

DEVOIR – BANQUE PT 2013 - MATHS C (S.E., FOURIER, EQU. DIFF, INTÉGRALES)

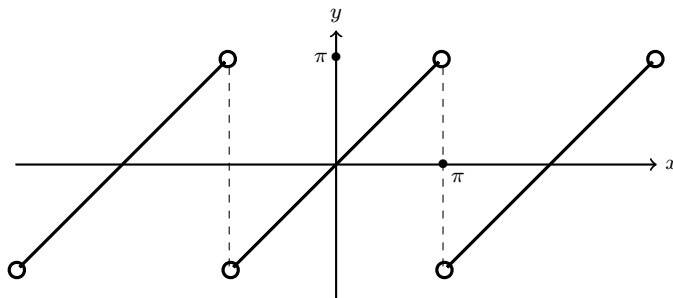
I Partie I

1) On considère la fonction h , impaire, 2π -périodique, dont la restriction à $[0, \pi[$ est donnée par

$$h(x) = x.$$

a) Donner les coefficients de Fourier, notés $a_n(h)$ ($n \geq 0$) et $b_n(h)$ ($n \geq 1$), de la fonction h .

Un petit tracé de la courbe ne fait pas de mal



La fonction étant impaire, pour tout $n \geq 0$, $a_n(h) = 0$.

Pour tout $n \geq 1$,

$$b_n(h) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt.$$

On intègre par partie de la façon suivante

$$\begin{array}{ccc} t & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \sin(nt) & \xleftarrow{\quad} & -\frac{\cos(nt)}{n}, \end{array}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} b_n(h) &= \frac{2}{\pi} \left(\left[-\frac{t \cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nt) dt \right) \\ &= \dots = \boxed{(-1)^{n+1} \frac{2}{n}}. \end{aligned}$$

b) Rappeler le théorème de Dirichlet.

La série de Fourier d'une fonction, ici h , 2π -**périodique**, $\mathcal{C}^1$ **par morceaux** converge, plus précisément, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(t+h) + f(t-h)}{2} \right).$$

c) En déduire la convergence de la série de Fourier de h , et son expression, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction h est bien 2π -**périodique** et $\mathcal{C}^1$ **par morceaux**. En tout point de continuité de h , c'est-à-dire pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$,

$$h(t) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nt)}{n}.$$

h est discontinue pour $t = \pi$ (2π), on a alors

$$2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nt)}{n} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(n\pi)}{n} = \frac{\pi - \pi}{2} = 0$$

ce qui est évident.

d) Montrer que, pour tout réel x de $[0, \pi[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{x}{2}.$$

On a pour tout $x \in [0, \pi[$,

$$h(x) = x = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n}$$

d'où le résultat (bien sûr $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$).

e) En déduire que

$$\pi = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Prenons $x = \frac{\pi}{2}$. On remarque que $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ (-1)^p & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$, d'où

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} &= \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{2p} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2) Soit n un entier naturel non nul. On pose

$$J_n = \int_0^{\pi} \sin^{2n} t dt.$$

a) Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t dt.$$

On effectue le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$, on obtient directement le résultat sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

b) Montrer que

$$J_n = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t dt.$$

Ecrivons

$$J_n = \int_0^{\pi} \sin^{2n} t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n} t dt.$$

Le changement de variable $x = t - \frac{\pi}{2}$ sur la deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n} t dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx \text{ car } \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x. \end{aligned}$$

Il vient en utilisant I.2.a,

$$J_n = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t dt}_{\text{d'après I.2.a.}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t dt.$$

c) Rappeler les formules d'Euler, relatives à l'exponentielle complexe.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos x &= \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \end{aligned}$$

d) Rappeler la formule du binôme de Newton.

Pour tous complexes a et b , on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

e) Calculer, pour tout entier relatif k , $\int_0^\pi e^{ikt} dt$.

1^{er} cas $k \neq 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{ikt} dt &= \left[\frac{e^{ikt}}{ik} \right]_0^\pi = \frac{(-1)^k - 1}{ik} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ \frac{2i}{k} & \text{si } k \text{ impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

2^e cas $k = 0$.

$$\int_0^\pi e^{ikt} dt = \pi.$$

f) A l'aide du binôme de Newton, exprimer, pour tout réel t , $\cos^{2n} t$ en fonction d'exponentielles complexes.

On écrit

$$\begin{aligned} \cos^{2n} t &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^{2n} \\ &= \frac{1}{4^n} \left(\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{ikt} e^{-i(2n-k)t} \right) \\ &= \frac{1}{4^n} \left(\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{i2(k-n)t} \right). \end{aligned}$$

g) Que vaut $\int_0^\pi \cos^{2n} t dt$?

