

Première partie.

1. Pour répondre à cette question, il suffit de calculer le déterminant des vecteurs u_1 et u_2 dans la base (e_1, e_2) : la famille sera une base si et seulement si ce déterminant est non nul.

(a) Le vecteur u_2 étant nul,

la famille (u_1, u_2) est liée.

(b) On a : $u_1 = 3e_1 - e_2$ et $u_2 = e_1 + 3e_2$ avec $[u_1, u_2] = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 10$ donc

la famille (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

(c) On a : $u_1 = 3e_1 + e_2$ et $u_2 = -3e_1 + e_2$ avec $[u_1, u_2] = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$ donc

la famille (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

(d) On a : $z_1 = \frac{1-i}{2}$ et $z_2 = \frac{-3}{2}\sqrt{2} + \frac{3}{2}i\sqrt{2}$ donc $u_1 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$ et $u_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}u_1$ et

la famille (u_1, u_2) est liée.

2. Par définition, l'application $g_{a,b}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Soient u_1 et u_1 deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, d'affixes respectives z_1 et z_1 . Alors :

$$\begin{aligned} f_{a,b}(z_1 + z_2) &= a(z_1 + z_2) + b(\overline{z_1 + z_2}) = az_1 + az_2 + b\overline{z_1} + b\overline{z_2} \\ &= (az_1 + b\overline{z_1}) + (az_2 + b\overline{z_2}) = f_{a,b}(z_1) + f_{a,b}(z_2). \end{aligned}$$

Or l'affixe d'une somme est la somme des affixes, donc $g_{a,b}(u_1 + u_2) = g_{a,b}(u_1) + g_{a,b}(u_2)$. Soient u un vecteur de $\mathbb{R}^2$ d'affixe z et α un réel. Alors $\overline{\alpha z} = \alpha \overline{z}$ donc

$$f_{a,b}(\alpha z) = \alpha f_{a,b}(z)$$

et, toujours parce que α est réel : $g_{a,b}(\alpha u) = \alpha g_{a,b}(u)$.

On peut conclure que :

l'application $g_{a,b}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

3. (a) D'après la question précédente, on montre qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

D'une part, G est non vide : il contient l'application nulle $g_{0,0}$.

D'autre part, si $g_{a,b}$ et $g_{c,d}$ sont deux éléments de G et si α est un réel, alors $\alpha g_{a,b} + g_{c,d} = g_{\alpha a + b, \alpha c + d}$ car $\overline{\alpha z} = \alpha \overline{z}$ donc $\alpha g_{a,b} + g_{c,d} \in G$.

En conclusion,

l'ensemble G est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

- (b) On a vu que $G \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

Par ailleurs, la famille $(g_{1,0}, g_{i,0}, g_{0,1}, g_{0,i})$ est libre. En effet, si $g_{a,b}$ est l'application nulle, alors $f_{a,b}$ également donc $a + b = f_{a,b}(1) = 0$ et $a - b = \frac{1}{i}f_{a,b}(i) = 0$ puis $a = b = 0$. Il en résulte que si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont quatre réels tels que

$$0 = \alpha g_{1,0} + \beta g_{i,0} + \gamma g_{0,1} + \delta g_{0,i} = g_{a,b}$$

avec $a = \alpha + i\beta$ et $b = \gamma + i\delta$, alors $a = b = 0$ puis $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.
On en déduit que

$$4 \leq \dim G \leq \dim \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) = 4$$

soit $\dim G = \dim \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, et comme $G \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$:

$$\boxed{G = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}.$$

4. (a) i. L'application $f_{a,b}$ est définie par $z \mapsto az$ avec a réel non nul.
L'application $g_{a,b}$ est une homothétie de rapport a .
 ii. L'application $f_{a,b}$ est définie par $z \mapsto e^{i\theta}z$ avec θ réel.
L'application $g_{a,b}$ est une rotation d'angle θ .
 iii. L'application $f_{a,b}$ est définie par $z \mapsto \bar{z}$.
L'application $g_{a,b}$ la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.
 (b) Comme composée d'une rotation et d'une réflexion du plan,
l'application $g_{a,b} \circ g_{a',b'}$ est une isométrie vectorielle négative de $\mathbb{R}^2$.
 Il s'agit donc d'une réflexion.
 On note que $e^{i\frac{\theta}{2}}$ est invariant par $f_{a,b} \circ f_{a',b'} : z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$ donc le vecteur

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e_1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e_2$$

est invariant par $g_{a,b} \circ g_{a',b'}$.

