
Corrigé de la première épreuve de mathématiques
Centrale 2010 - Filière MP

L'objectif du problème est la construction d'une application f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$ dont l'image $f([0, 1])$ est le triangle plein τ et l'étude de quelques unes de ses propriétés.

Partie I - Préliminaires géométriques.

I.A -

I.A.1) Soit $z \in \mathbb{C}$ et notons $\Re(z)$ la partie réelle de z et $\Im(z)$ sa partie imaginaire. Alors,

$$\begin{aligned} z \in \tau_0 &\iff \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in K, z = -\alpha + i\beta \\ &\iff \Re(z) \leq 0, \Im(z) \geq 0 \text{ et } -\Re(z) + \Im(z) \leq 1 \end{aligned}$$

(avec $\alpha = -\Re(z)$, $\beta = \Im(z)$ et $\gamma = 1 - \alpha - \beta$). De la même façon,

$$z \in \tau_1 \iff \Re(z) \geq 0, \Im(z) \geq 0 \text{ et } \Re(z) + \Im(z) \leq 1$$

Maintenant, si $z \in \tau$, alors il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in K$ tel que $z = -\alpha + \gamma + i\beta$. Donc

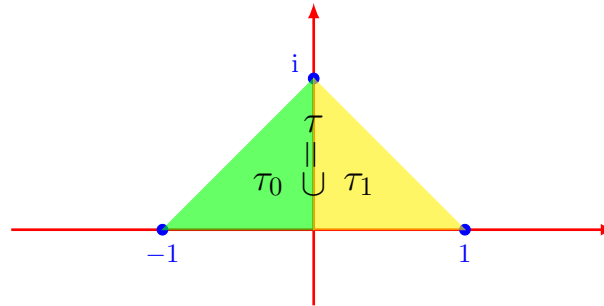
$$\Im(z) = \beta \geq 0 \quad \text{et} \quad |\Re(z)| + \Im(z) \leq \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Réciproquement, si $\Im(z) \geq 0$ et $|\Re(z)| + \Im(z) \leq 1$, alors, pour $\beta = \Im(z)$, $\gamma = \frac{1 - \Im(z) + \Re(z)}{2}$ et $\alpha = \frac{1 - \Im(z) - \Re(z)}{2}$ sont des réels tels que $(\alpha, \beta, \gamma) \in K$ et $z = -\alpha + \gamma + i\beta \in \tau$. Par suite,

$$\begin{aligned} z \in \tau &\iff \Im(z) \geq 0 \text{ et } |\Re(z)| + \Im(z) \leq 1 \\ &\iff (\Im(z) \geq 0, \Re(z) \leq 0 \text{ et } -\Re(z) + \Im(z) \leq 1) \text{ ou } (\Im(z), \Re(z) \geq 0 \geq 0 \text{ et } \Re(z) + \Im(z) \leq 1) \\ &\iff (z \in \tau_0) \text{ ou } (z \in \tau_1) \end{aligned}$$

ce qui établit $\tau = \tau_0 \cup \tau_1$.

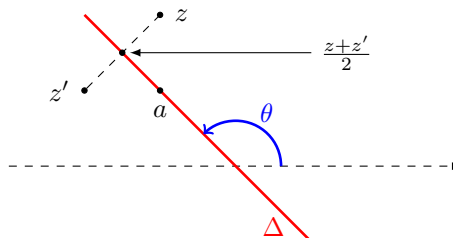
I.A.2)



τ_0, τ_1, τ sur une même figure

I.A.2)

a) Soit $a \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Notons z' l'image du complexe z par la réflexion dont l'axe est la droite Δ passant par a et dirigée par $e^{i\theta}$.



Notons S cette réflexion, T_b la translation du vecteur b pour tout $b \in \mathbb{C}$, S_0 la réflexion d'axe la droite passant par les points 0 et 1 et, enfin, R la rotation de centre 0 et d'angle 2θ . Il s'agit en fait de montrer que $S = T_a \circ R \circ S_0 \circ T_{-a}$ puisque $S_0(z) = \bar{z}$ et $R(z) = e^{2i\theta}z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. On sait que S et $S' = T_a \circ R \circ S_0 \circ T_{-a}$ sont des isométries négatives et ont a comme point invariant. Ceci montre que S' est une réflexion. Soit b un point de Δ autre que a de sorte que $b - a = |b - a| e^{i\theta}$. Alors,

$$\begin{aligned} S'(b) &= T_a \circ R \circ S_0 \circ T_{-a}(a + |b - a| e^{i\theta}) \\ &= T_a \circ R \circ S_0(|b - a| e^{i\theta}) \\ &= T_a \circ R(|b - a| e^{-i\theta}) \\ &= T_a(|b - a| e^{i\theta}) \\ &= b \end{aligned}$$

Ceci qui justifie la relation $z' - a = e^{2i\theta} \overline{(z - a)}$

b) Soit z un nombre complexe et z' son image par l'homothétie de centre a et de rapport $\rho > 0$. Alors,

$$z' - a = \rho(z - a)$$

c) On commence par chercher les points invariants de ϕ_0 . On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} z = \phi_0(z) &\iff z = \frac{1+i}{2}\bar{z} + \frac{-1+i}{2} \\ &\iff z = \frac{1+i}{2} \left(\frac{1-i}{2}z + \frac{-1-i}{2} \right) + \frac{-1+i}{2} \\ &\iff z = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} \iff z = -1 \end{aligned}$$

Donc $a = -1$ est le seul point invariant de ϕ_0 . D'un autre coté, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \phi_0(z) - a &= \frac{1+i}{2}\bar{z} + \frac{-1+i}{2} + 1 \\ &= \frac{1+i}{2}(\bar{z} + 1) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{2i\pi/8} \overline{(z + 1)} \end{aligned}$$

