

## Centrale 2008. Filière MP. Mathématiques 1.

*Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)*

### **Partie I. Quelques résultats généraux.**

#### **Question I.A.**

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire (homogène) du second ordre normalisée sur  $\mathbb{R}$  dont les coefficients sont continus sur  $\mathbb{R}$  donc tout problème de Cauchy admet une unique solution définie sur  $\mathbb{R}$ .

Soit une solution  $f$  s'annulant en 0. Envisageons la fonction  $g$  définie par  $g(x) = -f(-x)$ . Il vient  $g'(x) = f'(-x)$  et  $g''(x) = -f''(-x)$  donc, puisque  $q$  est paire,  $g$  est également solution de  $(E_\lambda)$ .

Or  $(f(0), f'(0)) = (0, f'(0)) = (0, g'(0)) = (g(0), g'(0))$

Ainsi  $f$  et  $g$  sont solution du même problème de Cauchy donc  $f = g$  ce qui prouve que  $f$  est impaire.

Réciproquement toute fonction impaire est nulle en 0.

En conclusion une solution de  $(E_\lambda)$  est impaire si et seulement si elle s'annule en 0.  $\square$

2. Les solutions de  $(E_\lambda)$  forment un espace vectoriel de dimension 2.

Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux solutions impaires. Alors  $W(f_1, f_2)(0) = 0$  car la première ligne de ce déterminant est nulle. Donc  $(f_1, f_2)$  n'est pas un système fondamental de solutions.

De même avec deux solutions paires car alors leur dérivée sont impaires et le wronskien s'annule encore en 0 car sa deuxième ligne est nulle.

Ainsi  $(E_\lambda)$  ne peut admettre une base de solutions de même parité.  $\square$

Si  $\lambda$  est valeur propre de  $Q$  alors le sous-espace propre associé n'est autre que l'ensemble des solutions  $2\pi$ -périodiques et impaires de  $(E_\lambda)$ . C'est donc un sous-espace des solutions de  $(E_\lambda)$ . Il est donc de dimension 1 ou 2 (0 exclu car  $\lambda$  valeur propre). S'il était de dimension 2, il serait égal à l'espace des solutions qui admettrait donc un système fondamental de solutions impaires ce qui est exclu comme on vient de le voir.

Ainsi tout sous-espace propre de  $Q$  est de dimension 1.  $\square$

#### **Question I.B.**

1.  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  si et seulement si l'équation  $y'' + (\lambda - a)y = 0$  admet une solution non nulle, impaire et  $2\pi$ -périodique. Donc si et seulement si  $\lambda = a + p^2$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$ . Le sous-espace propre associé est alors la droite dirigée par  $x \mapsto \sin(px)$ .  $\square$

Idem pour  $B$  avec  $b$  en place de  $a$ .

2. On a :  $a \leq q(x) \leq b$  pour tout réel  $x$  donc  $af^2(x) - f(x)f''(x) \leq q(x)f^2(x) - f(x)f''(x) \leq bf^2(x) - f(x)f''(x)$  donc  $(f|A(f)) \leq (f|Q(f)) \leq (f|B(f))$  pour tout  $f \in E_2$  par positivité de l'intégration.  $\square$

### **Partie II. Problème approché de dimension finie.**

#### **Question II.A.**

1.  $\Pi_n$  existe bien car  $V_n$  est de dimension finie (l'orthogonal d'un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien est un supplémentaire de ce sous-espace).

Si  $f$  appartient à  $E$  (ce que l'on suppose ici car l'énoncé omet de le préciser),  $\Pi_n(f)$  est la somme partielle de la série de Fourier de  $f$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\Pi_n(f)\|_2 = \|f\|_2$  (Parseval) et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - \Pi_n(f)\|_2 = 0$  (convergence quadratique).

2.  $\Pi_n$  est autoadjoint en tant que projecteur orthogonal.  $\square$

3. Soient désormais  $f$  et  $g$  dans  $E_2$ . Pour prouver que  $(f|Q(g)) = (Q(f)|g)$  il suffit de prouver que  $(f|g'') = (f''|g)$ .

Or  $(f|g'') = -(f'|g')$  par parties (bien licite) car  $f(0) = 0$  du fait que  $f$  est impaire.

D'où le résultat par symétrie des rôles :  $(f|Q(g)) = (Q(f)|g) \quad \forall (f, g) \in E_2^2 \quad \square$

On suppose maintenant que  $f$  et  $g$  sont dans  $V_n$  (donc a fortiori dans  $E$ ). Il vient (question 2.) :

$(f|Q_n(g)) = (f|\Pi_n(Q(g))) = (\Pi_n(f)|Q(g)) = (f|Q(g))$  car  $\Pi_n(f) = f$ .