Utilisons la formule précédente.

$$\int_0^\pi \cos^{2n} t dt = \frac{1}{4^n} \left(\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_0^\pi e^{i2(k-n)t} dt \right)$$

Pour $n \neq k$, $\int_0^\pi e^{i2(k-n)t} dt = 0$ d'après I.2.e.

donc (il ne reste plus que le terme correspondant à $k = n$)

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos^{2n} t dt &= \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \int_0^\pi dt \\ &= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \pi. \end{aligned}$$

h) En déduire

$$J_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!} \pi.$$

En regroupant les entiers pairs au numérateur

$$2n \times (2n-2) \times \cdots \times 2 = 2^n n!$$

Il vient

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^\pi \cos^{2n} t dt \text{ (même manipulation que pour } \sin) \\ &= \frac{2n(2n-1)(2n-2) \times \cdots \times 2 \times 1}{(2^n n!)^2} \pi \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!} \pi. \end{aligned}$$

II Partie II

On considère les fonctions Φ et Ψ respectivement définies par

$$\Phi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \sin t}{t} dt \text{ et } \Psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \cos t}{x} dt.$$

1) Montrer que pour tout réel t strictement positif $\frac{|\sin t|}{t} \leq 1$.

On peut utiliser l'inégalité des accroissements finis ou ce qui revient à peu près au même écrire

$$|\sin t| = \left| \int_0^t \cos u \, du \right| \leq \int_0^t |\cos u| \, du \leq \int_0^t 1 \, du = t \text{ car } t > 0,$$

d'où le résultat.

2) Montrer que Φ et Ψ sont bien définies sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Définition de Φ .

Soit $x > 0$ fixé. La fonction

$$\begin{cases}]0, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \frac{e^{-xt} \sin t}{t} \end{cases}$$

est continue sur $]0, +\infty[$.

Au voisinage de 0, on a $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-xt} \sin t}{t} = 1$ donc la fonction précédente est prolongeable par continuité en 0.

Étudions la fonction au voisinage de $+\infty$. On a pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$\left| \frac{e^{-xt} \sin t}{t} \right| \leq e^{-xt} \text{ d'après II.1.}$$

On sait que pour $x > 0$, $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'où la convergence de l'intégrale définissant $\Phi(x)$.

Définition de Ψ .

Soit $x > 0$. La fonction

$$\begin{cases}]0, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \frac{e^{-xt} \cos t}{x} \end{cases}$$

est continue sur $]0, +\infty[$. De plus pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$\left| \frac{e^{-xt} \cos t}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \times e^{-xt} \text{ d'après II.1.}$$

On sait que pour $x > 0$, $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'où la convergence de l'intégrale définissant $\Psi(x)$.

3) Soit a un réel strictement positif. Étudier la continuité et la dérivabilité de Φ et Ψ sur $[a, +\infty[$.

Continuité et dérivabilité de Φ .

Pour simplifier la rédaction, posons

$$\varphi : \begin{cases} [a, +\infty[\times]0, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto \frac{e^{-xt} \sin t}{t} \end{cases}$$

- à $x \geq a$ fixé, $t \mapsto \varphi(x, t)$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après II.3.
- à $t > 0$ fixé, $x \mapsto \varphi(x, t)$ est continue sur $[a, +\infty[$.
- Pour tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$,

$$|\varphi(x, t)| \leq e^{-xt} \leq e^{-at}$$

Or $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, l'hypothèse de domination est satisfaite.

D'après le théorème de continuité pour les intégrales à paramètre, on conclut que Φ est continue sur $[a, +\infty[$.

Montrons maintenant que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ (ce qui rend inutile ce qui précède $\mathcal{C}^1 \subset \mathcal{C}^0$).

On applique le théorème de dérivation pour les intégrales à paramètre où les hypothèses suivantes sont vérifiées

- à $x \geq a$ fixé, $t \mapsto \varphi(x, t)$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après II.3.
- à $t > 0$ fixé, $x \mapsto \varphi(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et on a pour tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt} \sin t$$

Donc

- à $x \geq a$ fixé, $t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)$ est continue (et intégrable voir ci-après) sur $]0, +\infty[$

• **Hypothèse de domination**

Pour tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-xt} \leq e^{-at}$$

Or $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, l'hypothèse de domination est satisfaite.

Continuité et dérivabilité de Ψ .

On va accélérer un peu et montrer directement que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$.