Alors, ϕ_0 est la composée de la réflexion dont l'axe est la droites passant par $a = -1$ et dirigée par le vecteur $e^{i\theta}$, où $\theta = \frac{\pi}{8}$ et de l'homothétie de rapport $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et dont le centre $a = -1$ appartient à l'axe de la réflexion. On reprend la même méthode : pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} z = \phi_1(z) &\iff z = \frac{1-i}{2}\bar{z} + \frac{1+i}{2} \\ &\iff z = \frac{1-i}{2} \left(\frac{1+i}{2}z + \frac{1-i}{2} \right) + \frac{1+i}{2} \\ &\iff z = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} \iff z = 1 \end{aligned}$$

Donc $a = 1$ est le seul point invariant de ϕ_1 . D'un autre coté, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \phi_1(z) - a &= \frac{1-i}{2}\bar{z} + \frac{1+i}{2} - 1 \\ &= \frac{1-i}{2}(\bar{z} - 1) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-2i\pi/8} \overline{(z - 1)} \end{aligned}$$

Alors, ϕ_1 est la composée de la réflexion dont l'axe est la droites passant par $a = 1$ et dirigée par le vecteur $e^{i\theta}$, où $\theta = -\frac{\pi}{8}$ et de l'homothétie de rapport $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et dont le centre $a = 1$ appartient à l'axe de la réflexion.

(On pourra remarquer aussi que si on écrit $\phi_0(z) = \alpha\bar{z} + \beta$, alors $\phi_1(z) = \bar{\alpha}\bar{z} - \bar{\beta}$. Donc si ϕ_1 est la composée d'une réflexion dont l'axe est dirigé par le vecteur $e^{i\gamma}$ et d'une homothétie de rapport $\rho' > 0$, on doit avoir $\rho' = \rho$ et $\gamma = -\theta$.) Ces décompositions sont uniques puisque (pour $\phi_0 : z \mapsto \alpha\bar{z} + \beta$ par exemple) l'axe de la réflexion passe par l'unique

point invariant de ϕ_0 qui est aussi le centre de l'homothétie et dirigé par $e^{i\theta}$, où $\theta = \frac{\arg(\alpha)}{2}$. En plus, $|\alpha|$ est le rapport de l'homothétie.

I.A.4) L'image d'un triangle plein $\widehat{abc}$ par ϕ_0 est le triangle plein $\phi_0(a)\widehat{\phi_0(b)}\phi_0(c)$ puisque ϕ_0 conserve le barycentre. De même, son image par ϕ_1 est le triangle plein $\phi_1(a)\widehat{\phi_1(b)}\phi_1(c)$. On a :

$$\begin{aligned}\phi_0(-1) &= -1, & \phi_1(-1) &= i \\ \phi_0(1) &= i, & \phi_1(1) &= 1 \\ \phi_0(i) &= 0, & \phi_1(i) &= 0\end{aligned}$$

donc $\phi_0(\tau) = \tau_0$ et $\phi_1(\tau) = \tau_1$.

I.B - (Diamètre d'un triangle plein)

I.B.1)

a) On a $K \subset [0, 1]^3$, donc K est borné. En plus, K est fermé puisque c'est l'image réciproque de $\{1\}$ par la fonction $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \alpha + \beta + \gamma$ continue sur $\mathbb{R}^3$. Il s'agit bien d'un compact de $\mathbb{R}^3$ pour sa topologie usuelle.

b) Soit $t \in [0, 1]$ et un couple (u, v) d'éléments de K , où $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$. Posons $w = tu + (1 - t)v$ et $w = (w_1, w_2, w_3)$. Alors,

$$w_1 + w_2 + w_3 = t(u_1 + u_2 + u_3) + (1 - t)(v_1 + v_2 + v_3) = t + 1 - t = 1$$

donc $w \in K$ et, par suite, K est convexe.

c) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. On a $\widehat{abc} = F(K)$, où F est l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{C}$ définie, pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

Puisque K est compact et f continue, $\widehat{abc} = F(K)$ est un compact de $\mathbb{C}$ muni de sa topologie usuelle. En plus, K est convexe et F est affine (même linéaire) donc $\widehat{abc} = F(K)$ est convexe.

d) L'application $G : (z, z') \mapsto |z - z'|$ de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ est continue, $\widehat{abc}^2$ est un compact de $\mathbb{C}^2$, G est donc majorée et atteint sa borne supérieure sur $\widehat{abc}^2$, d'où l'existence de :

$$\delta(\widehat{abc}) = \max \left\{ |z' - z| / |z'|, (z', z) \in \widehat{abc}^2 \right\}$$

I.B.2)

a) Soient $z \in \mathbb{C}$ et $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Du fait que $\widehat{abc}$ soit un compact, $\max \left\{ |z' - z| / |z'|, z' \in \widehat{abc} \right\}$ existe et atteint en un point $w = \alpha a + \beta b + \gamma c$ de $\widehat{abc}$, où $(\alpha, \beta, \gamma) \in K$. Il est clair que

$$\max \left\{ |z' - z| / |z'|, z' \in \widehat{abc} \right\} \geq \max \{|z - a|, |z - b|, |z - c|\}$$

Réciproquement,

$$\begin{aligned}\max \left\{ |z' - z| / |z'|, z' \in \widehat{abc} \right\} &= |w - z| \\ &= |\alpha(a - z) + \beta(b - z) + \gamma(c - z)| \\ &\leq \alpha|a - z| + \beta|b - z| + \gamma|c - z| \\ &\leq (\alpha + \beta + \gamma) \max \{|z - a|, |z - b|, |z - c|\}\end{aligned}$$

d'où l'égalité.

b) En remarquant que $\delta(\widehat{abc}) = \max_{z \in \widehat{abc}} \max_{z' \in \widehat{abc}} |z' - z|$, alors par la question précédente, $\delta(\widehat{abc}) = \max_{z \in \widehat{abc}} \{|z - a|, |z - b|, |z - c|\}$.