De même  $(Q_n(f)|g) = (Q(f)|g)$ . Donc d'après le début de la question 3. :

$(f|Q_n(g)) = (Q_n(f)|g) \quad \forall (f, g) \in V_n^2$  donc  $Q_n$  est bien un endomorphisme symétrique de  $V_n$ .  $\square$

**Question II.B.**

1. Soit  $f \in V_n$ . Il vient :

$$(f|A_n(f)) = (\Pi_n(f)|A(f)) \text{ (question II.A.2.) donc } (f|A_n(f)) = (f|A(f)) \text{ car } \Pi_n(f) = f.$$

$$\text{De même } (f|Q_n(f)) = (f|Q(f)) \text{ et } (f|B_n(f)) = (f|B(f)).$$

$$\text{Donc } (f|A_n(f)) \leq (f|Q_n(f)) \leq (f|B_n(f)) \text{ pour tout } f \in V_n \quad \square$$

2. Commençons par remarquer que comme  $Q_n$  est symétrique, il est orthodiagonalisable.

Ce qui justifie le préambule de la partie II.B.

a. Un vecteur propre  $f$  de  $A_n$  associé à la valeur propre  $\lambda$  est une fonction de  $V_n$  donc de  $E_2$  vérifiant  $A(f) = \lambda f$  donc est aussi vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$  et réciproquement.

La question I.B.1. prouve donc que les réels  $a + p^2$  avec  $1 \leq p \leq n$  sont valeurs propres de  $A_n$ . Comme  $V_n$  est de dimension  $n$ , on les a toutes.

Les valeurs propres de  $A_n$  (resp.  $B_n$ ) sont les réels  $a + p^2$  (resp  $b + p^2$ ) avec  $1 \leq p \leq n$ .  $\square$

b. Notons  $W_k = \text{vect}(e_{k,n}, \dots, e_{n,n})$ . La question portant sur l'existence d'un vecteur unitaire revient à prouver que  $V_k \cap W_k \neq \{0\}$ . Or  $\dim V_k = k$  et  $\dim W_k = n - k + 1$ . Par ailleurs  $V_k$  et  $W_k$  sont deux sous-espaces de  $V_n$ . Donc leur somme est de dimension au plus  $n$ . La formule de Grassman prouve alors que la dimension de l'intersection est au moins 1.  $\square$

• Soit  $f$  un tel vecteur unitaire. Il s'écrit  $f = \sum_{p=1}^k \alpha_p s_p = \sum_{q=k}^n \beta_q e_{q,n}$  avec  $\sum_{p=1}^k \alpha_p^2 = \sum_{q=k}^n \beta_q^2 = 1$

$$\text{Il vient } (f|Q(f)) = \left( \sum_{q=k}^n \beta_q e_{q,n} \middle| \sum_{q=k}^n \beta_q \lambda_{q,n} e_{q,n} \right) = \sum_{q=k}^n \lambda_{q,n} \beta_q^2 \geq \lambda_{k,n} \sum_{q=k}^n \beta_q^2 = \lambda_{k,n} \quad (1)$$

$$\text{Par ailleurs comme déjà noté } (f|Q(f)) \leq (f|B(f)) = (f|B_n(f)) \text{ car } f \in V_n \quad (2).$$

$$\text{Or } (f|B_n(f)) = \left( \sum_{p=1}^k \alpha_p s_p \middle| \sum_{p=1}^k \alpha_p (b + p^2) s_p \right) = \sum_{p=1}^k \alpha_p^2 (b + p^2) \leq (b + k^2) \sum_{p=1}^k \alpha_p^2 = b + k^2 \quad (3)$$

De (1), (2) et (3) on tire que  $\lambda_{k,n} \leq b + k^2$ .

• On prouve de même par un argument de dimension que  $\text{vect}(e_{1,n}, \dots, e_{k,n})$  et  $\text{vect}(s_k, \dots, s_n)$  ont une intersection non réduite à 0. En envisageant un vecteur unitaire  $g$  de cette intersection, on prouve de la même manière que  $a + k^2 \leq (g|A_n(g)) = (g|A(g)) \leq (g|Q(g)) \leq \lambda_{k,n}$

• Ainsi  $a + k^2 \leq \lambda_{k,n} \leq b + k^2$  pour  $1 \leq k \leq n$ .  $\square$

c. Soit  $f \in V_{n-1}$ . Comme déjà noté on a alors  $(f|Q_{n-1}(f)) = (f|Q(f))$ .

Mais on a a fortiori  $f \in V_n$ . Donc de même  $(f|Q_n(f)) = (f|Q(f))$ .

