

PARTIE I - Exemple 1

Dans cette partie f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = \text{Arctan}(t)$ (où Arctan désigne la fonction Arctangente).

- On sait que la fonction Arctangente est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie $\text{Arctan}(0) = 0$ donc $f \in E_0$. De plus $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = f'(0) = 1$ d'où la fonction $g : t \mapsto \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2$ est prolongeable par continuité en 0 et $0 \leq g(t) \sim_{+\infty} \frac{\pi^2}{4t^2}$, donc la fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc $f \in E_1$.

- Pour tout $x > 0$, la fonction $H_x : t \mapsto \frac{1}{(t^2 + 1)(t^2 + x^2)}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}^+$ avec $H_x(t) \leq \frac{1}{x^2(1 + t^2)}$, cette dernière fonction est intégrable sur $[1, +\infty[$ pour tout $x > 0$ donc pour tout $x > 0$, H_x est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On remarque que $\forall t \in \mathbb{R}^+, (f'(t))^2 = H_1(t)$, donc $f \in E_2$.

- Calcul de $N_2(f)$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}_+} H_x(t) dt$.

- Pour tout $x > 0$, H_x est continue sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x \mapsto H_x(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus pour tout $a > 0$ et tout $x \in [a, +\infty[$,

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, 0 \leq H_x(t) \leq H_a(t) \quad (\text{hypothèse de domination})$$

la fonction H_a étant continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on sait par théorème de continuité que la fonction φ est continue sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, donc est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*, x \neq 1$, par décomposition en éléments simples (deux pôles simples : $-1, -x^2$)

$$\frac{1}{(T+1)(T+x^2)} = \frac{1}{x^2-1} \left(\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+x^2} \right)$$

- D'après la décomposition en éléments simples précédente, pour $x \in \mathbb{R}_+^*, x \neq 1$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, H_x(t) = \frac{1}{x^2-1} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2+x^2} \right)$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, x \neq 1$, on a :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2+x^2} \right) dt = \frac{1}{x^2-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{x} \frac{1/x}{1+(t/x)^2} \right) dt$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2-1} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\text{Arctan}(t) - \frac{1}{x} \text{Arctan}\left(\frac{t}{x}\right) \right]_0^b = \frac{1}{x^2-1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2x} \right) = \frac{\pi}{2x(1+x)}$$

- Par définition de $N_2(f)$ avec $(f'(t))^2 = H_1(t)$ on a : $N_2(f) = \sqrt{\varphi(1)}$ et par continuité de φ en 1 on aura : $N_2(f) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. La fonction $p : u \in \mathbb{R}_+ \mapsto u - \text{Arctan}(u)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall u \in \mathbb{R}_+, p'(u) = \frac{u^2}{1+u^2}$, la fonction p est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$, or $p(0) = 0$ donc

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, u - \text{Arctan}(u) \geq 0$$

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $G_x : t \mapsto \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(t^2+1)}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $G_x(t) \sim_0 \frac{x}{1+t^2}$ et $G_x(t) \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2t^3}$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, G_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. Calcul de $N_1(f)$.

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $\theta(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} G_x(t) dt$ et $G : (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^* \mapsto G_x(t)$.

- (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction G_x est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto G_x(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. On a vu que $\forall u \in \mathbb{R}^+, \text{Arctan}(u) \leq u$ et donc pour tout $a > 0$ et tout $x \in [0, a]$:

$$0 \leq G_x(t) \leq \frac{xt}{t(1+t^2)} \leq \frac{a}{1+t^2} \quad (\text{hypothèse de domination avec } t \mapsto \frac{1}{1+t^2} \text{ intégrable sur } \mathbb{R}^+)$$

On en déduit par application du théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre que la fonction θ est continue sur tout intervalle $[0, a]$ avec $a > 0$ et donc θ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

- (b) On sait déjà que la fonction θ est continue sur $\mathbb{R}^+$, de plus la fonction G est dérivable par rapport à sa première variable x pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ avec $\frac{\partial G}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$. On aura donc pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial G}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial G}{\partial x}(x, t)$ est continue, positive sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $0 \leq \frac{\partial G}{\partial x}(x, t) \leq \frac{1}{1+t^2}$, on en déduit que $t \mapsto \frac{\partial G}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et par domination, la fonction θ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec la formule de Leibniz : $\theta'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial x}(x, t) dt$.

- (c) D'après ce qui précède, $\forall x \in \mathbb{R}^+, \theta'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} dt$. Pour $x > 0$, on aura donc $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} H_{\frac{1}{x}}(t) dt = \frac{1}{x^2} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2(x+1)}$ d'après le résultat de la question 3b et par continuité en 0 de θ' , la formule est encore vraie pour $x = 0$.

