varepsilon(y) = 0.$$

ε désignant la fonction réelle définie par $\forall y \in [1, +\infty[$ $\varepsilon(y) = \sup_{x \geq y} \left| \frac{M(x)}{x} \right|$

a) Soit (f, F) un μ -couple vérifiant les mêmes hypothèses que dans le III-2°) et tel que F soit positive croissante sur $[1, +\infty[$. On veut démontrer que, au voisinage de $+\infty$, on a : $f(x) = 2Ax \text{Log} x + (B - 2A\gamma)x + o(x)$.

On pourra pour cela, en introduisant un réel arbitraire $\eta \in]0, 1[$, écrire pour tout réel $x \geq \frac{1}{\eta}$

$$f_0(x) = \sum_{1 \leq n \leq \eta x} \mu(n) F_0\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{\eta x < n \leq x} \mu(n) F_0\left(\frac{x}{n}\right) \quad \text{puis majorer séparément les deux sommes.}$$

Pour la seconde, on pourra observer que F_0 est la différence de deux fonctions positives croissantes F_1 et F_2 et majorer les sommes $\sum_{\eta x < n \leq x} \mu(n) F_i\left(\frac{x}{n}\right)$ ($i = 1, 2$) en utilisant le résultat établi en I-1°)

b) Application : montrer que $\Psi(x) = x + o(x)$ au voisinage de $+\infty$.

III - 4°) a) On pose pour tout réel $x \in [2, +\infty[$ $\theta(x) = \sum_{p \in P(x)} \text{Log } p = \sum_{2 \leq p \leq x} \text{Log } p$

Ψ désignant la fonction étudiée dans les questions précédentes, démontrer les identités

$$(i) \quad \Psi(x) = \sum_{2 \leq p \leq x} \sum_{1 \leq v \leq v_p(x)} \text{Log } p \quad (v_p(x) \text{ est défini dans le II-3°) a)).$$

$$(ii) \quad \Psi(x) = \sum_{2 \leq p \leq x} \left[\frac{\text{Log } x}{\text{Log } p} \right] \text{Log } p \quad ([] \text{ désigne toujours la partie entière}).$$

$$(iii) \quad \Psi(x) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{\text{Log } x}{\text{Log } 2} \right]} \theta(x)^{\frac{1}{k}}$$

En déduire pour tout réel $x \in [2, +\infty[$ $\theta(x) \leq \Psi(x) \leq \pi(x) \text{Log } x$

(π est la fonction définie dans le préambule : $\pi(x) = \text{Card } P(x)$).

b) Pour tout x donné dans $[e, +\infty[$ et tout réel y dans $]1, x[$. Démontrer que :

$$\theta(x) \geq \pi(y) \text{Log } y + y \text{Log } y.$$

c) Soit f la fonction réelle définie par : $f(x) = \frac{x}{\text{Log}^2 x}$.

Démontrer que pour tout $x \in [e, +\infty[$ on a : $1 < f(x) < x$.

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log } f(x)}{\text{Log } x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \text{Log } x}{x}$.

d) En utilisant l'inégalité trouvée dans le a) et celle trouvée dans le b) dans laquelle on aura substitué $f(x)$ à y , démontrer que lorsque x tend vers $+\infty$, $\pi(x)$ est équivalent à $\frac{x}{\text{Log } x}$.