Ainsi  $(f|Q_{n-1}(f)) = (f|Q_n(f)) = (f|Q(f))$  pour  $f \in V_{n-1}$ .  $\square$

• Soit désormais  $n \geq 2$  fixé et  $1 \leq k \leq n - 1$ . Alors comme précédemment par des arguments de dimension dans  $V_n$  :  $\text{vect}(e_{1,n-1}, \dots, e_{k,n-1}) \cap \text{vect}(e_{k,n}, \dots, e_{n,n})$  n'est pas réduit au vecteur nul donc contient un vecteur unitaire  $f$  qui appartient évidemment à  $V_{n-1}$ .

En notant  $f = \sum_{p=1}^k \alpha_p e_{p,n-1}$  et  $f = \sum_{q=k}^n \beta_q e_{q,n}$  les deux décompositions de  $f$  il vient :

$$(f|Q_{n-1}(f)) = \sum_{p=1}^k \alpha_p^2 \lambda_{p,n-1} \leq \lambda_{k,n-1} \sum_{p=1}^k \alpha_p^2 = \lambda_{k,n-1}$$

$$(f|Q_n(f)) = \sum_{q=k}^n \beta_q^2 \lambda_{q,n} \geq \lambda_{k,n} \sum_{q=1}^n \beta_q^2 = \lambda_{k,n}$$

donc  $\lambda_{k,n} \leq (f|Q_n(f)) = (f|Q_{n-1}(f)) \leq \lambda_{k,n-1}$   $\square$

**Question II.C.**

Compte tenu de la question précédente, pour  $k$  fixé, la suite  $(\lambda_{k,n})_{n \geq k}$  est décroissante. Or  $x_{k,n} \in I_k$  pour tout  $n \geq k$  donc la suite est minorée et donc convergente vers une limite notée  $\lambda_k$ . En outre  $\lambda_k \in \overline{I_k} = I_k$ .

On a pour tout  $n \geq k + 1$  :  $\lambda_{k,n} \leq \lambda_{k+1,n}$  d'où par passage à la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$  (licite vu la convergence) il vient  $\lambda_k \leq \lambda_{k+1}$  en d'autres termes la suite  $(\lambda_k)$  est croissante.  $\square$

### Partie III. Une suite de valeurs propres de $Q$ .

#### Question III.A.

1. Dans la suite on notera le plus souvent  $y$ ,  $r$  et  $\theta$  en place de  $y_\lambda$ ,  $r_\lambda$  et  $\theta_\lambda$  pour alléger les notations.

La fonction complexe  $z = \frac{y'}{\sqrt{\lambda}} + iy$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  et ne s'annule jamais. En effet sinon il existerait un réel  $x_0$  en lequel on aurait  $y(x_0) = y'(x_0) = 0$  et ainsi (théorème de Cauchy-Lipschitz)  $y$  serait identiquement nulle. La fonction  $r = |z|$  est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et ne s'annule jamais. Le théorème de relèvement  $\mathcal{C}^1$  appliqué à la fonction  $\frac{z}{r}$  fournit alors le résultat demandé (on sait que la fonction  $\theta$  est définie à  $2\pi$  près et comme on doit avoir  $\cos(\theta(0)) = 1$  on peut choisir celle telle que  $\theta(0) = 0$ )  $\square$

2. De  $y' = \sqrt{\lambda} r \cos \theta$  on tire  $y'' = \sqrt{\lambda}(r' \cos \theta - r \sin \theta \cdot \theta')$ .

Or  $y'' = (q - \lambda)y = (q - \lambda)r \sin \theta$  donc  $(q - \lambda)r \sin \theta = \sqrt{\lambda}(r' \cos \theta - r \sin \theta \cdot \theta')$  (1).

Par ailleurs  $y = r \sin \theta$  donc  $y' = r' \sin \theta + r \cos \theta \cdot \theta'$  donc  $\sqrt{\lambda} r \cos \theta = r' \sin \theta + r \cos \theta \cdot \theta'$  (2).

En considérant  $-\sin(\theta) \times (1) + \sqrt{\lambda} \cos \theta \times (2)$  et en simplifiant par  $r$  qui ne s'annule jamais (Cf précédemment), il vient que :  $\theta' = \sqrt{\lambda} - \frac{q}{\sqrt{\lambda}} \sin^2 \theta$ . Comme en outre  $\theta(0) = 0$  :

$\theta$  est la solution maximale (car définie sur  $\mathbb{R}$ ) du problème de Cauchy ( $T_\lambda$ ).  $\square$

3. En envisageant cette fois  $\cos \theta \times (1) + \sqrt{\lambda} \sin \theta \times (2)$  il vient :  $r' = \frac{q \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{\lambda}} r$ .  $\square$