- (d) On déduit du résultat précédent que pour tout $x \in \mathbb{R}^+, \theta(x) - \theta(0) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) = \theta(x)$.

- (e) $N_1^2(f) = \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{f^2(t)}{t^2} dt$. Par intégration par parties avec $f(t) = \text{Arctan}(t)$, on aura :

$$\int_a^b \frac{f^2(t)}{t^2} dt = \left[-\frac{f^2(t)}{t} \right]_a^b + \int_a^b \frac{2f'(t)f(t)}{t} dt$$

or $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{f^2(t)}{t} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \text{Arctan}(t) \frac{\text{Arctan}(t)}{t} = 0$ et $\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{\text{Arctan}^2(t)}{t} = 0$, on en déduit que :

$$N_1^2(f) = \int_0^{+\infty} \frac{2\text{Arctan}(t)}{t(1+t^2)} dt = 2\theta(1) = \pi \ln(2)$$

On en déduit que $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$ et donc $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$.

Partie II - Exemple 2

Dans cette partie, on suppose que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})$ (où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien).

7. f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et on a : $\forall t \in \mathbb{R}^+, f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. On en déduit que f' est continue sur $\mathbb{R}^+$ et f'^2 est clairement intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (de primitive Arctangente sur $\mathbb{R}^+$) donc $f \in E_2$. De plus $N_2(f) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
8. Pour t au voisinage de 0, on a (par développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de $\sqrt{1+t^2}$) : $\ln(t + \sqrt{1+t^2}) = \ln(1+t+o(t)) = t+o(t)$ alors $f(t) \sim_0 t$.
On a aussi au voisinage de $+\infty$:

$$f(t) = \ln(t) + \ln(1 + \sqrt{1+1/t^2}) = \ln(t) + \ln(1 + \frac{1}{2t^2} + o(1/t^2)) = \ln(t) + \frac{1}{2t^2} + o(1/t^2)$$

on en déduit que $f(t) \sim_{+\infty} \ln(t)$.

9. D'après les équivalents précédents, $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{f^2(t)}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0 et $\frac{f^2(t)}{t^2} =_{+\infty} o(\frac{1}{t^{3/2}})$ et donc $f \in E_1$.
10. Calcul d'une intégrale.

- (a) La fonction $h : t \mapsto -\frac{\ln(t)}{1-t^2}$ est continue, positive sur $]0, 1[$ et est prolongeable par continuité en 1 (de limite égale à $1/2$). De plus au voisinage de 0, on a : $h(t) = o(1/\sqrt{t})$ et donc h est intégrable sur $]0, 1[$.

$$\text{On note désormais } J = \int_{]0,1[} \frac{-\ln t}{1-t^2} dt.$$

- (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k : t \mapsto -t^{2k} \ln(t)$ est continue et positive sur $]0, 1[$ avec $f_k(t) = o(1/\sqrt{t})$ au voisinage de 0, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, les fonctions f_k sont intégrables sur $]0, 1[$. Par intégration par parties,

$$\int_a^b -t^{2k} \ln(t) dt = [-t^{2k+1} \ln(t)/(2k+1)]_a^b + \int_a^b \frac{t^{2k}}{2k+1} dt$$

$$\text{Donc : } J_k = \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b -t^{2k} \ln(t) dt = \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

- (c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, les fonctions f_k sont continues et intégrables sur $]0, 1[$, la série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement sur $]0, 1[$ vers $h : t \in]0, 1[\mapsto -\frac{\ln(t)}{1-t^2}$, la série $\sum \int_{]0,1[} |f_k| = \sum J_k$ converge donc h est intégrable sur $]0, 1[$ et

$$J = \int_0^1 h(t) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 f_k(t) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} J_k.$$

(d) On a par convergence des trois séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\text{On en déduit que } J = \sum_{k=0}^{+\infty} J_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

11. Calcul de $N_1(f)$.

Pour simplifier, on note $I = (N_1(f))^2 = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{f(t)}{t} \right)^2 dt$.

(a) Pour tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$, on a par intégration par parties :

$$\int_a^b \frac{f^2(t)}{t^2} dt = \left[-\frac{f^2(t)}{t} \right]_a^b + \int_a^b \frac{2f'(t)f(t)}{t} dt$$

Or pour $f(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2})$, on a déjà vu : $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est prolongeable par continuité

en 0 donc $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{f^2(t)}{t} = \lim_{a \rightarrow 0^+} t \left(\frac{f(t)}{t} \right)^2 = 0$, on avait aussi (voir question 7) :

$f(t) \sim_{+\infty} \ln(t)$ et donc $\frac{f^2(t)}{t} \sim_{+\infty} \frac{\ln^2(t)}{t}$ et donc $\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{f^2(t)}{t} = 0$. On en déduit que :

$$I = 2 \int_0^1 \frac{f'(t)f(t)}{t} dt = 2 \int_0^1 \frac{f(t)}{t\sqrt{1+t^2}} dt$$

