

CONCOURS COMMUN MINES, PONTS ... 1975  
 OPTIONS M ET P' - 2EME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

—————

Cette épreuve commune aux candidats des options M et P' comporte 3 pages.

—————

Les deux parties du problème sont indépendantes l'une de l'autre.

PARTIE I

On considère l'équation du second degré

$$(1) \quad z^2 - bz + c = 0$$

dont les coefficients  $b$  et  $c$  sont dans  $\mathbb{Z}$  et vérifient  $b^2 - 4c < 0$  ;  
 $\alpha$  étant l'une des racines de cette équation, on désigne par  $\mathbb{Z}_\alpha$  l'ensemble des nombres complexes  $z = p + q\alpha$  où  $p$  et  $q$  appartiennent à  $\mathbb{Z}$ . On désigne également par  $\mathbb{Q}_\alpha$  l'ensemble des nombres complexes  $w = u + v\alpha$  où  $u$  et  $v$  appartiennent à  $\mathbb{Q}$ .

1°) Montrer que  $\mathbb{Z}_\alpha$  est un sous-anneau de  $\mathbb{C}$ . Que peut-on dire de la deuxième racine de l'équation (1) ?

2°) Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{Z}_\alpha$  dans  $\mathbb{Z}$  définie par

$$f(p + q\alpha) = p^2 + bpq + cq^2.$$

Montrer que

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ f(xy) &= f(x)f(y). \end{aligned}$$

3°) Soit  $G_\alpha$  l'ensemble des éléments de  $\mathbb{Z}_\alpha$  qui sont inversibles dans  $\mathbb{Z}_\alpha$ . Montrer que  $G_\alpha$  est un groupe pour la multiplication. Quelle est l'image de  $G_\alpha$  par  $f$  ? En déduire que si  $x = p + q\alpha$  est un élément de  $G_\alpha$ , on a l'inégalité :

$$q^2(4c - b^2) \leq 4.$$

En discutant suivant les valeurs attribuées à  $b$  et à  $c$ , déterminer tous les éléments de  $G_\alpha$ .

4°) a - Montrer que  $\mathbb{Q}_\alpha$  est un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .

b - Montrer que l'ensemble des matrices à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  définies par

$$M_{u,v} = \begin{pmatrix} u & v \\ -vc & u + bv \end{pmatrix}$$

(où  $u$  et  $v$  sont des rationnels quelconques) est un corps pour l'addition et la multiplication matricielles. Prouver que ce corps est isomorphe au corps  $\mathbb{Q}_\alpha$ .

5°) a - Montrer que  $\mathbb{Q}_\alpha$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}$  considéré comme espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$ . Quelle est la dimension de ce sous-espace vectoriel ?

- b - Montrer que la fonction définie sur  $\mathbb{Q}_\alpha$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$
- $$x \mapsto \sqrt{f(x)} = \sqrt{f(u + v\alpha)} = \sqrt{u^2 + buv + cv^2}$$
- est une norme euclidienne sur l'espace vectoriel  $\mathbb{Q}_\alpha$ . Déterminer le produit scalaire dont dérive cette norme. Que peut-on dire de la restriction à  $\mathbb{Q}_\alpha$  de la fonction module sur  $\mathbb{C}$  ?
- 6°) a - Étant donné un élément  $Y$  de  $\mathbb{Q}_\alpha$ ,  $Y \neq 0$ , montrer que  $\{Y, \alpha Y\}$  constitue une base de  $\mathbb{Q}_\alpha$ .
- b - On considère deux éléments  $X$  et  $Y$  dans  $\mathbb{Z}_\alpha$  avec  $Y \neq 0$ . Montrer qu'il existe un élément  $Q$  dans  $\mathbb{Z}_\alpha$  et deux rationnels  $\lambda$  et  $\mu$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1[$  tels que
- $$X = YQ + R \text{ où } R = Y(\lambda + \mu\alpha).$$
- 7°) On suppose dans cette septième question que  $c = 1$  et  $b = -1$  ;
- a - Montrer que, pour tout  $X \in \mathbb{Z}_\alpha$  et pour tout  $Y \in \mathbb{Z}_\alpha$ ,  $Y \neq 0$ , il existe un couple  $(Q, R)$  d'éléments de  $\mathbb{Z}_\alpha$  tel que
- $$X = YQ + R \text{ et } f(R) < f(Y).$$
- b - On donne  $X = 5 + 7\alpha$  et  $Y = 3 + \alpha$ . Déterminer une solution  $(Q, R)$  du problème précédent et montrer que cette solution n'est pas unique.
- c - Soit  $I$  un idéal arbitraire de l'anneau  $\mathbb{Z}_\alpha$ . Montrer que cet idéal est principal. Si le même idéal non nul est engendré par deux éléments distincts  $Z$  et  $Z'$  de  $\mathbb{Z}_\alpha$ , quelle est la relation qui existe entre  $Z$  et  $Z'$  ?
- d - Montrer que l'ensemble des éléments  $X = (5 + 7\alpha)A + (3 + \alpha)B$  où  $A$  et  $B$  sont des éléments quelconques de  $\mathbb{Z}_\alpha$  est un idéal. Déterminer tous les générateurs de cet idéal.
- 8°) Soit  $A_\alpha$  l'ensemble des automorphismes  $\phi$  de l'espace vectoriel  $\mathbb{Q}_\alpha$  tels que
- $$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$
- pour tous éléments  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{Q}_\alpha$ . Déterminer tous les éléments de  $A_\alpha$ .

