

Exercice 1

1. Si $P \in E$, $\Delta(P) \in E$. De plus, la linéarité de la dérivation et les propriétés d'algèbre de E assurent la linéarité de Δ .

2. Pour tout $P \in E$, en adoptant la convention usuelle $\deg(0) = -\infty$:

$\deg((2X+1)P') = 1 + \deg(P') \leq \deg(P)$ avec égalité si $P' \neq 0$ et $\deg((X^2+X)P'') = 2 + \deg(P'') \leq \deg(P)$ avec égalité si $P'' \neq 0$.

On en déduit que $\deg(\Delta(P)) \leq \deg(P)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est donc stable par Δ et on note Δ_n , l'endomorphisme induit par Δ sur E_n .

3.

$$\begin{cases} \Delta(1) = 0 \\ \Delta(X) = 2X + 1 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta(X^k) = k(k+1)X^k + k^2X^{k-1}. \end{cases}$$

On en déduit la matrice $M_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de Δ_n dans la base $(1, X, \dots, X^n)$:

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 2 & 2^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & k^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & k(k+1) & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n^2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

4. Comme M_n est triangulaire, ses valeurs propres sont les éléments diagonaux et en notant $\text{Sp}(\Delta_n)$ le spectre de Δ_n ,

$\text{Sp}(\Delta_n) = \{k(k+1) \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$

5. Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x(x+1) \end{cases}$. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi'(x) = 2x+1 > 0$: on en déduit

que φ est injective.

Δ_n admet donc $n+1$ valeurs propres distinctes. Comme $\dim(\Delta_n) = n+1$, Δ_n est diagonalisable et ses sous espaces propres ont tous pour dimension 1.

6. D'après ce qui précède, $n(n+1)$ est valeur propre de Δ_n et le sous espace propre associé F est de dimension égale à 1. Soit Q un élément non nul de F et α_Q son coefficient dominant. ($\alpha_Q \neq 0$).

$P_n = \frac{1}{\alpha_Q} Q$ est le seul élément de F qui ait un coefficient dominant égal à 1.

D'autre part, $\deg(P_n) \leq n$ car $P_n \in E_n$.

Si $\deg(P_n) < n$, P_n serait un vecteur propre de Δ_{n-1} associé à la valeur propre $n(n+1)$, ce qui est absurde car $n(n+1) \notin \text{Sp}(\Delta_{n-1})$. Donc $\deg(P_n) = n$.

7. Q_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant égal à $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

$$\begin{aligned} \Delta_n(Q_n) &= \sum_{k=1}^n \frac{(n+k)!}{(n-k)!(k!)^2} (k(k+1)X^k + k^2X^{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(n+k)!k(k+1)}{(n-k)!(k!)^2} X^k + \sum_{k=1}^n \frac{(n+k)!}{(n-k)!((k-1)!)^2} X^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(n+k)!k(k+1)}{(n-k)!(k!)^2} X^k + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n+p+1)!}{(n-p-1)!((p-1)!)^2} X^p \\ &= \frac{n(n+1)(2n)!}{(n!)^2} X^n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n+k)!}{(n-k)!(k!)^2} (k(k+1) + (n+k+1)(n-k)) X^k + n(n+1)X^0 \end{aligned}$$

Comme $k(k+1) + (n+k+1)(n-k) = n(n+1)$, on obtient finalement $\Delta_n(Q_n) = n(n+1)Q_n$.
Comme le sous espace propre F relatif à la valeur propre $n(n+1)$ est de dimension 1, que le coefficient dominant de Q_n est $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$, on en déduit que $P_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} Q_n$.

8. Soit P et Q dans E .

$$(\Delta(P) | Q) = \int_{-1}^0 (t^2 + t)P''(t)Q(t) dt + \int_{-1}^0 (2t + 1)P'(t)Q(t) dt.$$

En transformant la première intégrale à l'aide d'une intégration par parties, on obtient :

$$(\Delta(P) | Q) = \left[(t^2 + t)Q(t)P'(t) \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 P'(t) ((t^2 + t)Q'(t) + (2t + 1)Q(t)) dt + \int_{-1}^0 (2t + 1)P'(t)Q(t) dt.$$

$$\text{Soit finalement } (\Delta(P) | Q) = - \int_{-1}^0 (t^2 + t)Q'(t)P'(t) dt$$

$$\text{On a donc } (P | \Delta(Q)) = (\Delta(Q) | P) = - \int_{-1}^0 (t^2 + t)P'(t)Q'(t) dt = (\Delta(P) | Q)$$

Δ est un endomorphisme autoadjoint de E .