Pour $z = \alpha a + \beta b + \gamma c \in \widehat{abc}$,

$$\begin{aligned}|z - a| &= |\alpha(a - a) + \beta(b - a) + \gamma(c - a)| \\ &\leq (\beta + \gamma) \max \{|b - a|, |c - a|\} \\ &\leq \max \{|b - a|, |c - a|\}\end{aligned}$$

De même pour $|z - b|$ et $|z - c|$. Donc une expression de $\delta(\widehat{abc})$ est $\delta(\widehat{abc}) = \max \{|b - a|, |c - a|, |b - c|\}$.

I.B.3) Soit $(r_n)_{n \geq 1}$ un élément de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$. Pour chaque entier naturel non nul n , on note $\tilde{\tau}_n = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \dots \circ \phi_{r_n}(\tau)$.

- Si $\Delta = \widehat{abc}$ est un triangle plein, alors pour tout $(z, z') \in \Delta^2$,

$$|\phi_0(z) - \phi_0(z')| = \frac{\sqrt{2}}{2} |z - z'|$$

ceci montre que $\delta(\phi_0(\Delta)) = \frac{\sqrt{2}}{2} \delta(\Delta)$ et, de la même façon, $\delta(\phi_1(\Delta)) = \frac{\sqrt{2}}{2} \delta(\Delta)$. En particulier,

$$\delta(\tilde{\tau}_n) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \delta(\tau) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

En particulier, l'intersection de tous les $\tilde{\tau}_n$ contient au plus un point.

- Nous avons déjà vu que $\phi_0(\tau) = \tau_0 \subset \tau$ et $\phi_1(\tau) = \tau_1 \subset \tau$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors, puisque $\phi_{r_{n+1}}(\tau) \subset \tau$

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{n+1} &= \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \cdots \circ \phi_{r_n} \circ \phi_{r_{n+1}}(\tau) \\ &= \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \cdots \circ \phi_{r_n}(\phi_{r_{n+1}}(\tau)) \\ &\subset \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \cdots \circ \phi_{r_n}(\tau) = \tilde{\tau}_n \end{aligned}$$

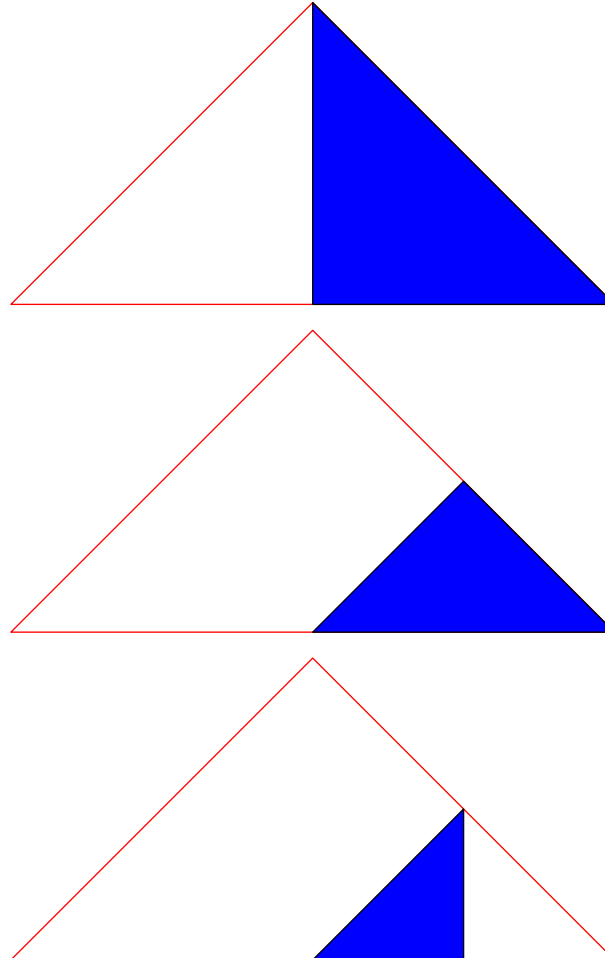
La suite $(\tilde{\tau}_n)_{n \geq 1}$ est décroissante au sens de l'inclusion.

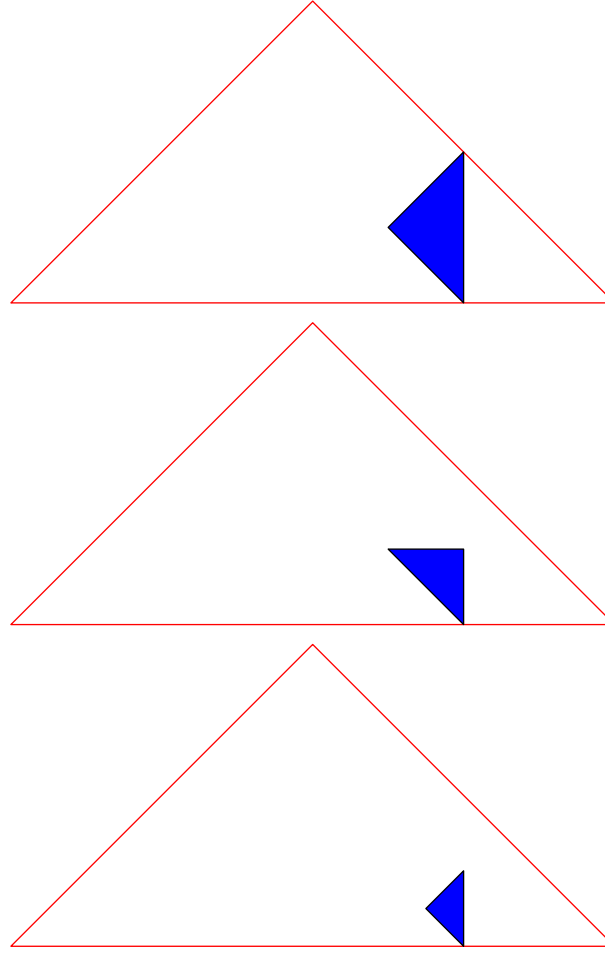
- Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \cdots \circ \phi_{r_n}(1)$. Alors, z_n est un élément de $\tilde{\tau}_n$ et pour tout $p \geq 0$, $z_{n+p} \subset \tilde{\tau}_n$ et donc