L'application $g_{a,b} \circ g_{a',b'}$ est la réflexion d'hyperplan la droite dirigée par
 $\cos(\theta/2)e_1 + \sin(\theta/2)e_2$.

5. (a) Si $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, alors $s(x) = x_1 - x_2$ et $p(x) = x_1$ donc
 $x + s(x) = 2x_1 = 2p(x)$.

$$\boxed{id + s = 2p}.$$

- (b) On a vu à la question 4.(b) que l'application $z \mapsto e^{2i\alpha}\bar{z}$ représente la réflexion par rapport à la droite engendrée par u_α . D'après la question précédente, la projection cherchée est donc associée à l'application

$$z \mapsto \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}e^{2i\alpha}\bar{z}$$

et ainsi

$$\boxed{(a, b) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{2i\alpha}\right)}.$$

6. Si x et y sont des réels, alors

$$\begin{aligned} f_{a,b}(x + iy) &= (a_r + ia_i)(x + iy) + (b_r + ib_i)(x - iy) \\ &= ((a_r + b_r)x + (b_i - a_i)y) + i((a_i + b_i)x + (a_r - b_r)y) \end{aligned}$$

donc l'application $g_{a,b}$ associe à tout vecteur $xe_1 + ye_2$ de $\mathbb{R}^2$ le vecteur

$$((a_r + b_r)x + (b_i - a_i)y)e_1 + ((a_i + b_i)x + (a_r - b_r)y)e_2.$$

On en déduit que :

$$\boxed{G_{a,b} = \begin{pmatrix} a_r + b_r & b_i - a_i \\ a_i + b_i & a_r - b_r \end{pmatrix}}.$$

7. Si l'on suppose que $a \in \mathbb{R}$, alors $a_i = 0$ et la matrice précédente est symétrique à coefficients réels. On en déduit que
la matrice $G_{a,b}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et ses sous-espaces propres sont orthogonaux.
8. (a) Soit $P_{a,b}$ le polynôme caractéristique de $G_{a,b}$. Alors

$$P_{a,b}(X) = \begin{vmatrix} X - (a_r + b_r) & -b_i + a_i \\ -a_i - b_i & X - (a_r - b_r) \end{vmatrix} = X^2 - 2a_r X + a_r^2 - b_r^2 - b_i^2 + a_i^2$$

soit

$$P_{a,b}(X) = X^2 - 2\operatorname{Re}(a)X + |a|^2 - |b|^2.$$

- (b) Le discriminant est :

$$\Delta = 4 \left((\operatorname{Re}(a))^2 - |a|^2 + |b|^2 \right) = 4 \left(|b|^2 - (\operatorname{Im}(a))^2 \right).$$

Si l'on suppose $|b|^2 \neq (\operatorname{Im}(a))^2$, alors $\Delta \neq 0$ et $P_{a,b}$ admet deux racines distinctes, qui sont les valeurs propres de $G_{a,b}$. Puisqu'elle est carrée d'ordre 2,

la matrice $G_{a,b}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Pour qu'elle soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il est nécessaire que $P_{a,b}$ soit scindé dans $\mathbb{R}[X]$, et cette condition sera ici suffisante puisque $G_{a,b}$ admettra deux valeurs propres distinctes. En conclusion,

la matrice $G_{a,b}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $|b| > |\operatorname{Im}(a)|$
c'est-à-dire $\Delta > 0$.

- (c) Si l'on suppose $|b|^2 = (\operatorname{Im}(a))^2$, alors $\Delta = 0$ et $G_{a,b}$ admet une valeur propre double qui est $\lambda = \operatorname{Re}(a)$.