(b) Pour le calcul de I , on effectue le changement de variable $u = f(t)$ sachant que f est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et donc $f(t) - f(0) = \text{Argsh}(t) = f(t)$ car $f(0) = 0$, on en déduit que $u = f(t) \Leftrightarrow t = \text{sh}(u)$ et alors par ce changement de variable

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{u}{\text{sh}(u)} du$$

On sait que $\text{sh}(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2} = e^u \left(\frac{1 - e^{-2u}}{2} \right)$, on effectue alors dans I le changement de variable $v = e^{-u} = \psi(u) \Leftrightarrow u = -\ln(v)$ avec ψ un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $]0, +\infty[$ dans $]0, 1[$ et $\psi'(u) = -e^{-u} = \frac{-1}{e^u}$, donc

$$I = \int_0^1 -\frac{\ln(v)}{1-v^2} dv = J = \frac{\pi^2}{8}$$

(c) on en déduit que $N_1(f) = \sqrt{I} = \sqrt{J} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ et $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Partie III

Le but de cette partie est de comparer, d'une part, les ensembles E_1 et E_2 , et, d'autre part, les fonctions N_1 et N_2 .

12. Soit f une fonction quelconque appartenant à E_0 . On associe à f deux fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t}}$ et $h(t) = \frac{f(t)}{t}$ pour tout $t > 0$. On pose $\alpha = f'(0)$.

(a) f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ avec $f(0) = 0$ donc $f(t) = f(t) - f(0)$ et donc h est prolongeable par continuité en 0 avec $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = f'(0) = \alpha$. On a : $g(t) = \sqrt{t}h(t)$ et donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 0$.

(b) On vérifie aisément par dérivation d'un quotient que : $\forall t > 0, \sqrt{t}g'(t) = f'(t) - \frac{1}{2}h'(t)$.

(c) On déduit des questions précédentes, par continuité de f' en 0, que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t}g'(t) = \frac{\alpha}{2}$, de plus $g(t)g'(t) = h(t)\sqrt{t}g'(t)$, donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)g'(t) = \frac{\alpha^2}{2}$.

(d) Des limites calculées précédemment, on obtient que $t \mapsto \sqrt{t}g'(t), t \mapsto g(t)g'(t), t \mapsto h(t)$ sont prolongeables par continuité en 0^+ , or elles sont aussi continues sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour tout $x > 0$, ces trois fonctions sont intégrables sur $]0, x]$. On a aussi $f'^2(t) = g(t)g'(t) + (\sqrt{t}g'(t))^2 + \frac{1}{4}h^2(t)$ alors si $f \in E_2$, f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc sur $]0, x]$ pour tout $x > 0$, alors par intégration sur $]0, x]$ et linéarité de l'intégrale, on aura :

$$(R) \quad \int_{]0, x]} (f'(t))^2 dt = \frac{1}{2} (g(x))^2 + \int_{]0, x]} (\sqrt{t}g'(t))^2 dt + \frac{1}{4} \int_{]0, x]} (h(t))^2 dt.$$

13. Comparaison de E_1 et E_2 .

(a) Par positivité de l'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle, la relation (R) entraîne :

$$\forall x > 0, \quad \int_{]0, x]} (f'(t))^2 dt \geq \frac{1}{4} \int_{]0, x]} (h(t))^2 dt$$

On en déduit que si $f \in E_2$ alors la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $\int_{]0, x]} (f'(t))^2 dt$ existe et est finie, alors la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_{]0, x]} (h(t))^2 dt$ est majorée et donc la fonction positive, continue h^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc si $f \in E_2$ alors $f \in E_1$, d'où l'inclusion : $E_2 \subset E_1$.

(b) Prenons la fonction $f : t \mapsto \sin(t)$, il est clair que $f \in E_0$, de plus $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f^2(t)}{t^2} = 1$ et $0 \leq \frac{f^2(t)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$, on en déduit que $f \in E_1$, mais $f'(t) = \cos(t)$ et la fonction positive f'^2 n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (pas de limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ pour $\int_0^x f'^2(t) dt$). On en déduit qu'il y a une inclusion stricte entre E_2 et E_1 ! $E_1 \neq E_2$.