$$|z_{n+p} - z_n| \leq \delta(\tilde{\tau}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

La suite (z_n) d'éléments du compact τ est de Cauchy, elle est donc convergente vers un élément w de τ . D'un autre côté, pour tout $n \geq 1$, $\tilde{\tau}_n$ est compact et contient la sous-suite convergente $(z_{n+p})_{p \geq 0}$, donc sa limite w est dans $\tilde{\tau}_n$. Ceci montre que l'intersection de tous les $\tilde{\tau}_n$ contient le seul point w de τ .

Dans les schémas ci-dessous, on donne, dans l'ordre, les triangles pleins $\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_5$ tracés en bleu ainsi que le triangle τ pour lequel, on représente juste les cotés en rouge. On a choisi dans pour ces dessins, $r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = 0, r_4 = 1, r_5 = 0$ et $r_6 = 0$.





Partie II - Construction de l'application f

II- Dans la suite on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications g continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$ telles que $g(0) = -1$ et $g(1) = 1$. Si $g \in \mathcal{E}$, on note T_g l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$T_g(x) = \phi_0(g(2x)) \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ et } T_g(x) = \phi_1(g(2x-1)) \text{ si } x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$$

II.1) L'unique (puisque affine et $0 \mapsto -1$, $1 \mapsto 1$) fonction de $\mathcal{E}$ est f_0 définie par $f_0(x) = 2x - 1$.

II.2) Soit g un élément de $\mathcal{E}$. La fonction Tg est continue sur les deux intervalles $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ puisque g , ϕ_0 et ϕ_1 sont continues. En plus, par continuité de g et ϕ_1 ,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} Tg(x) = \phi_1(g(0)) = \phi_1(-1) = i = \phi_0(1) = Tg\left(\frac{1}{2}\right)$$

II.3) Soient g_1 et g_2 deux éléments de $\mathcal{E}$. Alors,

$$\begin{aligned} \|Tg_1 - Tg_2\|_{\infty} &= \max \left(\max_{x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} |Tg_1(x) - Tg_2(x)|, \max_{x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]} |Tg_1(x) - Tg_2(x)| \right) \\ &= \max \left(\max_{x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} |\phi_0(g_1(2x)) - \phi_0(g_2(2x))|, \max_{x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]} |\phi_1(g_1(2x-1)) - \phi_1(g_2(2x-1))| \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \max \left(\max_{x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} |g_1(2x) - g_2(2x)|, \max_{x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]} |g_1(2x-1) - g_2(2x-1)| \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \max \left(\max_{x \in [0, 1]} |g_1(x) - g_2(x)|, \max_{x \in [0, 1]} |g_1(x) - g_2(x)| \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \max (\|g_1 - g_2\|_{\infty}, \|g_1 - g_2\|_{\infty}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \|g_1 - g_2\|_{\infty} \end{aligned}$$

II.4) On définit maintenant une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{E}$ en choisissant f_0 affine comme ci-dessus et $f_{n+1} = Tf_n$ pour tout entier naturel n .

a) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty = \|Tf_n - Tf_{n-1}\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}} \|f_n - f_{n-1}\|_\infty = \dots = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \|f_1 - f_0\|_\infty$$

Donc pour tout $p \geq 1$,

$$\|f_{n+p} - f_n\|_\infty \leq \sum_{k=1}^p \|f_{n+k} - f_{n+k-1}\|_\infty \leq \|f_1 - f_0\|_\infty \sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+k-1} \leq M \|f_1 - f_0\|_\infty \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

où $M = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$. Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \|f_{n+p} - f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Cette dernière inégalité montre que la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ complet, donc convergente vers un certain $f(x)$ et que, lorsque p tend vers ∞

$$|f(x) - f_n(x)| \leq M \|f_1 - f_0\|_\infty \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

ce qui assure la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ vers la fonction f et montre ainsi que f est continue sur $[0, 1]$ puisque toutes les fonctions f_n le sont. D'un autre côté, pour tout n , $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$, donc $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$.

b) La sous-suite extraite $(f_{n+1} = Tf_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f et

$$\|Tf_n - Tf\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}} \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

donc $Tf = f$ par unicité de la limite..

c) Soit g une fonction de $\mathcal{E}$ vérifiant la propriété : $(*) : \forall x \in [0, 1], g(x) = -\overline{g(1-x)}$. Pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$, on a

$$\begin{aligned} Tg(1-x) &= \phi_1(g(2(1-x)-1)) \quad \text{car } 1-x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ &= \phi_1(g(1-2x)) \\ &= \phi_1(-\overline{g(2x)}) \\ &= \frac{1-i}{2}(-g(2x)) + \frac{1+i}{2} \end{aligned}$$