9. On sait que les sous espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien sont deux à deux orthogonaux : ce résultat est encore vrai dans le cadre d'un espace préhilbertien réel

Soit n et m deux entiers naturels distincts.

$$(\Delta(P_n) | P_m) = (P_n | \Delta(P_m)). \text{ Or } \Delta(P_n) = n(n+1)P_n \text{ et } \Delta(P_m) = m(m+1)P_m.$$

On obtient donc $(n(n+1) - m(m+1))(P_n | P_m) = 0$. On a déjà remarqué que si n et m sont deux entiers distincts, $n(n+1) \neq m(m+1)$.

On en déduit que $(P_n | P_m) = 0$.

rqe : l'hypothèse n et m non nuls est inutile

Exercice 2

1. Si f est une fonction constante de valeur c , f est bien de classe $\mathcal{C}^2$ et f est solution de (*) si et seulement si $c^2 = c$, ce qui équivaut à $c = 0$ ou $c = 1$.

1. Soit f une solution non constante de (*).

(i) En spécialisant y par 0, $\forall x \in \mathbb{R}$, $2f(x) = 2f(x)f(0)$.

Comme f n'est pas constante, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$ et on en déduit $f(0) = 1$.

En dérivant l'égalité (*) par rapport à y :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x)f'(y).$$

En particulier pour $x = y = 0$, $0 = 2f'(0)$ d'où $f'(0) = 0$

(ii)

Pour $x = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $f(y) + f(-y) = 2f(y)$ d'où $f(-y) = f(y)$: f est paire

rqe : de f paire et $\mathcal{C}^1$, on déduisait sans calcul supplémentaire que f' était impaire et donc que $f'(0) = 0$

3. 3 (i) Les applications $(x, y) \mapsto x + y$ et $(x, y) \mapsto x - y$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$: on déduit par théorèmes de composition et d'opérations que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

3 (ii) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f'(x+y) + f'(x-y) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f'(x+y) - f'(x-y). \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = f''(x+y) + f''(x-y) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = f''(x+y) + f''(x-y) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = f''(x+y) - f''(x-y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y). \end{cases}$$

Car d'après le théorème de Schwarz, comme F est de classe $\mathcal{C}^2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$.

On en déduit que $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

3 (iii)

On a aussi $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = 2f(x)f(y)$, d'où l'on déduit que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2f(y) f'(x) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2f(x) f'(y) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = 2f(y) f''(x) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = 2f(x) f''(y) \end{cases}$$

On déduit de **3 (ii)** que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(y)f''(x) = f(x)f''(y)$
 En particulier, avec $y = 0$, en posant $\alpha = f''(0)$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = \alpha f(x). \quad (\mathcal{E})$$

- Si $\alpha = 0$, les solutions de $(\mathcal{E})$ sont les fonctions $y : x \mapsto ax + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- Si $\alpha < 0$, les solutions de $(\mathcal{E})$ sont les fonctions $y : x \mapsto A \cos \omega x + B \sin \omega x$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et $\omega = \sqrt{-\alpha}$.
- Si $\alpha > 0$, les solutions de $(\mathcal{E})$ sont les fonctions $y : x \mapsto A \operatorname{ch} \omega x + B \operatorname{sh} \omega x$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et $\omega = \sqrt{\alpha}$.

4. Soit f une solution non constante de $(*)$. Elle est d'un des trois types précédents. On sait de plus que $f(0) = 1$ et que f est paire.

La seule fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ qui vérifie $f(0) = 1$ et f paire est la fonction constante de valeur 1. Ce cas a été exclu.

Si $f : x \mapsto A \cos \omega x + B \sin \omega x$. $f(0) = 1$ entraîne $A = 1$ et f paire entraîne $B = 0$.

Réciproquement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos \omega x$,

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x+y) + f(x-y) = 2 \cos \omega x \cos \omega y = 2f(x) f(y).$$

$$\text{En utilisant les formules : } \begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

Si $f : x \mapsto A \operatorname{ch} \omega x + B \operatorname{sh} \omega x$. $f(0) = 1$ entraîne $A = 1$ et f paire entraîne $B = 0$.

Réciproquement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ch} \omega x$,

$$\text{Pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2 \operatorname{ch} \omega x \operatorname{ch} \omega y = 2f(x) f(y).$$

$$\text{En utilisant les formules : } \begin{cases} \operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \\ \operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \end{cases}$$

Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, notons g_ω (resp h_ω) l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_\omega(x) = \cos \omega x \quad (\text{resp } h_\omega(x) = \operatorname{ch} \omega x).$$

En remarquant que $g_0 = h_0$ est la fonction constante de valeur 1,

L'ensemble des solutions de $(*)$ est $\{0\} \cup \{g_\omega \mid \omega \in \mathbb{R}\} \cup \{h_\omega \mid \omega \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3

$$1. \forall M \in P \setminus \{O\}, \quad \overrightarrow{OM} = \frac{1}{\|\overrightarrow{OM}\|^2} \overrightarrow{OM}$$

$$2. \begin{cases} x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ y' = \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

3. Remarquons qu'effectivement si $M \in P \setminus \{0\}$, $M' \in P \setminus \{O\}$. On peut donc définir $M'' = \sigma(M')$.

