

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

Calculatrice électronique de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

L'épreuve est organisée en deux parties dont la première prend en compte la réflexion sur la pratique enseignante, notamment par la production d'un texte d'exercice dans la séquence 1. Les objectifs sont précisés par les titres des séquences et en tête des parties.

Les trois cinquièmes du barème iront à la première partie.

Toutes les fonctions envisagées sont définies uniquement sur l'ensemble \mathbb{R}_+ des réels positifs ou nuls et sont à valeurs réelles. On note \mathbb{R}_+^* l'ensemble des réels strictement positifs. Lorsqu'une fonction w est dérivable, sa dérivée est notée w' . Pour α et β réels on pose :

$$\begin{aligned} \inf(\alpha, \beta) &= \alpha & \text{si} & \alpha \leq \beta & \text{et} & \inf(\alpha, \beta) &= \beta & \text{si} & \alpha > \beta; \\ \sup(\alpha, \beta) &= \alpha & \text{si} & \alpha \geq \beta & \text{et} & \sup(\alpha, \beta) &= \beta & \text{si} & \alpha < \beta. \end{aligned}$$

PREMIÈRE PARTIE

Cette partie conduit, par des méthodes de pratique courante, à des résultats techniques et à des outils de comparaison utiles dans le problème constituant la deuxième partie.

1. Inégalités élémentaires

Les questions 1.1. et 1.2. sont indépendantes; elles se situent dans le cadre d'activités, réalisables en classe, associant la géométrie et le calcul afin de familiariser les élèves avec les inégalités.

1.1. Le but est de donner un support géométrique à la double inégalité suivante :

$$\text{Pour } a \text{ et } b \text{ positifs, } \frac{a+b}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq a+b.$$

En se servant d'objets très simples (cercle, rectangle, carré...), concevoir une figure où ces trois expressions soient en situation. Rédiger, sans corrigé, le texte d'un exercice amenant, à partir des réels positifs a et b , à réaliser cette figure et à y observer la double inégalité.

1.2. L'utilisation de la distance dans le plan permet de prouver l'inégalité :

$$\text{Pour } a, b, c \text{ positifs, } c \text{ supérieur à } b, \sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{a^2 + b^2} \leq c - b.$$

a. Expliquer comment.

b. Obtenir brièvement ce même résultat sans recourir à la géométrie.

2. Effet d'une homothétie sur une propriété différentielle

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R}_+ par $g(x) = e^x - x - 1$ et sa courbe représentative G dans un repère orthonormal; à chaque point $P(x, y)$ de G on associe le point $Q(x+y, 0)$.

2.1. Soit I le point $(0, 1)$. Démontrer que la droite IQ et la tangente à G en P sont perpendiculaires.

Étudier la fonction g , sa convexité, et tracer la courbe G en plaçant quelques tangentes.

Démontrer que la fonction g est l'unique solution sur \mathbb{R}_+ nulle en 0 de l'équation différentielle $y' = x + y$.

2.2. Pour tout λ strictement positif, on note G_λ la transformée de G par l'homothétie de centre O , origine du repère, et de rapport λ ; G_λ est la courbe représentative d'une fonction qu'on note g_λ .

a. Exprimer $g_\lambda(x)$ pour x dans \mathbb{R}_+ .

Les réels λ et μ vérifiant $\mu > \lambda$, examiner le signe de $g_\lambda - g_\mu$ et contrôler le résultat par un raisonnement de convexité.

b. Comparer $x + g_\lambda(x)$ et $g'_\lambda(x)$.

Comme ci-dessus pour g , caractériser g_λ comme solution sur \mathbb{R}_+ nulle en 0 d'une équation différentielle.

3. Intervention d'inéquations différentielles

On désigne par \mathcal{E} l'ensemble des fonctions définies sur \mathbb{R}_+ à valeurs réelles, de classe C^1 et nulles en 0.

3.1. a. Pour y dans \mathcal{E} , montrer que si $y'(x) \geq x$ pour tout x dans \mathbb{R}_+ , alors $y(x) \geq \frac{x^2}{2}$.