14. Comparaison de N_1 et N_2 .

(a) Il est clair que E_2 est non vide inclus dans l'espace vectoriel E_0 . par linéarité de la dérivation et résultat sur l'intégrabilité d'une fonction positive, si $f \in E_2$ alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha f \in E_2$. Soit $(f, g) \in E_2^2$, on a donc f'^2 et g'^2 sont continues, positives et intégrables sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+, (f'(t) + g'(t))^2 = f'^2(t) + g'^2(t) + 2f'(t)g'(t)$. Par inégalité de Cauchy-Schwarz, on sait que pour tout $x > 0$,

$$\left(\int_0^x |f'(t)g'(t)| dt \right)^2 \leq \int_0^x f'^2(t) dt \int_0^x g'^2(t) dt$$

Et donc : $\forall x > 0$, $\int_0^x |f'(t)g'(t)| dt \leq N_2(f) \cdot N_2(g)$ et donc la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^x |f'(t)g'(t)| dt$ est majorée et donc la fonction $f'g'$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit par somme de trois fonctions intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$, que $(f' + g')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc que $(f + g) \in E_2$. On a donc montré E_2 est un sous-espace vectoriel de E_0 .
On admet sans justification que N_1 et N_2 sont des normes sur l'espace vectoriel E_2 .

(b) On a déjà vu que $E_2 \subset E_1$ et pour $f \in E_2 : \forall x > 0$, $\int_{]0,x]} (f'(t))^2 dt \geq \frac{1}{4} \int_{]0,x]} (h(t))^2 dt$, par passage à la limite lorsque x tend vers $+\infty$ et croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$, on obtient : $N_1(f) \leq 2N_2(f)$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction f_n par $f_n(t) = e^{-t} \sin(nt)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in E_0$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $f_n'(t) = e^{-t}(n \cos(nt) - \sin(nt))$, donc $f_n'^2(t) = e^{-2t}(n \cos(nt) - \sin(nt))^2$, on en déduit que $0 \leq f_n'^2(t) \leq (n+1)e^{-2t}$, donc f_n' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $f_n \in E_2$.

$$N_2^2(f_n) = \int_0^{+\infty} e^{-2t} (n \cos(nt) - \sin(nt))^2 dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t} ((n^2 - 1) \cos^2(nt) - n \sin(2nt) + 1) dt$$

$$N_2^2(f_n) = \int_0^{+\infty} e^{-2t} \left(\frac{n^2 - 1}{2} (\cos(2nt) + 1) - n \sin(2nt) + 1 \right) dt$$

$$N_2^2(f_n) = \frac{n^2 + 1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-2t} \left(\frac{n^2 - 1}{2} \cos(2nt) - n \sin(2nt) \right) dt$$

Or $\int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}$, $\int_0^{+\infty} e^{-2t} e^{2int} dt = \frac{1}{2(1 - in)} = \frac{1}{2(n^2 + 1)} + i \frac{n}{2(n^2 + 1)}$, on en déduit que :

$$N_2^2(f_n) = \frac{n^2}{4} \quad N_2(f_n) = \frac{n}{2}$$

(d) On sait déjà que N_1 est dominée par N_2 . Supposons que N_2 soit dominée par N_1 sur E_2 alors il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $\forall f \in E_2$, $N_2(f) \leq \alpha N_1(f)$. En prenant les fonctions f_n , on aurait $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{2} \leq \alpha N_1(f_n)$. La fonction $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\sin^2(nt)}{t^2}$ est positive, continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 et dominée par $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$, on en déduit qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc : $0 \leq N_1^2(f_n) \leq \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(nt)}{t^2} dt$.
Par le changement de variable $u = nt$ qui est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$0 \leq N_1^2(f_n) \leq n \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du$$

On en déduit que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{n}{2} \leq \alpha \sqrt{n} \beta$ avec $\beta = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du$, ce qui est absurde. La norme N_2 n'est donc pas dominée par la norme N_1 sur E_2 . Les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes sur E_2 .

15. On suppose que $f \in E_2$, d'après la relation (R) pour tout $x > 0$, on a :

$$\int_{]0,x]} \left(\sqrt{t} g'(t) \right)^2 dt \leq \int_{]0,x]} (f'(t))^2 dt \leq N_2^2(f), \text{ on en déduit que la fonction positive } t \mapsto \left(\sqrt{t} g'(t) \right)^2$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc $\int_{]0,x]} \left(\sqrt{t} g'(t) \right)^2 dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. On avait aussi $f_n \in E_2 \Rightarrow f \in E_1$, toujours par la relation (R), on obtient que la fonction

g^2 admet une limite finie en $+\infty$ (somme de trois fonctions admettant chacune une limite finie en $+\infty$) et donc g aussi.

Notons L la limite de g en $+\infty$, d'après la relation $g(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t}}$ avec $f \in E_2$, si $L \neq 0$ alors

$f(t) \sim L\sqrt{t}$ au voisinage de $+\infty$ qui entraîne $\frac{f^2(t)}{t^2} \sim \frac{L^2}{t}$ au voisinage de $+\infty$ et f n'appartient donc pas à E_1 , ce qui est faux puisque $f \in E_2 \Rightarrow f \in E_1$, on en déduit que la limite de g en $+\infty$ est nulle.