Pour tout $M \in P \setminus \{O\}$,

$$\overrightarrow{OM''} = \frac{1}{\|\overrightarrow{OM'}\|^2} \overrightarrow{OM'} = \|\overrightarrow{OM}\|^2 \frac{1}{\|\overrightarrow{OM}\|^2} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} \text{ d'où } M'' = M$$

$$\text{et par conséquent, } \boxed{\sigma^2 = Id}.$$

On en déduit que σ est une bijection de $P \setminus \{O\}$ sur lui-même, et que $\sigma^{-1} = \sigma$.

4. Soit D une droite passant par O .

Pour tout $M \in D \setminus \{O\}$, le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$, donc $M' \in D$ et même $M' \in D \setminus \{O\}$ car $M' \in P \setminus \{O\}$.

On en déduit que $\sigma(D \setminus \{0\}) \subset D \setminus \{0\}$.

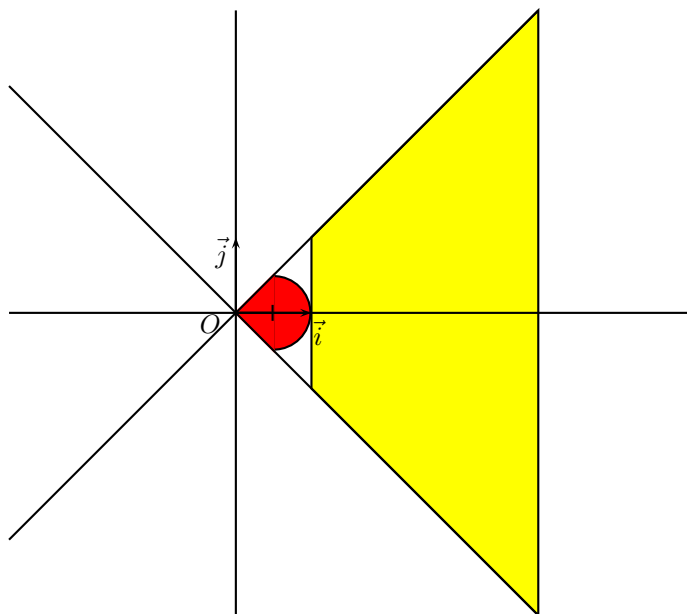
En appliquant $\sigma^{-1} = \sigma$, on a $D \setminus \{0\} \subset \sigma(D \setminus \{0\})$ d'où

$\sigma(D \setminus \{0\}) = D \setminus \{0\}.$

5. Pour tout réel θ , notons $\vec{u}_\theta = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ et D_θ la droite passant par O et dirigée par $\vec{u}_\theta$.

$R = \bigcup_{-\pi/4 < \theta < \pi/4} (D_\theta \setminus \{O\})$ donc

$$\sigma(R) = \bigcup_{-\pi/4 < \theta < \pi/4} \sigma(D_\theta \setminus \{O\}) = \bigcup_{-\pi/4 < \theta < \pi/4} (D_\theta \setminus \{O\}) = R$$



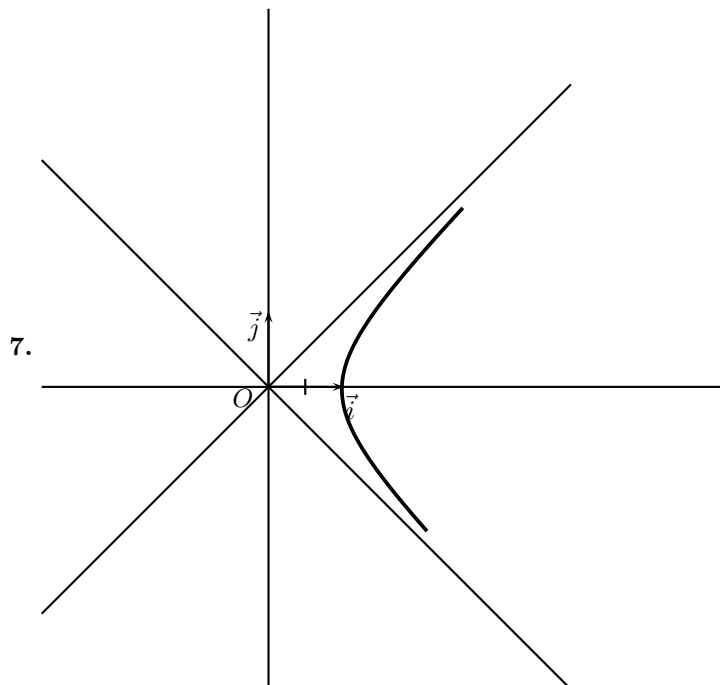
S , représentée en jaune sur le dessin est l'intersection de R et du demi plan d'équation $x \geq 1$.