Si $G_{a,b}$ est diagonalisable, elle est semblable à λI_2 donc égale à λI_2 (car pour toute matrice inversible Q l'on a : $Q^{-1}(\lambda I_2)Q = \lambda I_2$). Puisque $G_{a,b} = \begin{pmatrix} a_r + b_r & b_i - a_i \\ a_i + b_i & a_r - b_r \end{pmatrix}$, cela impose

$$a_r + b_r = \lambda = a_r - b_r \quad \text{et} \quad b_i - a_i = 0 = a_i + b_i$$

ou encore $b_r = 0$ et $a_i = 0$. Comme $|b|^2 = |a_i|^2$, on en déduit bien que $a \in \mathbb{R}$ et $b = 0$.

Réciproquement, si $a \in \mathbb{R}$ et $b = 0$, alors $G_{a,b} = \begin{pmatrix} a_r + b_r & b_i - a_i \\ a_i + b_i & a_r - b_r \end{pmatrix} = a_r I_2$ est diagonale réelle, donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

La matrice $G_{a,b}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $a \in \mathbb{R}$ et $b = 0$.

- (d) L'endomorphisme $g_{a,b}$ est diagonalisable si et seulement si $G_{a,b}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. D'après les questions précédentes, on peut conclure que :

l'endomorphisme $g_{a,b}$ est diagonalisable si et seulement si $|b| > |\operatorname{Im}(a)|$ ou $b = \operatorname{Im}(a) = 0$.

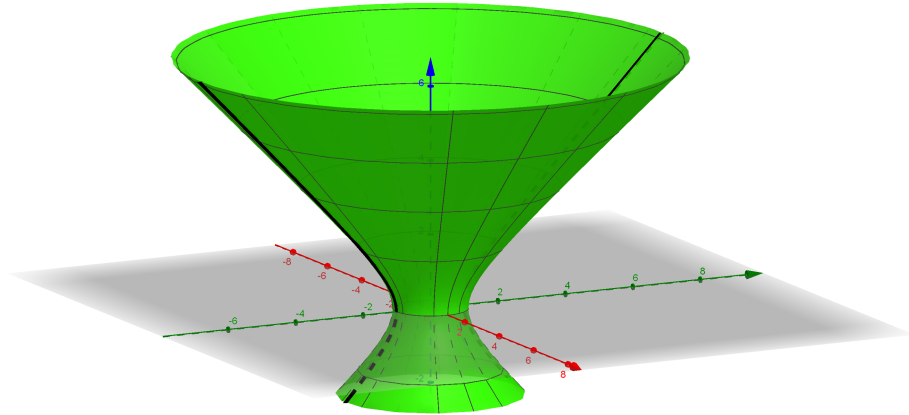
Deuxième partie.

1. (a) Cette intersection a pour équations $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} y^2 - z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$.
Il s'agit d'une hyperbole.
- (b) Cette intersection a pour équations $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ z = a \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 + a^2 \\ z = a \end{cases}$.
Il s'agit d'un cercle.

On en déduit que

la surface S est de révolution d'axe (Oz) .

- (c) Le plan d'équation $x = 0$ contenant l'axe de révolution, l'hyperbole du (a) en est une méridienne.



2. (a) Le symétrique du point M de coordonnées (x, y, z) par rapport au plan $z = 0$ est le point M' de coordonnées $(x, y, -z)$. Or

$$M \in S \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 = 1 = x^2 + y^2 - (-z)^2 \Rightarrow M' \in S$$

donc

la surface S admet le plan d'équation $z = 0$ pour plan de symétrie.

- (b) Le symétrique du point M de coordonnées (x, y, z) par rapport au plan $x = y$ est le point M' de coordonnées (y, x, z) . Or

$$M \in S \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 = 1 = y^2 + x^2 - z^2 \Rightarrow M' \in S$$

donc

la surface S admet le plan d'équation $x = y$ pour plan de symétrie.

En fait, tout plan contenant l'axe de révolution est un plan de symétrie de S .