#### Question III.B.

1. La fonction  $t \mapsto \theta(t)$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$ , le théorème de représentation  $\mathcal{C}^1$  fournit :

$$\theta(t) - \theta(0) - \sqrt{\lambda} t = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t q(x) \sin^2(\theta(x)) dx. \text{ Or } \theta(0) = 0.$$

$$\text{Donc pour } t \geq 0 : |\theta(t) - \sqrt{\lambda} t| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t |q(x)| dx \leq \frac{\|q\|_\infty}{\sqrt{\lambda}} t \quad \square$$

Par ailleurs l'inégalité des accroissements finis fournit  $|\cos(2b) - \cos(2a)| \leq 2|b - a|$  pour tout couple  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{Donc } |\cos(2\theta(t)) - \cos(2\sqrt{\lambda} t)| \leq \frac{2\|q\|_\infty}{\sqrt{\lambda}} t \text{ pour } t \geq 0. \quad \square$$

2. En utilisant que  $\theta' = \sqrt{\lambda} - \frac{q}{2\sqrt{\lambda}}(1 - \cos(2\theta))$ , il vient de même :

$$\theta(2\pi) - 2\pi\sqrt{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t) dt = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t) \cos(2\theta(t)) dt = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t) (\cos(2\sqrt{\lambda} t) + \alpha(t)) dt \quad (1)$$

avec  $|\alpha(t)| \leq \frac{2\|q\|_\infty}{\sqrt{\lambda}} t$  compte tenu de la question précédente.

$$\text{Ainsi } \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left| \int_0^{2\pi} \alpha(t) dt \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} |\alpha(t)| dt \leq \frac{\|q\|_\infty}{\lambda} \int_0^{2\pi} t dt = \frac{2\pi^2 \|q\|_\infty}{\lambda}.$$

L'égalité (1) ci-dessus fournit alors :

$$\left| \theta(2\pi) - 2\pi\sqrt{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t) dt - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t) \cos(2\sqrt{\lambda} t) dt \right| \leq \frac{2\pi^2 \|q\|_\infty}{\lambda} \quad \square$$

3. Ainsi peut-on écrire, pour  $\lambda$  au voisinage de  $+\infty$  que :

$$\theta(\lambda, 2\pi) = 2\pi\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t) dt + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t) \cos(2\sqrt{\lambda} t) dt + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Or d'après le théorème de Lebesgue (démonstration immédiate par intégration par parties licite car  $q$  est  $\mathcal{C}^1$ )

$$\int_0^{2\pi} q(t) \cos(2\sqrt{\lambda} t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc}$$

$$\theta(\lambda, 2\pi) = 2\pi\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t) dt + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 2\pi\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t) dt + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$\text{Ainsi } \theta(\lambda, 2\pi) = 2\pi\sqrt{\lambda} \left(1 - \frac{1}{4\pi\lambda} \int_0^{2\pi} q(t) dt + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \quad \square$$

4.

a. La question précédente prouve évidemment que  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \theta(\lambda, 2\pi) = +\infty$ .

En particulier il existe  $\lambda_0$  tel que  $\theta(\lambda_0, 2\pi) = \theta_0 > 0$ . Soit alors un entier  $k_0 > 0$  tel que  $2k_0\pi \geq \theta_0$ .

Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction  $\lambda \mapsto \theta(\lambda, 2\pi)$  (supposée continue) entre  $\lambda_0$  et  $+\infty$  montre qu'il existe un réel  $\mu_{k_0}$  tel que  $\theta(\mu_{k_0}, 2\pi) = 2k_0\pi$ .

Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à cette même fonction mais cette fois entre  $\mu_{k_0}$  et  $+\infty$  montre qu'il existe un réel  $\mu_{k_0+1} > \mu_{k_0}$  tel que  $\theta(\mu_{k_0+1}, 2\pi) = 2(k_0 + 1)\pi$ .

L'itération est claire.

Ainsi il existe un entier  $k_0 > 0$  et une suite  $(\mu_k)_{k \geq k_0}$  strictement croissante de réels strictement positifs telle que  $\theta(\mu_k, 2\pi) = 2k\pi$ .  $\square$

- b. Si la suite  $(\mu_k)$  était majorée (mettons par  $a$ ) alors on aurait  $\theta(\mu_k, 2\pi) \leq M$  pour tout  $k \geq k_0$  avec  $M = \sup_{\lambda \in [0, a]} \theta(\lambda, 2\pi)$  (qui existe bien vu la continuité). Impossible puisque  $\theta(\mu_k, 2\pi) = 2k\pi$ .

Donc  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_k = +\infty$  (suite croissante non majorée).