On peut écrire pour $x \in]0, +\infty[$,

$$\Psi(x) = \frac{1}{x} \times \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos t dt$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos t dt$ a été vue maintes fois et est calculable soit avec l'exponentielle complexe soit par double intégration par parties, mais il semblerait (pas sûr) que l'auteur du sujet ne veut effectuer ce calcul qu'à la question II.6.

Jouons le jeu d'appliquer le théorème de dérivation sur l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos t dt$.

Sans reprendre tout ce qui précède, on pose $\psi(x, t) = e^{-xt} \cos t$ et vérifions l'hypothèse de domination (toutes les autres hypothèses étant vérifiées de manière immédiate)

On a pour tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t) \right| = |-te^{-xt} \cos t| \leq te^{-xt} \leq te^{-at}$$

or $t \mapsto te^{-at}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car la fonction est prolongeable par continuité en 0 et $te^{-at} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$.

4) Pour tout réel $x > 0$, comparer $\Phi'(x)$ et $\Psi(x)$.

INDICATION on pensera à remarquer que $\Psi(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X \frac{e^{-xt} \cos t}{x} dt$ afin de pouvoir intégrer par parties).

On a pour tout $x > 0$ (puis que l'on peut faire varier le réel $a > 0$),

$$\Phi'(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t dt.$$

Soit $X > 0$, effectuons une intégration par partie sur $\int_0^X \frac{e^{-xt} \cos t}{x} dt$,

$$\begin{array}{ccc} \frac{e^{-xt}}{x} & \xrightarrow{\quad} & -e^{-xt} \\ \cos t & \xleftarrow{\quad} & \sin t, \end{array}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_0^X \frac{e^{-xt} \cos t}{x} dt &= \left[\frac{e^{-xt} \sin t}{x} \right]_0^X + \int_0^X e^{-xt} \sin t dt \\ &= \frac{e^{-xX} \sin X}{x} + \int_0^X e^{-xt} \sin t dt. \end{aligned}$$

A $x > 0$ fixé, on fait tendre X vers $+\infty$, sachant que

$$\left| \frac{e^{-xX} \sin X}{x} \right| \leq \frac{e^{-xX}}{x} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0,$$

pour obtenir

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \cos t}{x} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t dt = -\Phi'(x)$$

CONCLUSION $\boxed{\Psi(x) = -\Phi'(x)}$

5) Montrer que pour tout réel strictement positif x ,

$$\Phi'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

Calculons, si ce n'était déjà fait à la question II.3. $\Psi(x)$.

J'opte pour l'exponentielle complexe, plus rapide à rédiger.

Soit $x > 0$.

$$\Psi(x) = \frac{1}{x} \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X e^{-xt} \cos t dt.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_0^X e^{-xt} \cos t dt &= \operatorname{Re} \left(\int_0^X e^{(i-x)t} dt \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x} \right]_0^X \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{-x-i}{1+x^2} \left(\underbrace{e^{(i-x)X}}_{\rightarrow 0} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

Comme $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^{(i-x)X} = 0$ car $|e^{(i-x)X}| = e^{-xX}$, il vient

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \frac{1}{x} \lim_{X \rightarrow +\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{x+i}{1+x^2} \right) \\ &= \frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Nous avons vu à la question précédente que $\Phi'(x) = -\Psi(x)$, d'où le résultat.

6) Montrer que Φ a une limite nulle lorsque x tend vers $+\infty$.

Nous pouvons facilement majorer $\Phi(x)$. En effet pour tout $x > 0$,

$$|\Phi(x)| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{e^{-xt} \sin t}{t} \right| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

CONCLUSION $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0.}$

7) Dédire des questions précédentes l'expression $\Phi(x)$ pour tout réel strictement positif x .

Soit a, x deux réels positifs, nous pouvons écrire

$$\Phi(x) - \Phi(a) = \int_a^x \Phi'(u) du = - \int_a^x \frac{du}{1+u^2} = \arctan(a) - \arctan(x).$$

Faisons tendre a vers $+\infty$, il vient

$$\boxed{\Phi(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).}$$

8) On admet que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-xt} \sin t}{t} dt.$$

Que vaut $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$?

D'une part

$$\int_0^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-xt} \sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt,$$

d'autre part

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \sin t}{t} dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \Phi(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x) \right) = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

CONCLUSION $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.}$

III Partie III

Soit $c \in [0, 1[$. On pose

$$I(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 t}}.$$

1) Montrer que $I(c)$ est bien définie.

Rappel $c \in [0, 1[$.

La fonction $\begin{cases} [0, \frac{\pi}{2}] & \rightarrow \\ t & \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 t}} \end{cases}$ est bien définie et continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$ car $0 \leq c^2 \sin^2 t \leq c^2 < 1$.