La réciproque est-elle vraie ?

b. Pour y dans \mathcal{E} , montrer que si $y'(x) \leq x + y(x)$ pour tout x dans \mathbb{R}_+ , alors $y \leq g$ où g est la fonction définie dans la séquence 2.

On utilisera le changement de fonction inconnue consistant à poser $y = z e^x$.

3.2. On note h la fonction définie par :
$$h(x) = \sup \left(\frac{x^2}{2}, \sqrt{2} \left(e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} - 1 \right) - x \right)$$
 pour tout x dans \mathbb{R}_+ .

a. Pour y dans \mathcal{E} , montrer que si pour tout x dans \mathbb{R}_+ on a à la fois

$$y'(x) \geq x \quad \text{et} \quad y'(x) \geq \frac{x + y(x)}{\sqrt{2}}, \quad \text{alors } y \geq h.$$

b. Pour expliciter h on a besoin du signe de :

$$d(x) = \sqrt{2} \left(e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} - 1 \right) - x - \frac{x^2}{2}.$$

Étudier les variations de la fonction d et montrer que l'équation $d(x) = 0$ admet dans \mathbb{R}_+ une unique solution x_0 .

Donner des valeurs approchées à 10^{-4} près de $d(1,3)$ et $d(1,4)$.

Justifier l'encadrement :

$$1,4 - \frac{d(1,4)}{10 [d(1,4) - d(1,3)]} \leq x_0 \leq 1,4 - \frac{d(1,4)}{d'(1,4)}.$$

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de x_0 .

3.3. On cherche maintenant à préciser à partir d'inéquations différentielles le comportement asymptotique d'une fonction de \mathcal{E} .

a. Soit y dans \mathcal{E} vérifiant $y(x) \leq y'(x) \leq y(x) + x$ pour tout x dans \mathbb{R}_+ .

Quel est le sens de variation de la fonction $x \rightarrow y(x) e^{-x}$?

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y(x) e^{-x})$ existe. On note K cette limite; montrer que $0 \leq K \leq 1$.

Quelle majoration obtient-on pour la fonction y ?

b. Soit M un réel strictement positif donné.

Pour y dans \mathcal{E} vérifiant $y'(x) \leq y(x) + M$ pour tout x dans \mathbb{R}_+ , quel est le sens de variation de la fonction $x \rightarrow (y(x) + M) e^{-x}$?

On note p_M la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$p_M(x) = e^x - x - 1 \quad \text{si } 0 \leq x \leq M \quad \text{et} \quad p_M(x) = (1 - e^{-M}) e^x - M \quad \text{si } x > M.$$

Pour y dans \mathcal{E} , montrer que si l'on a :

$$y(x) \leq y'(x) \leq y(x) + \inf(x, M) \quad \text{pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}_+,$$

alors, en posant $K = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y(x) e^{-x})$, on a : $K e^x - M \leq y(x) \leq p_M(x)$ pour tout x dans \mathbb{R}_+ .

DEUXIÈME PARTIE

(On envisage l'équation différentielle sur \mathbb{R}_+
$$y' = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On se propose l'étude de la solution nulle en 0 de cette équation (cette solution n'est pas exprimable à l'aide des fonctions élémentaires); les séquences 4 et 5, indépendantes l'une de l'autre, établissent son existence et son unicité. L'objectif est ensuite d'obtenir, dans l'esprit de la séquence 3, des encadrements globaux; la séquence 6 qui y conduit ne dépend pas des séquences 4 et 5.

4. Existence de la solution nulle en 0

On définit la suite (f_n) de fonctions sur \mathbb{R}_+ par $f_0(x) = 0$ et,

$$\text{pour } n \geq 1, \quad f_n(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + f_{n-1}^2(t)} dt.$$

Tournez la page S. V. P.

interne 1987-Math 1

4.1. Montrer que chaque f_n ainsi définie est une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ et nulle en 0, strictement croissante si $n \geq 1$. Calculer $f_1(x)$.