Ainsi pour  $k$  au voisinage de  $+\infty$ , on peut écrire d'après la question III.B.3., (avec  $\lambda = \mu_k$ ) :

$$k = \sqrt{\mu_k} \left( 1 - \frac{1}{4\pi\mu_k} \int_0^{2\pi} q(t) dt + o\left(\frac{1}{\mu_k}\right) \right) \quad (1).$$

$$\text{Or } \left( 1 - \frac{1}{4\pi\mu_k} \int_0^{2\pi} q(t) dt + o\left(\frac{1}{\mu_k}\right) \right)^2 = 1 - \frac{1}{2\pi\mu_k} \int_0^{2\pi} q(t) dt + o\left(\frac{1}{\mu_k}\right)$$

En élevant au carré la relation (1) ci-dessus, il vient  $k^2 = \mu_k - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(t) dt + o(1)$  soit :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (\mu_k - k^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(t) dt \quad \square$$

### Question III.C.

1. On vérifie immédiatement que la fonction  $\varphi : x \mapsto -\theta(-x)$  est solution (maximale car définie sur  $\mathbb{R}$ ) de l'équation différentielle  $(T_\lambda)$  puisque  $q$  est paire. En outre elle vérifie la condition initiale  $\varphi(0) = 0$ . Donc  $\varphi = \theta$  d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.  $\square$

Notons que cela est valable pour tout  $\lambda > 0$  car on n'a pas utilisé que  $\lambda$  était tel que  $\theta_\lambda(2\pi) = 2k\pi$ .

Supposons désormais que  $\theta(2\pi) = 2k\pi$ . Soit la fonction  $\psi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\psi(x) = \theta(x + 2\pi) - 2k\pi$ .

Comme  $q$  et  $\sin^2$  sont  $2\pi$ -périodiques, il vient, en écrivant que  $\theta$  satisfait l'équation différentielle  $(T_\lambda)$  en  $x + 2\pi$ , que  $\psi$  satisfait l'équation  $(T_\lambda)$ . Or  $\psi(0) = \theta(2\pi) - 2k\pi = 0$ . Le théorème de Cauchy-Lipschitz prouve alors que  $\psi = \theta$ .

Ainsi si  $\theta(\lambda, 2\pi) = 2k\pi$  alors  $\theta(\lambda, x + 2\pi) = \theta(\lambda, x) + 2k\pi$   $\square$

2. Si  $u$  est  $2\pi$ -périodique, alors  $\int_x^{x+2\pi} u(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} u(t) dt = 0$  si en outre  $u$  est impaire.

Il en découle immédiatement que  $x \mapsto \exp\left(\int_0^x u(t) dt\right)$  est  $2\pi$ -périodique.  $\square$

On peut aussi remarquer que cette fonction est paire.

D'après la question III.A.3. on a  $r(x) = r(0) \exp\left(\int_0^x u(t) dt\right)$  avec  $u(t) = \frac{q(t) \cos(\theta(t)) \sin(\theta(t))}{\sqrt{\lambda}}$  et  $u$  est impaire et  $2\pi$ -périodique d'après la question III.C.1.

Ainsi  $r$  est une fonction paire et  $2\pi$ -périodique.  $\square$

3. Il en découle immédiatement que  $y(x) = r(x) \sin(\theta(x))$  est impaire et  $2\pi$ -périodique donc est vecteur propre (car non nulle) de  $Q$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .  $\square$

4. Il en résulte que la suite  $(\mu_k)_{k \geq k_0}$  est une suite (strictement croissante) de valeurs propres de  $Q$ .  $\square$

## Partie IV. Valeurs propres de $Q$ .

### Question IV.A.

1

- a. Quitte à considérer  $\pm \frac{y_n}{\|y_n\|_2}$  on peut parfaitement supposer  $y_n$  unitaire et tel que  $y'_n(0) \geq 0$ .  $\square$

- b. On a  $Q_n(y_n) = \Pi_n(-y''_n + qy_n) = -y''_n + \Pi_n(qy_n)$  car  $y_n \in V_n$  qui est stable par dérivation.  $\square$

Donc  $\|Q(y_n) - \alpha_n y_n\|_2 = \|Q(y_n) - Q_n(y_n)\|_2 = \|qy_n - \Pi_n(qy_n)\|_2$   $\square$

- c. La décomposition de  $y_n$  sur la base orthonormée  $(s_m)_{m=1, \dots, n}$  de  $V_n$  étant  $y_n = \sum_{m=1}^n b_m(y_n) s_m$ , il vient

$$qy_n = \sum_{m=1}^n b_m(y_n) q s_m \text{ d'où la formule proposée. } \square$$

- d. Il en découle immédiatement par inégalité triangulaire que  $\|Q(y_n) - \alpha_n y_n\|_2 \leq \sum_{m=1}^n |b_m(y_n)| r_{m,n}$

