

MATHEMATIQUES I  
(4 pages dactylographiées)



PREAMBULE

Dans tout le problème, J désigne un intervalle inclus dans [-1, 1], de longueur non nulle et tel que, pour tout  $x \in J$ , on ait aussi  $x^2 \in J$ . On étudie l'ensemble  $E_J$  des applications dérivables de J dans  $\mathbb{R}$ , telles que :

$$\forall x \in J, f'(x) = f(x^2)$$

I. QUESTIONS PRELIMINAIRES

I.1. Soit g une application n fois dérivable d'un intervalle borné ]a, b[ dans  $\mathbb{R}$  (a < b), telle que, pour tout entier k vérifiant  $0 \leq k \leq n$ ,  $g^{(k)}$  ait en a une limite  $\lambda_k$ . Etablir que, si l'on pose  $g(a) = \lambda_0$ , la fonction g ainsi prolongée est n fois dérivable sur ]a, b[ avec :

$$g^{(k)}(a) = \lambda_k \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

(N.B. les  $g^{(k)}(a)$ , pour  $k \neq 0$ , désignent naturellement des dérivées à droite, et la notation  $g^{(a)}$  désigne g).

I.2. Etant donné un entier  $n > 0$ , établir le théorème  $(T_n)$  : "Soit u une application n fois dérivable d'un intervalle A dans  $\mathbb{R}$ , soit v une application n fois dérivable d'un intervalle B dans  $\mathbb{R}$ , avec  $v(B) \subset A$ . Alors  $w = u \circ v$  est n fois dérivable dans B. Si de plus il existe  $c \in B$  tel que, pour tout entier k compris au sens large entre 1 et n,  $u^{(k)}(v(c)) = 0$ , on a aussi, pour les mêmes valeurs de k,  $w^{(k)}(c) = 0$ ". On aura intérêt,  $(T_{n-1})$  étant supposé établi, à l'appliquer à  $u' \circ v$  pour démontrer  $(T_n)$ .

I.3. Soit J un intervalle satisfaisant aux hypothèses du préambule, et f un élément de  $E_J$ . Montrer que f est indéfiniment dérivable dans J.

I.4. Soit g une application dérivable d'un intervalle borné ]a, b[ dans  $\mathbb{R}$  (a < b). Etablir que, si g et g' sont toutes deux majorées (ou toutes deux minorées) sur ]a, b[, g admet en a une limite finie.

II ETUDE DE  $E_{[-1, 1]}$

II.1. On suppose dans cette question qu'il existe une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels vérifiant les conditions suivantes :

- i)  $a_0 = 1$ .
- ii) le rayon de convergence R de la série  $\sum a_n x^n$  est non nul.
- iii) l'application de  $J = ]-R, R[ \cap [-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  qui à x associe  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  appartient à  $E_J$ .

a) On définit une suite d'entiers  $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$  par  $q_0 = 0$  et, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $q_{k+1} = 2q_k + 1$ . Expliciter  $q_k$ .

b) Soit (Q) l'ensemble des  $q_k$ , où k décrit  $\mathbb{N}$ . Montrer que, si  $n \in (Q)$ ,  $a_n$  est nul et que de plus :

$$a_{q_1} = \frac{1}{q_1}, a_{q_2} = \frac{1}{q_1 q_2}, \dots, a_{q_k} = \frac{1}{q_1 q_2 \dots q_k}$$

II.2. La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est celle que l'on vient de déterminer au II.1 b).

a) Trouver la nature des séries  $\sum a_n$  et  $\sum n a_n$ , et le rayon de convergence de la série  $\sum a_n x^n$ .

b) Pour tout  $x \in [-1, 1]$ , on pose :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Établir :

$$\forall x \in ]-1, 1[, S'(x) = S(x^2)$$

c) Démontrer l'inégalité :

$$\forall x \in [0, 1], S(1) - S(x) \leq (1-x) \left( \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \right)$$

Établir que S est continue (à gauche) et dérivable (à gauche) en 1, et que  $S \in E[-1, 1]$ .

d) Donner une majoration, que l'on justifiera, de  $|S(x) - \sum_{n=0}^{15} a_n x^n|$  qui soit

valable sur tout le segment  $[-1, 1]$ . En déduire la valeur décimale approchée à 0,001 près par défaut de S(1).

e) Représenter dans un repère orthonormé l'allure de la courbe  $y = S(x)$  ; on précisera la concavité.

f) Établir la formule :

$$\int_0^1 S(x) dx = \frac{2}{3} S(1)$$

II.3 Soit h un réel tel que  $0 < h \leq 1$ ,  $J = [0, h]$  et f une application de J dans  $\mathbb{R}$ .

a) On suppose que  $f \in E_J$  et que  $f(0) = 0$  ; on pose  $M = \sup_{t \in J} |f(t)|$ .

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in J, |f(x)| \leq M x^{2n}$$

Qu'en conclure ?

b) On suppose  $f \in E_J$ , f(0) étant quelconque.

Quel lien existe-t-il entre f et la restriction de S à  $E_J$  ?

II.4 Soit a et b tels que  $-1 \leq a \leq 0 < b \leq 1$  avec  $a^2 \leq b$  (on indiquera la signification de cette dernière condition), et  $J = [a, b]$  ; déterminer  $E_J$ .