Donc $-\overline{Tg(1-x)} = \frac{1+i}{2}(\overline{g(2x)}) + \frac{-1-i}{2} = \phi_0(g(2x)) = Tg(x)$. Si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, alors $1-x \in [0, \frac{1}{2}]$ et

$$Tg(1-x) = -\overline{Tg(1-(1-x))} = -\overline{Tg(x)}$$

La nouvelle fonction Tg vérifie elle aussi la propriété $(*)$. Puisque (simple à vérifier) la fonction $f_0 : x \mapsto 2x-1$ vérifie $(*)$, toutes les fonctions de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ vérifient $(*)$. Par passage à la limite et par continuité de $z \mapsto \bar{z}$, f vérifie la propriété $(*)$. Donc pour construire la courbe paramétrée de la fonction f , il suffit de la construire sur le segment $[0, \frac{1}{2}]$ et appliquer la réflexion $z \mapsto -\bar{z}$ d'axe la droite passant par 0 et dirigée par i . La courbe est symétrique par rapport à cet axe.

Partie III - Propriétés de l'application f

III.A - Image de f .

III.A.1) Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un élément de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \frac{r_n}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

La série de terme général $\frac{1}{2^n}$ est convergente, donc celle de terme général $\frac{r_n}{2^n}$ est convergente et

$$0 \leq x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

b) Soit p un entier naturel non nul et posons $x_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{n+p}}{2^n}$. Pour $p = 1$,

$$x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{n+1}}{2^n} = 2x - r_1$$

On remarque que si $r_1 = 0$, alors $x \in [0, \frac{1}{2}]$ et si $r_1 = 1$, alors $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Dans tous les cas, on a :

$$\phi_{r_1}(f(x_1)) = \phi_{r_1}(f(2x - r_1)) = Tf(x) = f(x)$$

Pour p quelconque, on procède par récurrence sur p en remarquant que :

$$x_p = 2x_{p-1} - r_p$$

D'après le cas précédent, $\phi_{r_p}(f(x_p)) = f(x_{p-1})$. Alors, avec une récurrence sur p ,

$$\phi_{r_1} \circ \dots \circ \phi_{r_p}(f(x_p)) = \phi_{r_1} \circ \dots \circ \phi_{r_{p-1}}(f(x_{p-1})) = f(x)$$

III.A.2) Inversement, soit $x \in [0, 1[$.

a) Soit n un entier naturel non nul et rappelons que $r_n(x) = [2^n x] - 2[2^{n-1} x]$ et posons $p = [2^{n-1} x]$. Alors, $p \leq 2^{n-1} x < p+1$ et $[2^n x] = 2p$ ou $[2^n x] = 2p+1$. Donc $r_n(x) \in \{0, 1\}$.

b) Soit N un entier naturel non nul, alors $[x] = 0$ puisque $x \in [0, 1[$ et on a :

$$\sum_{n=1}^N \frac{r_n(x)}{2^n} = \sum_{n=1}^N \frac{[2^n x] - 2[2^{n-1} x]}{2^n} = \sum_{n=1}^N \frac{[2^n x]}{2^n} - \sum_{n=1}^N \frac{[2^{n-1} x]}{2^{n-1}} = \frac{[2^N x]}{2^N} - [x] = \frac{[2^N x]}{2^N}$$

D'un autre côté, on a

$$\frac{[2^N x]}{2^N} \leq x = \frac{2^N x}{2^N} \leq \frac{[2^N x] + 1}{2^N}$$

ce qui montre que la suite $\left(\frac{[2^N x]}{2^N}\right)_{N \geq 1}$ est convergente vers x ou encore $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)}{2^n} = x$.

c) On suppose que $x \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. Le résultat est évident pour $x = 0$ et $N = 0$ convient. Si $x \neq 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [1, 2^N - 1]$ tel que $x = \frac{k}{2^N}$. Pour $n > N$, on aura :

$$r_n(x) = [2^n x] - 2[2^{n-1} x] = [2^{n-N} k] - 2[2^{n-1-N} k] = 2^{n-N} k - 2^{n-N} k = 0$$

d) Pour $x = \frac{1}{2}$, on a $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)}{2^n}$ avec $r_n(x) = 0$ pour tout $n \geq 2$ et $r_1 = 1$. En particulier,

$$x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{n+1}(x)}{2^n} = 0$$

donc $f(x) = \phi_1(f(0)) = \phi_1(-1) = i$. Pour $x = \frac{1}{4}$, on a $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)}{2^n}$ avec $r_n(x) = 0$ pour tout $n \geq 3$, $r_1 = 0$ et $r_2 = 1$. En particulier,

$$x_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{n+2}(x)}{2^n} = 0$$

donc $f(x) = \phi_0 \circ \phi_1(f(0)) = \phi_0(\phi_1(-1)) = \phi_0(i) = 0$. La transformation ϕ_0 étant la composée d'une réflexion et d'une homothétie de rapport $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre -1 appartenant à l'axe de la réflexion. Alors, $\phi_0 \circ \phi_0$ est l'homothétie

de centre -1 et de rapport $k^2 = \frac{1}{2}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Les valeurs de $f\left(\frac{1}{2^k}\right)$ sont connues pour $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$. Supposons que $k \geq 3$. Pour $x = \frac{1}{2^k}$, on a $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)}{2^n}$ avec $r_n(x) = 0$ pour tout $n \neq k$ et $r_k = 1$. En particulier,

$$x_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{n+k}(x)}{2^n} = 0$$

donc $f(x) = \phi_{r_1} \circ \dots \circ \phi_{r_{k-1}} \circ \phi_{r_k}(f(0)) = \phi_0 \circ \dots \circ \phi_0 \circ \phi_1(-1) = \underbrace{\phi_0 \circ \dots \circ \phi_0}_{k-1 \text{ fois}}(i)$. La transformation $\phi_0 \circ \dots \circ \phi_0$ est

l'homothétie de centre -1 et de rapport $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{k-1}{2}}$ si k est impair et c'est la composée de ϕ_0 et de l'homothétie de centre -1 et de rapport $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{k-2}{2}}$ si k est pair. Donc, si k est impair,