Par Pythagore on a bien sûr  $r_{m,n} \leq \|q s_m\|_2$  et  $\|q s_m\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q^2(t) \sin^2(mt) dt \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q^2(t) dt = \|q\|_2^2$   $\square$

e. On a d'une part  $Q_n(y_n) = \alpha_n y_n = \sum_{m=1}^n \alpha_n b_m(y_n) s_m$  (1). Par ailleurs :

$$Q_n(y_n) = \Pi_n(-y_n'' + qy_n) = -y_n'' + \Pi_n(qy_n) = \sum_{m=1}^n m^2 b_m(y_n) s_m + \sum_{m=1}^n b_m(qy_n) s_m \quad (2)$$

Par unicité de la décomposition sur la base des  $(s_m)$  de  $V_n$  il vient :  
 $m^2 b_m(y_n) + b_m(qy_n) - \alpha_n b_m(y_n) = 0 \quad \square$

f. On a, par Cauchy-Schwarz,  $|b_m(y_n)| = |(y_n | s_m)| \leq \|y_n\|_2 \cdot \|s_m\|_2 = 1$  et de l'inégalité ci-dessus on tire :

$$m^2 |b_m(y_n)| \leq |b_m(qy_n)| + |\alpha_n|$$

Or, toujours par Cauchy-Schwarz,  $|b_m(qy_n)| \leq \|qy_n\|_2$  donc  $|b_m(qy_n)| \leq \|q\|_2$  d'après la question d. ci-dessus.

Ainsi  $m^2 |b_m(y_n)| \leq K$  avec  $K = \|q\|_2 + C \quad \square$

g. Pour prouver que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Q(y_n) - \alpha_n y_n\|_2 = 0$  il suffit de prouver, d'après la question d. ci-dessus, que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{m=0}^n |b_m(y_n)| r_{m,n} = 0.$$

Or, pour  $n \geq m \geq 1$ , on a d'après les questions d. et f. :  $|b_m(y_n)| r_{m,n} \leq \frac{K \|q\|_2}{m^2} = \frac{C}{m^2}$

D'après le résultat du préliminaire, il suffit donc pour conclure de prouver que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |b_m(y_n)| r_{m,n} = 0 \quad \forall m \geq 1$

Or  $|b_m(y_n)| = |(s_m | y_n)| \leq 1$  par l'inégalité de Schwarz et  $r_{m,n} = \|qs_m - \Pi_n(qs_m)\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  (rappel de cours II.A.1) car la fonction  $qs_m$  est bien un élément de  $E$  puisque  $q$  est paire. Ce qui établit le résultat.  $\square$

## 2.

a. On a  $q_n(y_n) - \alpha_n y_n = 0$  de sorte que :

$$\|z_n\|_2 = \|Q(y_n) - Q_n(y_n) + (\alpha_n - \alpha) y_n\|_2 \leq \|Q(y_n) - \Pi_n(Q(y_n))\|_2 + |\alpha_n - \alpha| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \square$$

b.  $W$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $W' = uv'' - u''v = u \times (q - \alpha)v - (q - \alpha)u \times v = 0$ . Or  $W(0) = 1$ .  $\square$

c. On a  $y_n'' - qy_n = -Q(y_n) = -\alpha y_n - z_n$  donc  $y_n'' + (\alpha - q)y_n = -z_n$  ce qui permet de voir  $y_n$  comme solution de l'équation différentielle  $y'' + (\alpha - q)y = -z_n$ .

La méthode de la variation des constantes nous assure l'existence de deux fonctions  $a$  et  $b$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telles que  $y_n = au + bv$  et ces deux fonctions vérifient le système :

$$\begin{cases} u' a' + v' b' = 0 \\ u' a' + v' b' = -z_n \end{cases}$$

Comme le wronskien vaut constamment 1, les formules de Cramer fournissent  $a' = vz_n$  et  $b' = -uz_n$ .

Il en découle l'existence de deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  telles que :

$$y_n(x) = C_1 u(x) + C_2 v(x) + u(x) \int_0^x v(t) z_n(t) dt - v(x) \int_0^x u(t) z_n(t) dt$$

Les conditions initiales ( $y_n(0) = 0$  et  $y_n'(0)$ ) fournissent :

$$y_n(x) = y_n'(0)v(x) + u(x) \int_0^x v(t) z_n(t) dt - v(x) \int_0^x u(t) z_n(t) dt = y_n'(0)v(x) + \int_0^x K(x,t) z_n(t) dt$$

avec  $K(x,t) = u(x)v(t) - u(t)v(x)$  qui est bien continue (et même  $\mathcal{C}^2$ ) sur  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

d. Pour prouver que la suite  $(f_n)$  converge localement uniformément vers 0, il suffit de prouver qu'elle converge uniformément vers 0 sur tout segment de la forme  $[-2p\pi, 2p\pi]$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$ .