### III ETUDE DE $E ]0, 1[$

Dans toute la suite le symbole J désigne l'intervalle ouvert  $]0, 1[$

III.1. Soit  $f \in E_J$

a) Soit  $p \in J$  ; on pose  $p_0 = p$  et,  $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = \sqrt{p_n}$ .

Établir que la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement monotone et donner sa limite.

On pose :

$$M_n = \sup_{x \in [p_n, p_{n+1}]} |f(x)|$$

À l'aide de la relation  $f(x) = f(p_n) + \int_{p_n}^x f'(t) dt$ , démontrer

l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, M_n \leq M_{n-1} (1 + p_{n+1} - p_n)$$

En déduire que la suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

b) Établir que, pour tout  $a \in J$ , f et f' sont bornées sur  $[a, 1[$ . Montrer que f a une limite  $\lambda$  en 1, et que, si l'on pose  $f(1) = \lambda$ , la fonction ainsi prolongée appartient à  $E_{]0, 1]}$ .

III.2.a) Soit  $f \in E_J$  ; on suppose qu'il existe  $\beta \in J$  tel que f soit majorée dans  $]0, \beta]$ . Établir que f et f' ont en 0 une même limite finie L et qu'en prolongeant f par continuité en 0, on obtient un élément de  $E_{]0, 1]}$ .

b) En déduire que si  $f \in E_J$  et si f n'est pas le produit de la restriction de S à J par une constante, alors, pour tout  $\varepsilon \in J$ , on a les propriétés suivantes :

- . f n'est ni majorée ni minorée sur  $]0, \varepsilon]$
- . f s'annule en une infinité de points de  $]0, \varepsilon]$ .

La suite de cette partie III est consacrée à la fabrication et à l'étude d'un élément de  $E_J$  qui ne soit pas le produit par une constante de la restriction de S à J.

III.3. On définit une application  $\theta$  de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$\theta(-1) = \theta(1) = 0$$

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \theta(x) = e^{\omega(x)}, \quad \text{où} \quad \omega(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$$

a) Pour  $x \in ]-1, 1[$ , calculer  $\theta'(x)$  et  $\theta''(x)$  et étudier leur signe.

b) Montrer que, pour tout entier  $n > 0$  et pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $\theta^{(n)}(x)$  existe et est de la forme  $\theta(x) F_n(x)$ , où  $F_n$  est une fraction rationnelle ; trouver la limite de  $\theta^{(n)}(x)$  quand  $x$  tend vers 1 ou -1. En déduire que  $\theta$  est indéfiniment dérivable sur  $[-1, 1]$  et donner  $\theta^{(n)}(1)$  et  $\theta^{(n)}(-1)$ .

c) Donner l'allure de la représentation graphique de  $\theta$  dans un repère orthonormé.

III.4 On pose  $r_0 = \frac{1}{4}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $r_{n+1} = \sqrt{r_n}$ .

a) Montrer que ceci définit  $r_n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , et expliciter  $r_n$ .

b) On pose  $I_n = [r_n, r_{n+1}]$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Quelle est la réunion de tous les  $I_n$  ?

III.5. On définit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une application  $\varphi_n$  de  $I_n$  dans  $\mathbb{R}$  en posant :

$$\forall x \in I_0, \quad \varphi_0(x) = \theta(8x - 3)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in I_n, \quad \varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(r_n) + \int_{r_n}^x \varphi_{n-1}(t^2) dt$$

Montrer que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_n$  admet dans  $I_n$  une dérivée continue, et que

$$\varphi'_n(r_{n+1}) = \varphi'_n(r_n).$$

Comparer pour  $n \in \mathbb{N}^*$  la dérivée à gauche de  $\varphi_{n-1}$  en  $r_n$  et la dérivée à droite de  $\varphi_n$  en ce même point.

III.6. On définit maintenant, pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , une application  $\varphi_{-m}$  de  $I_{-m}$  dans  $\mathbb{R}$  en posant :

$$\forall x \in I_{-m}, \quad \varphi_{-m}(x) = \varphi'_{-m+1}(\sqrt{x})$$

Etablir que, pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\varphi_{-m}$  est indéfiniment dérivable dans  $I_{-m}$ , et que  $\varphi_{-m}$  et toutes ses dérivées s'annulent aux deux bornes de  $I_{-m}$ .

III.7. Démontrer qu'il existe une application  $\Psi$  de  $J$  dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in I_n, \quad \Psi(x) = \varphi_n(x).$$

Montrer que cette fonction appartient à  $E_J$ .

III.8. a) Donner le sens de variation de  $\Psi$  et celui de  $\Psi'$  sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  ; étudier le signe et le sens de variation de  $\Psi$  sur  $[1/16, 1/4]$ .

b) Donner sommairement l'allure de la représentation graphique de la restriction de  $\Psi$  à  $[1/16, 1/4]$ .

c) Donner une minoration du nombre de zéros de  $\Psi$  dans  $]r_n, r_{n+1}[$ , pour  $n < 0$ .

III.9. Quelle est la nature de  $\int_0^1 \Psi(x) dx$  ?