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{k-1}{2}} (i+1) - 1$$

si k est pair, alors

$$f(x) = \underbrace{\phi_0 \circ \dots \circ \phi_0}_{k-2 \text{ fois}}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{k-2}{2}} - 1$$

III.A.3)

a) Soit $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. Si $x = 1$, alors $f(x) = 1 \in \tau$. Si $x \neq 1$, on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$x = \sum_{n=1}^N \frac{r_n}{2^n}, \quad \text{avec } r_n = r_n(x)$$

Donc $x_N = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{n+N}}{2^n} = 0$ et $f(x) = \phi_{r_1} \circ \dots \circ \phi_{r_N}(f(0)) = \phi_{r_1} \circ \dots \circ \phi_{r_N}(-1) \in \tilde{\tau}_N \subset \tau$ puisque $-1 \in \tau$.

b) Soit $x \in [0, 1]$, il existe (r_n) un élément de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ tel que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{2^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} y_N$, où $y_N = \sum_{n=1}^N \frac{r_n}{2^n}$. Puisque $y_N \in [0, 1] \cap \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ pour tout N , on a $f(y_N) \in \tau$ pour tout N . Par compacité de τ et continuité de f , on aura $f(x) \in \tau$.

III.A.4) Inversement, soit $z \in \tau$.

a) Le point $z_0 = z$ appartient à τ , les transformations ϕ_0 et ϕ_1 sont bijectives, $\tau = \tau_0 \cup \tau_1$, $\tau = \phi_0^{-1}(\tau_0)$ et $\tau = \phi_1^{-1}(\tau_1)$ sont des conditions suffisantes pour la définition de la suite $(z_n)_{n \geq 0}$. Ce qui donne en conséquence (ou par récurrence) que $z_n \in \tau$ pour tout n .

b) Par définition de la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ et de la suite $(r_n)_{n \geq 1}$, on a $z_n = \phi_{r_n}^{-1}(z_{n-1})$ ou encore $z_{n-1} = \phi_{r_n}(z_n)$ pour tout $n \geq 1$. Ceci donne $z = z_0 = \phi_{r_1} \circ \dots \circ \phi_{r_N}(z_N)$. Posons $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{2^n}$ et, pour tout $N \geq 1$, $y_N = \sum_{n=1}^N \frac{r_n}{2^n}$. D'après la question III.A.3) a), on a

$$f(y_N) = \phi_{r_1} \circ \dots \circ \phi_{r_N}(-1)$$

Par suite,

$$|z - f(y_N)| = |\phi_{r_1} \circ \dots \circ \phi_{r_N}(-1) - \phi_{r_1} \circ \dots \circ \phi_{r_N}(z_N)| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^N |z_N + 1| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^N \delta(\tau) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

ceci montre que $f(y_N)$ tend vers z mais tend aussi vers $f(x)$ par continuité de f . Alors, $f(x) = z$.

c) La fonction aura pour entrée un complexe z de τ et un réel $\varepsilon > 0$. Si on reprend les notations de la question précédente, alors y_N est une valeur approchée de x , antécédent de z . En plus,

$$0 \leq x - y_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{r_n}{2^n} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N}$$

On choisit N de sorte que $\frac{1}{2^N} \leq \varepsilon$. L'algorithme écrit en français est le suivant :

- * une variable y reçoit la valeur nulle ; $y := 0$
- * une variable w reçoit la valeur de z ; $w := z$
- * pour $n = 1$ à N faire
 - ** si $\Re(w) \leq 0$ (c-à-d $w \in \tau_0$) alors, $w := \phi_0^{-1}(w)$; (y ne change pas)
 - ** sinon (c-à-d $w \notin \tau_0$) alors, $w := \phi_1^{-1}(w)$; $y := y + \frac{1}{2^n}$

La valeur y ($= y_N$) est une valeur approchée de x à ε près.

III.A.5)

a) On a $f(\frac{1}{4}) = 0$, d'après ce qui précède. Donc $f(\frac{3}{4}) = -\overline{f(\frac{1}{4})} = 0 = f(\frac{1}{4})$. Donc f est non injective.

b) Supposons que h est une bijection continue de $[0, 1]$ sur τ . Soit $a = h(0)$ et b un point intérieur de τ avec $a \neq b$ et J le segment intersection de τ avec la droite passant par les points a et b . Posons $J = [c, d]$ et remarquons que $\tau \setminus [c, d]$ n'est pas connexe par arcs.