Montrer qu'on a, pour $n \geq 1$:
$$0 \leq f_n(x) - f_{n-1}(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}_+.$$

4.2. Montrer que la suite (f_n) converge vers une fonction f vérifiant : $\frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq e^x - x - 1$ pour tout x dans \mathbb{R}_+ .
Montrer que f est continue.

4.3. Montrer que la suite (f'_n) des dérivées vérifie pour $n \geq 1$:

$$0 \leq f'_{n+1}(x) - f'_n(x) \leq f_n(x) - f_{n-1}(x) \quad \text{pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}_+.$$

En déduire que f est une fonction de classe C^1 , nulle en 0, vérifiant $f'(x) = \sqrt{x^2 + f^2(x)}$ pour tout x dans \mathbb{R}_+ .
Montrer que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+ .

5. Unicité de la solution nulle en 0

On suppose que y_1 et y_2 sont des solutions sur \mathbb{R}_+ nulles en 0 de $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$.

On pose $\delta = (y_1 - y_2)^2$.

Montrer que la fonction $x \rightarrow \delta(x) e^{-2x}$ est décroissante sur \mathbb{R}_+ .

Conclure.

6. Des encadrements de f

6.1. En utilisant les études antérieures 3.1.b et 3.2.a dont on reprendra les notations, montrer que $h \leq f \leq g$.
Ce résultat améliore l'encadrement obtenu en 4.2.

Justifier l'existence de $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) e^{-x})$. On notera L cette limite.

6.2. On pose $\varphi = f' - f$, et, pour x dans \mathbb{R}_+ , $\theta(x) = (1-x)f'(x) + f(x)$.

On observera qu'on a, pour x dans \mathbb{R}_+ ,
$$\varphi(x) = \frac{x^3}{f(x) + f'(x)}.$$

a. Montrer qu'on a, pour x dans \mathbb{R}_+ , $f''(x) = f(x) + \frac{x}{f'(x)}$ et par suite $\varphi'(x) = \frac{x\theta(x)}{f'(x)(f(x) + f'(x))}$.

b. Étudier les variations de θ sur \mathbb{R}_+ et la limite de $\theta(x)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire l'existence d'un unique nombre γ strictement supérieur à 1 vérifiant $\theta(\gamma) = 0$.

c. Étudier les variations de φ .

On note M le nombre $\varphi(\gamma)$. Montrer qu'on a $M \leq 1$.

Utilisant 3.3.b, écrire à l'aide cette fois de L , M et p_M un encadrement de f .

6.3. Montrer que φ vérifie, pour tout x dans \mathbb{R}_+ :

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{2x}{x^2 + \varphi^2(x)} - 1.$$

6.4. On définit la fonction u sur \mathbb{R}_+ par :
$$u(x) = \frac{\varphi^2(x)}{x^2} e^x \quad \text{si } x > 0 \quad \text{et} \quad u(0) = 1.$$

Exprimer $u'(x)$ à l'aide de $\frac{2-x}{2+x} e^x - u(x)$ pour tout x dans \mathbb{R}_+ .

Tracer la représentation graphique de la fonction q définie sur \mathbb{R}_+ par $q(x) = \frac{2-x}{2+x} e^x$.

Montrer qu'on a $u(x) \leq 1$ pour tout x dans \mathbb{R}_+ .

Pour cela on supposera qu'il existe x_1 vérifiant $0 < x_1 < 2$ et $u(x_1) > 1$; on montrera qu'on a alors $u'(x_1) < 0$ et on aboutira à une contradiction.

Déduire de cette étude qu'on a $\varphi(x) \leq x e^{-\frac{x}{2}}$ pour tout x dans \mathbb{R}_+ .

Quelle majoration en résulte-t-il pour f ?

6.5. On définit la fonction v sur \mathbb{R}_+ par :
$$v(x) = u(x) e^{\frac{x}{2}}.$$

Montrer qu'on a $v \geq 1$. Quelle minoration en résulte-t-il pour f ? Montrer qu'on a $\frac{4}{9} \left(1 - \frac{2}{27}\right) \leq L \leq \frac{4}{9}$.