T représenté en rouge est l'intersection de R et du disque fermé C de centre $A(1/2, 0)$ et de rayon 1.

Soit $M(x, y) \in S$ et $M' = \sigma(M)$. Comme $\sigma(R) = R$, $M' \in R$. Montrons que $M' \in C$:

$$(x' - 1/2)^2 + y'^2 - 1/4 = x'^2 + y'^2 - x' = \|\vec{OM'}\|^2 - x' = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} \leq 0 \text{ car } x \geq 1.$$

On en déduit que pour tout $M \in S$, $M' \in T$: $\sigma(S) \subset T$



$\mathcal{H}$ est une branche d'hyperbole incluse dans S .

8. Comme $\mathcal{H} \subset S$, $\sigma(\mathcal{H}) \subset T$.

9. $\mathcal{H}$ peut être paramétrée par : $\begin{cases} x = \sqrt{1 + y^2} \\ y = y \end{cases} \quad y \in \mathbb{R}$

Posons $u = \arctan y$, on obtient un nouveau paramétrage de $\mathcal{H}$: $\begin{cases} x = \sqrt{1 + \tan^2 u} = \frac{1}{\cos u} \\ y = \tan u \end{cases} \quad u \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$

10. Soit $M(x, y) \in P$. $M \in \sigma(\mathcal{H}) \iff \exists N \in \mathcal{H}, \quad M = \sigma(N)$.

En utilisant la question 2 et la paramétrisation précédente de $\mathcal{H}$,

$$M \in \sigma(\mathcal{H}) \iff \exists u \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [, \quad \begin{cases} x = \frac{X}{X^2 + Y^2} \\ y = \frac{Y}{X^2 + Y^2} \\ X = \frac{1}{\cos u} \\ Y = \tan u \end{cases}$$

De $\frac{1}{\cos^2 u} + \tan^2 u = \frac{1 + \sin^2 u}{\cos^2 u}$, on déduit finalement :

$$M \in \sigma(\mathcal{H}) \iff \exists u \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [, \quad \begin{cases} x = \frac{\cos u}{1 + \sin^2 u} \\ y = \frac{\sin u \cos u}{1 + \sin^2 u} \end{cases}$$

11. Soit $u \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ et $\theta = \arctan(\sin u)$

$\sin u$ décrit $] -1, 1 [$ et θ décrit $] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} [$. L'application $\arctan \circ \sin$ établit même une bijection de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ sur $] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} [$.

De plus, $1 + \sin^2 u = \frac{1}{\cos^2 \theta}$.

$$\cos u = \sqrt{1 - \sin^2 u} = \sqrt{\frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} = \frac{\sqrt{\cos(2\theta)}}{\cos \theta} \text{ car } \cos \theta > 0.$$

$$M \in \sigma(\mathcal{H}) \iff \exists \theta \in] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} [, \quad \begin{cases} x = \sqrt{\cos(2\theta)} \cos \theta \\ y = \sqrt{\cos(2\theta)} \cos \theta \tan \theta = \sqrt{\cos(2\theta)} \sin \theta \end{cases}$$

On en déduit une équation polaire de $\sigma(\mathcal{H})$: $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$ avec $\theta \in] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} [$.

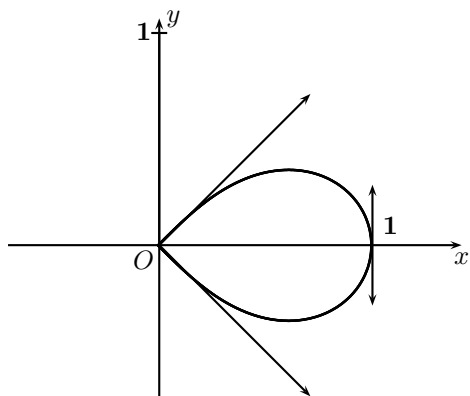
12.

Notons $\Gamma = \sigma(\mathcal{H})$.

La fonction $\theta \mapsto r(\theta)$ est paire : on l'étudie sur $[0, \pi/4[$ puis on effectuera une symétrie par rapport à Ox .

$$\forall \theta \in [0, \pi/4[\quad r'(\theta) = -\frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}.$$

θ	0	$\pi/4$
$r'(\theta)$	0	-
$r(\theta)$	1	0



Demi-lemniscate