- * Soit g l'application de $[0, 1]$ dans lui-même définie par $g(s) = h^{-1}(sc + (1 - c)d)$. Montrons que g est continue. Soit (s_n) une suite d'éléments de $[0, 1]$ qui converge vers un certain s de $[0, 1]$. Posons, pour tout n , $t_n = g(s_n)$ et $t = g(s)$. On suppose que (t_n) ne converge pas vers t . Alors, il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(u_n = t_{\varphi(n)})$ extraite de (t_n) telle que $|u_n - t| \geq \varepsilon$ pour tout n . Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, (u_n) admet une sous-suite extraite $(v_n = t_{\psi(n)})$ qui converge vers un certain v . Alors, par continuité de h , $h(v_n) = cs_{\psi(n)} + d(1 - s_{\psi(n)})$ converge vers $h(v) = cs + d(1 - s) = h(t)$. Comme h est injective, on aura $v = t$. D'un autre côté, lorsque n tend vers ∞ , l'inégalité $|v_n - t| \geq \varepsilon$ donne $|v - t| \geq \varepsilon$, absurde. Donc (t_n) converge vers t et, par suite, g est continue.
- * Posons $I = g([0, 1]) = h^{-1}([c, d])$. Par continuité de g , I est un segment de $[0, 1]$. Posons $I = [u, v]$ et $H = [0, 1] \setminus I$. Si H est un intervalle, alors son image $\tau \setminus [c, d]$ par h serait connexe par arcs puisque h est continue. Donc H n'est pas intervalle et par suite, $0 < u < v < 1$. Mais, $a = h(0) \in [c, d]$, donc $0 \in h^{-1}([c, d]) = [u, v]$, absurde.

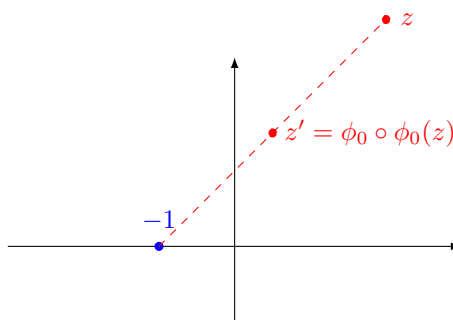
III.A.6)

a) Soit z un nombre complexe.

- * Pour $(i, j) = (0, 0)$, on a

$$\begin{aligned}\phi_0 \circ \phi_0(z) &= \frac{1+i}{2} \overline{\frac{1+i}{2} \bar{z} + \frac{-1+i}{2}} + \frac{-1+i}{2} \\ &= \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

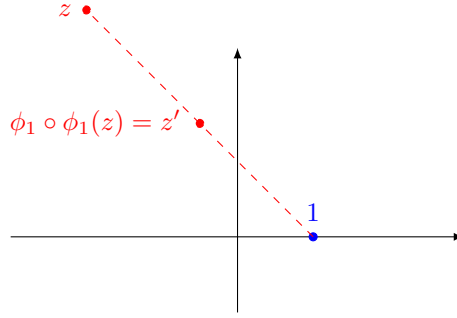
Alors, $\phi_0 \circ \phi_0$ est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre -1 .



- * Pour $(i, j) = (1, 1)$, on a

$$\begin{aligned}\phi_1 \circ \phi_1(z) &= \frac{1-i}{2} \overline{\frac{1-i}{2} \bar{z} + \frac{1+i}{2}} + \frac{1+i}{2} \\ &= \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

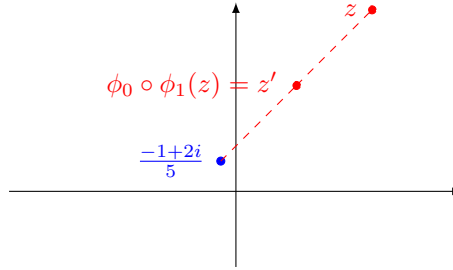
Alors, $\phi_1 \circ \phi_1$ est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre 1 .



* Pour $(i, j) = (0, 1)$, on a

$$\begin{aligned}\phi_0 \circ \phi_1(z) &= \frac{1+i}{2} \overline{\frac{1-i}{2} z} + \frac{1+i}{2} + \frac{-1+i}{2} \\ &= \frac{i}{2} z + \frac{i}{2}\end{aligned}$$

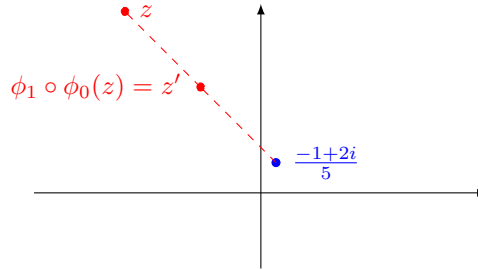
Alors, $\phi_0 \circ \phi_1$ est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre $\frac{-1+2i}{5}$.



* Pour $(i, j) = (1, 0)$, on a

$$\begin{aligned}\phi_1 \circ \phi_0(z) &= \frac{1-i}{2} \overline{\frac{1+i}{2} z} + \frac{-1+i}{2} + \frac{1+i}{2} \\ &= -\frac{i}{2} z + \frac{i}{2}\end{aligned}$$

Alors, $\phi_1 \circ \phi_0$ est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre $\frac{1+2i}{5}$.



b) Soient $r_1, \dots, r_p$ des éléments de $\{0, 1\}$ et $\phi = \phi_{r_1} \circ \dots \circ \phi_{r_p}$. Notons $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ l'élément de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ défini par, en notant k est le reste de la division euclidienne de n par p ,

$$s_n = \begin{cases} r_k & \text{si } k \neq 0 \\ r_p & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

et $\tilde{\tau}_n = \phi_{s_1} \circ \dots \circ \phi_{s_n}(\tau)$ et, enfin, w l'unique élément de $\bigcap_{n \geq 1} \tilde{\tau}_n$. Si z est un point fixe de ϕ , alors $\phi^n(z) = z$ pour tout $n \geq 1$. Par suite, z appartient à $\tilde{\tau}_{np}$ pour tout $n \geq 1$ et donc $z = w$. Ceci montre l'unicité d'un point fixe éventuel de ϕ . D'un autre côté, $\phi(w)$ appartient à $\tilde{\tau}_{n+p}$ pour tout $n \geq 1$, donc $\phi(w) = w$.