## PARTIE II

On considère l'équation du 3ème degré

$$(2) \quad x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0.$$

- 1°) Montrer que toutes les racines de (2) sont réelles et appartiennent à l'intervalle  $]-2, 2[$ . Soit  $\theta$  l'une de ces racines, montrer que  $\theta$  n'est pas rationnel et que  $2 - \theta^2$  est une autre racine de l'équation (2).

Dans la suite, on désigne par  $\mathbb{Q}_\theta$  l'ensemble des réels  $x = u + v\theta + w\theta^2$  où  $u, v, w$  sont trois rationnels arbitraires.

Montrer que  $\mathbb{Q}_\theta$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}$  considéré comme espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{Q}$  des rationnels. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ? Que peut-on dire de l'ensemble des trois racines de l'équation (2) ?

On admet que  $\mathbb{Q}_\theta$  est un sous-corps du corps des réels.

- 2°) On désigne par  $A_\theta$  l'ensemble des automorphismes  $\phi$  de l'espace vectoriel  $\mathbb{Q}_\theta$  qui vérifient

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

pour tous les éléments  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{Q}_\theta$  muni de sa structure de corps. Montrer que  $A_\theta$  est un sous-groupe du groupe des automorphismes de l'espace vectoriel  $\mathbb{Q}_\theta$ .

Montrer que  $A_\theta$  est un ensemble de trois éléments que l'on désignera par  $\phi_0, \phi_1, \phi_2$  et que l'on définira explicitement. Trouver les espaces propres de  $\phi_1, \phi_2$

(On pourra supposer que  $\phi_0$  désigne l'automorphisme identité de  $\mathbb{Q}_\theta$  autrement dit l'élément unité de  $A_\theta$ ).

3°) On considère les trois applications de  $\mathbb{Q}_\theta$  dans lui-même  $T_1, T_2, T_3$  définies par

$$\begin{aligned} T_1(x) &= \phi_0(x) + \phi_1(x) + \phi_2(x); \\ T_2(x) &= \phi_0(x)\phi_1(x) + \phi_0(x)\phi_2(x) + \phi_1(x)\phi_2(x); \\ T_3(x) &= \phi_0(x)\phi_1(x)\phi_2(x). \end{aligned}$$

a - Montrer que les images de ces trois applications  $T_1, T_2, T_3$  sont incluses dans  $\mathbb{Q}$ .

De façon plus générale, soit un polynôme  $P$ , élément de  $\mathbb{Q}[X_1, X_2, X_3]$ , symétrique et homogène.

Montrer que l'application de  $\mathbb{Q}_\theta$  dans  $\mathbb{Q}_\theta$  définie par :

$$x \mapsto P(\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x))$$

est à valeurs dans  $\mathbb{Q}$ .

b - Montrer que l'application  $B$  définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Q}_\theta \times \mathbb{Q}_\theta, B(x, y) = T_1(xy)$$

est une forme bilinéaire symétrique telle que la forme quadratique associée soit définie positive.

Montrer que l'application  $T_2$  est une forme quadratique sur l'espace  $\mathbb{Q}_\theta$ .

Cette forme quadratique est-elle non dégénérée positive ?

○  
○ ○  
○