Soient  $J$  un tel segment et  $M = \sup_{(x,t) \in J^2} |K(x,t)|$  qui existe bien vu la continuité de  $K$ .

L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit pour  $x \in J$  :

$$|f_n(x)| \leq \sqrt{\left| \int_0^x K^2(x,t) dt \right|} \times \sqrt{\left| \int_0^x z_n^2(t) dt \right|} \leq \sqrt{2p\pi} M \times \sqrt{p \int_0^{2\pi} z_n^2(t) dt} \text{ car } z_n^2 \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}$$

D'où  $|f_n(x)| \leq \sqrt{2p\pi} M \times \sqrt{p\pi} \|z_n\|_2 = C^{\text{ste}} \|z_n\|_2$  et le résultat puisque  $\|z_n\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .  $\square$

e. Il vient  $\int_0^{2\pi} (y_n(x) - y_n'(0)v(x))^2 dx = \int_0^{2\pi} f_n^2(x) dx \leq 2\pi \left( \sup_{[0,2\pi]} |f_n(x)| \right)^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  d'après ci-dessus.

Ainsi  $\|y_n - y_n'(0)v\|_2$  tend vers 0 donc a fortiori (inégalité triangulaire "de gauche")  $\left| \|y_n\|_2 - \|y_n'(0)v\|_2 \right|$ .

Or  $\|y_n\|_2 = 1$  d'où  $\|y_n'(0)\|_2 \cdot \|v\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$  donc  $y_n'(0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{\|v\|_2}$  puisque  $y_n'(0) \geq 0$ .  $\square$

f. Puisque la suite numérique  $(y_n(0))$  converge vers  $\frac{1}{\|v\|_2}$ , il est immédiat que la suite de fonctions  $(y_n'(0)v)$  converge localement uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction  $\frac{v}{\|v\|_2}$ . Or  $y_n = y_n'(0)v + f_n$  et la suite  $(f_n)$  converge localement uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction nulle. Donc la suite  $(y_n)$  converge localement uniformément vers  $\frac{v}{\|v\|_2}$ .  $\square$

On en déduit évidemment (mais la seule convergence simple eût suffi pour cela) que  $v$  est impaire et  $2\pi$ -périodique donc est élément de  $E$ . Ce qui revient à dire que c'est un vecteur propre de  $Q$  et donc que  $\alpha$  est valeur propre de  $Q$  (car  $v \neq 0$ ).  $\square$

**Question IV.B.**

1. Soient  $p \neq q$ . Les suites  $(e_{p,n})_{n \geq p}$  et  $(e_{q,n})_{n \geq q}$  convergent uniformément sur  $[0, 2\pi]$  vers  $e_p$  et  $e_q$  c'est à dire pour la norme uniforme sur  $[0, 2\pi]$  qui est plus fine que la norme quadratique. Donc a fortiori on a la même convergence pour la norme quadratique. Comme le produit scalaire est continu (Schwarz) pour cette norme, il vient  $(e_p|e_q) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e_{p,n}|e_{q,n}) = \lim_{n \rightarrow 0} 0 = 0$ . Ainsi la famille  $(e_k)_{k \geq 1}$  est-elle orthonormale.  $\square$

Supposons  $\lambda_p = \lambda_{p+1}$ . Alors  $e_p$  et  $e_{p+1}$  sont deux vecteurs propres attachés à la même valeur propre. Or les sous-espaces propres de  $Q$  sont de dimension 1 (question I.A.2.). Il en résulte que  $e_p$  et  $e_{p+1}$  sont deux vecteurs unitaires colinéaires. Contradiction avec le fait qu'ils sont orthogonaux. Ainsi la suite  $(\lambda_p)$  que l'on savait déjà croissante est-elle strictement croissante.  $\square$

2. a. Écrivons la relation (1) avec  $y_n = e_{k,n}$  et  $\alpha_n = \lambda_{k,n}$  ce qui est bien licite car  $e_{k,n}$  est bien un vecteur propre unitaire de  $Q_n$  attaché à la valeur propre  $\lambda_{k,n}$ . Cela fournit  $(\lambda_{k,n} - m^2)b_m(e_{k,n}) = b_m(qe_{k,n})$ .