c) Notons $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie dans la question précédente et posons $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{2^n}$ et $x_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_{n+p}}{2^n}$. On sait que :

$$f(x) = \phi_{r_1} \circ \dots \circ \phi_{r_p}(f(x_p))$$

mais $x_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_{n+p}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{2^n} = x$. Alors, $f(x)$ est un point fixe de ϕ .

d) Soit X l'ensemble des complexes z qui sont point fixe de la composée d'un nombre fini d'applications ϕ_0 et ϕ_1 . D'après la question précédente, à tout élément z de X correspond une suite $(r_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $\{0, 1\}$ périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $r_n = r_{n+p}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, telle que $z = f(x)$ et

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{2^n} \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_{pn+k}}{2^{np+k}} \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_k}{2^{np+k}} \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{r_k}{2^k} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{np}} \\ &= \frac{2^p}{2^p - 1} \sum_{k=1}^p \frac{r_k}{2^k} \end{aligned}$$

Notons A la partie de $[0, 1]$ des éléments de la forme $\frac{2^p}{2^p - 1} \sum_{k=1}^p \frac{r_k}{2^k}$, où $p \in \mathbb{N}^*$ et $r_1, \dots, r_p$ des éléments de $\{0, 1\}$.

Tout x de $[0, 1]$ s'écrit $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{2^n} = \lim_{p \rightarrow \infty} y_p$, où $y_p = \sum_{n=1}^p \frac{r_n}{2^n}$. Alors, $x = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2^p}{2^p - 1} y_p$. Ceci montre que la partie A est dense dans $[0, 1]$ et, puisque f est continue, $X = f(A)$ est dense dans $\tau = f([0, 1])$.

III.B - Dérivabilité de f

III.B.1) Supposons que f soit dérivable sur $[0, 1]$.

Soient $x \in [0, 1]$, $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ deux suites d'éléments de $[0, 1]$, convergentes vers x et telles que $\alpha_n \leq x \leq \beta_n$ pour tout n . Posons $f(y) = f(x) + (y - x)f'(x) + \varepsilon(y)$, où $\varepsilon(y) \xrightarrow{y \rightarrow x} 0$. Alors,

$$\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x) + \frac{(\beta_n - x)\varepsilon(\beta_n) - (\alpha_n - x)\varepsilon(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$$

Notons $\gamma_n = \max(|\varepsilon(\beta_n)|, |\varepsilon(\alpha_n)|)$, on a $\gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et

$$\left| \frac{(\beta_n - x)\varepsilon(\beta_n) - (\alpha_n - x)\varepsilon(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \right| \leq \gamma_n$$

Donc $\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'(x)$.

III.B.2) Soit $x \in [0, 1]$.

a) Si $x \in [0, 1[$, on pose $\alpha_n = \sum_{k=1}^n \frac{r_k(x)}{2^k} = \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{2^k}$, où $r_k = r_k(x)$ et $r_k = 0$ pour $k > n$ et $\beta_n = \alpha_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$. Alors,

$$f(\alpha_n) = \phi_{r_1} \circ \dots \circ \phi_{r_n}(f(0)) = \phi_{r_1} \circ \dots \circ \phi_{r_n}(-1), \quad f(\beta_n) = \phi_{r_1} \circ \dots \circ \phi_{r_n}(f(y)) \text{ et } \beta_n - \alpha_n = \frac{1}{2^n}$$

où $y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$. Donc, si n est impair

$$\begin{aligned}
|f(\beta_n) - f(\alpha_n)| &= \left| \phi \left(f \left(\frac{1}{2^n} \right) \right) - \phi(-1) \right| \\
&= \left| f \left(\frac{1}{2^n} \right) - (-1) \right| \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \left| \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{n-1}{2}} (i+1) - 1 + 1 \right| \\
&= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \left| \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{n-1}{2}} \right| = 2^{-\frac{3}{4}(n-1)}
\end{aligned}$$

où $\phi = \phi_{r_1} \circ \dots \circ \phi_{r_n}$. De même, si n est pair, alors,

$$\begin{aligned}
|f(\beta_n) - f(\alpha_n)| &= \left| \phi \left(f \left(\frac{1}{2^n} \right) \right) - \phi(-1) \right| \\
&= \left| f \left(\frac{1}{2^n} \right) - (-1) \right| \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \left| \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{n-2}{2}} - 1 + 1 \right| \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \left| \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right| = 2^{-\frac{3n-2}{4}}
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\left| \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \right| = 2^n |f(\beta_n) - f(\alpha_n)| = \begin{cases} 2^{\frac{n+1}{4}} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 2^{\frac{n+2}{4}} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Donc $\left| \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \right|$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. D'après la question précédente, f est non dérivable en x .

b) Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ l'élément de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ tel que $r_n = 1$ pour tout n . Alors, $1 = \lim_{p \rightarrow \infty} \alpha_p$ avec $\alpha_p = \sum_{n=1}^p \frac{r_n}{2^n}$ et posons $\beta_p = 1$. Alors, les suites $(\alpha_p)_p$ et $(\beta_p)_p$ convergent vers 1 et $\alpha_p < \beta_p$ pour tout p . D'un autre coté, $f(\beta_p) = 1$ et

$$f(\alpha_p) = \phi_{r_1} \circ \dots \circ \phi_{r_n}(f(0)) = \phi_1^p(-1)$$

Comme 1 est un point fixe de ϕ_1 et $\beta_p - \alpha_p = 2^{-p}$, on aura

$$\left| \frac{f(\beta_p) - f(\alpha_p)}{\beta_p - \alpha_p} \right| = 2^p |\phi_1^p(1) - \phi_1^p(-1)| = 2^{1+\frac{p}{2}} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} +\infty$$

Ceci montre que f est non dérivable en 1.