Ainsi l'intégrale converge en tant que simple intégrale sur un segment.

2) On considère la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

- a) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f .

f est définie sur $] -1, 1[$.

- b) Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.

Par composition de fonctions dérivables (en particulier $x \mapsto \sqrt{x}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$), f est dérivable sur $] -1, 1[$ (l'expression sous la racine carrée ne s'annule pas).

- c) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathcal{D}_f$ (on ne calculera pas ici ce développement en série entière).

On peut écrire pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$f(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

On sait que la fonction $u \mapsto (1 + u)^\alpha$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$, donc en posant $u = -x^2$, la fonction f est également développable en série entière sur $] -1, 1[$ ($x \in] -1, 1[\Rightarrow u = -x^2 \in] -1, 1[$).

- d) Montrer que f est solution sur $\mathcal{D}_f$ de l'équation différentielle

$$(1 - x^2) f'(x) - x f(x) = 0 \quad (\mathcal{E}_f)$$

Calculons. Soit $x \in] -1, 1[$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= -\frac{1}{2} \times (-2x) \times (1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= x (1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

donc

$$(1 - x^2) f'(x) = x (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = x f(x).$$

- e) On recherche le développement en série entière de f sur $\mathcal{D}_f$ sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$$

- i. Donner pour tout entier naturel non nul n , une relation de récurrence entre α_{n+1} et α_{n-1} .

L'énoncé suggère fortement d'utiliser l'équation différentielle précédente même si cela ne semble pas nécessaire car on connaît les coefficients du développement en série entière de $u \mapsto (1 + u)^\alpha$...

Par ailleurs, la fonction f étant paire, on aurait s'économiser les termes impairs...

Écrivons pour $x \in] -1, 1[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{n-1} x^{n-1} \\ f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \alpha_{n+1} x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) \alpha_{n-1} x^{n-2}. \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} (1 - x^2) f'(x) - x f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \alpha_{n+1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) \alpha_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{n-1} x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} ((n+1) \alpha_{n+1} - n \alpha_{n-1}) x^n + \alpha_1 + 2\alpha_2 x - \alpha_0 x \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1) \alpha_{n+1} - n \alpha_{n-1}) x^n + \alpha_1. \end{aligned}$$

Cette fonction série entière est nulle sur $] -1, 1[$ si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Il vient, $\boxed{\alpha_1 = 0 \text{ et pour tout } n \geq 1, \alpha_{n+1} = \frac{n}{n+1} \alpha_{n-1}}.$

- ii. Pour tout entier naturel p , exprimer α_{2p} et α_{2p+1} en fonction de p .

Puisque $\alpha_1 = 0$, par une récurrence immédiate, $\alpha_{2p+1} = 0$.

Ensuite,

$$\begin{aligned}\alpha_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times \alpha_0 \\ &= \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \alpha_0\end{aligned}$$

en rajoutant les entiers pairs en haut et en bas.

Comme $\alpha_0 = f(0) = 1$, il vient

$$\alpha_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}$$

iii. Donner le développement en série entière de f .

Ainsi, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} x^{2p}.$$

3) On suppose que

$$I(c) = \sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_{2p} c^{2p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}(t) dt.$$

En utilisant les résultats du I., en déduire l'expression de $I(c)$ sous la forme

$$I(c) = \pi S$$

où S désigne la somme d'une série où les termes $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}(t) dt$, $p \in \mathbb{N}$ n'apparaissent plus.

D'après la partie I., on a

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}(t) dt &= \frac{1}{2} J_p \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2p-1)}{2^p p!} \pi \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\end{aligned}$$

D'où pour $p \geq 0$,

$$\alpha_{2p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}(t) dt = \frac{((2p)!)^2}{(2^p p!)^4} \frac{\pi}{2}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}I(c) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_{2p} c^{2p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}(t) dt \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{((2p)!)^2}{(2^p p!)^4} c^{2p}.\end{aligned}$$

Passionnant, non ?

Dans ce problème, on présente diverses méthodes de calcul du nombre transcendant π . Dans la première partie, on retrouve les intégrales de Wallis, que l'on calcule sans utiliser de relation de récurrence. Dans la seconde partie, on fait apparaître l'intégrale de Dirichlet, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, qui donne le calcul de l'intégrale de la fonction sinus cardinal $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ sur la demi-droite des réels positifs. Les relations permettant d'exprimer π en fonction de la somme d'une série permettent son calcul approché. La série de la partie III permet un calcul approché avec une convergence quadratique, donc plus puissante.