Or  $\lambda_{k,n} \geq k^2 + a$ . Donc pour  $k^2 + a > m^2$  il vient :

$$|(s_m|e_{k,n})| = |b_m(e_{k,n})| = \frac{|b_m(qe_{k,n})|}{\lambda_{k,n} - m^2} \leq \frac{|b_m(qe_{k,n})|}{k^2 + a - m^2}$$

$$\text{Or } |b_m(qe_{k,n})| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} s_m(t)q(t)e_{k,n}(t) dt \right| = |(s_mq|e_{k,n})| \leq \|s_mq\|_2 \times \|e_{k,n}\|_2 = \|s_mq\|_2 \leq \|q\|_2 \text{ (Cf IV.A.1.d.)}$$

$$\text{Donc } |(s_m|e_{k,n})| \leq \frac{\|q\|_2}{k^2 + a - m^2} \text{ pour } k \leq n \text{ et } k^2 + a > m^2 \quad \square$$

b. Envisageons pour  $1 \leq k \leq n$  la famille  $(x_{k,n})$  avec  $x_{k,n} = (e_{k,n}|s_m)$ . On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_{k,n} = e_k$  pour la norma quadratique (Cf précédemment) donc par continuité du produit scalaire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{k,n} = x_k \text{ avec } x_k = (e_k|s_m).$$

En outre  $x_{k,n} = O(\frac{1}{k^2})$  par la question précédente.

Le préliminaire permet alors d'affirmer que la série  $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$  converge et a pour somme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n x_{k,n}$ .

Or  $\sum_{k=1}^n x_{k,n} = \|s_m\|_2^2 = 1$  car  $(e_{k,n})_{1 \leq k \leq n}$  est une base orthonormée de  $V_n$  qui contient  $s_m$ .

$$\text{Ainsi } \sum_{k=1}^{+\infty} (e_k|s_m)^2 = 1. \quad \square$$

Il en résulte que :

$$\|s_m - \sum_{k=1}^n (e_k|s_m)e_k\|^2 = 1 + \sum_{k=1}^n (e_k|s_m)^2 - 2 \sum_{k=1}^n (e_k|s_m)^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (e_k|s_m)^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|s_m - \sum_{k=1}^n (e_k|s_m)e_k\|_2 = 0 \quad \square$$

3. Soit  $f$  orthogonale à tous les  $e_k$  et soit  $m$  fixé quelconque. Notons  $g_n = \sum_{k=1}^n (e_k|s_m)e_k$ . D'après la question précédente la suite  $(g_n)$  converge vers  $s_m$  pour la norme quadratique. Donc  $(g_n|f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (s_m|f)$ . Or  $(g_n|f) = 0$ .

Donc  $(s_m|f) = 0$ . Ainsi tous les coefficients de Fourier sont nuls ce qui prouve par Parseval que  $f = 0$ .

Ainsi la famille  $(e_k)$  est totale dans  $E$ .  $\square$

4. Supposons l'existence d'une valeur propre  $\lambda$  différente des  $\lambda_k$ . Soit  $e$  un vecteur propre unitaire associé. En raison de la symétrie de  $Q$  établie en II.A.3., il vient pour tout  $k$  :

$$0 = (Q(e)|e_k) - (e|Q(e_k)) = (\lambda - \lambda_k).(e|e_k) \text{ donc } (e|e_k) = 0 \text{ donc } e = 0 \text{ par la question précédente ce qui est absurde.}$$

**Ainsi les valeurs propres de  $Q$  sont exactement les éléments de la suite strictement croissante  $(\lambda_k)$ . Chaque sous-espace propre est de dimension 1 et on dispose d'une famille  $(e_k)$  orthonormale et totale de vecteurs propres.**

## Partie V. Comportement asymptotique.

1.  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(t) dt - a = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (q(t) - a) dt > 0$  car  $q(t) - a$  est positive, continue et strictement positive en au moins un point puisque  $q$  n'est pas constante. Idem pour l'autre inégalité.  $\square$

2.

a.  $\lim_{k \rightarrow +\infty} ((k+1)^2 + a) - (k^2 + b) = +\infty$  donc est strictement positif à partir d'un certain rang.  
Ainsi  $I_k \cap I_{k+1} = \emptyset$  pour  $k \geq k_1$ .  $\square$

b. D'après III.B.4.b. et la question 1. ci-dessus on a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} (\mu_k - k^2) \in ]a, b[$ .

Donc pour  $k$  assez grand on a  $\mu_k \in ]k^2 + a, k^2 + b[$  et en particulier  $\mu_k \in I_k$

Ainsi  $\mu_k$  est une valeur propre de  $Q$  qui appartient à  $I_k$ .

Or pour  $k$  assez grand  $I_k$  ne contient qu'une valeur propre qui est  $\lambda_k$ . En effet les valeurs propres sont exactement les éléments de la suite  $(\lambda_k)$ ,  $\lambda_k$  appartient à  $I_k$  et  $I_k \cap I_{k+1}$  est vide pour  $k$  assez grand.

Donc  $\mu_k = \lambda_k$  pour  $k$  assez grand.  $\square$

Comme (question III.B.4.b.)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} (\mu_k - k^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(t) dt$  on a immédiatement :

$$\lambda_k = k^2 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(t) dt + o(1). \quad \square$$

————— FIN —————