Un tel plan admet une équation du type $x \cos(\theta) + y \sin(\theta) = 0$, et le symétrique par rapport à ce plan du point M de coordonnées (x, y, z) est le point M' de coordonnées (X, Y, Z) avec

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(2\theta) & -\sin(2\theta) & 0 \\ -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

et puisque $X^2 + Y^2 - Z^2 = x^2 + y^2 - z^2$, l'on a bien $M \in s \Rightarrow M' \in S$.

- (c) La symétrie par rapport à cette droite est la composée des symétries par rapport aux plans d'équation $x = 0$ et $z = 0$. Comme ces plans sont des plans de symétrie de S ,

la droite donnée est un axe de symétrie de S .

On aurait pu aussi raisonner comme précédent, le symétrique par rapport à cette droite du point de coordonnées (x, y, z) étant le point de coordonnées $(-x, y, -z)$.

3. (a) Un point M de coordonnées (x, y, z) est sur la surface Σ s'il est sur le même parallèle qu'un point $A(a, b, c)$ de Δ . Or ce parallèle peut être vu comme l'intersection d'une sphère centrée en un point de (Oz) , par exemple O , et d'un plan perpendiculaire à (Oz) passant par A . Ce parallèle est donc défini par les conditions :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ z = c \end{cases}.$$

Ainsi : $M \in \Sigma \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} a = 1 \\ b = c \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ z = c \end{cases}$

ou encore : $M \in \Sigma \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \begin{cases} x^2 + y^2 + c^2 = 1 + 2c^2 \\ z = c \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

On a bien établi que

$$\boxed{\Sigma = S.}$$

- (b) La surface S est donc la réunion des droites obtenues par rotation autour de l'axe (Oz) de la droite Δ , ce qui permet de conclure que

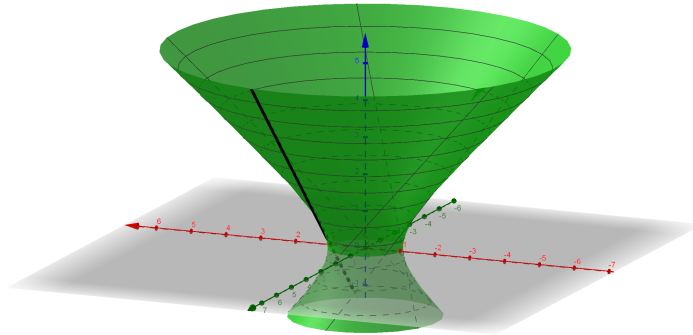
la surface S est réglée.

Une rotation autour de l'axe (Oz) peut être caractérisée par une matrice du type :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'image dans une telle rotation d'un point de coordonnées $(1, t, t)$ de Δ est le point de coordonnées $(\cos(\theta) - t \sin(\theta), \sin(\theta) + t \cos(\theta), t)$ donc une famille de génératrices est constituée des droites de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \cos(\theta) - t \sin(\theta) \\ y = \sin(\theta) + t \cos(\theta) \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



Ci-dessus le tracé de Δ et de S comme surface réglée

4. (a) Si S contient une droite horizontale, celle-ci est contenue dans l'intersection de S et d'un plan horizontal d'équation $z = a$, et l'on a vu qu'une telle intersection est un cercle ; or un cercle ne contient pas de droite.

La surface S ne contient aucune droite horizontale.

- (b) Tout vecteur directeur de D a sa troisième composante non nulle (sinon ce vecteur est orthogonal à $\vec{k}$ et la droite est horizontale), donc, quitte à diviser par cette composante non nulle, on peut choisir un vecteur directeur $\vec{d}$ de D dont la troisième composante est égale à 1, donc du type $\vec{d} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$ avec α et β réels.

La droite D n'est pas parallèle au plan d'équation $z = 0$, donc elle rencontre ce plan en un point A de coordonnées $(a, b, 0)$ avec a et b réels.

Une représentation paramétrique de $D = A + \text{Vect}(\vec{d})$ est alors :

$$\begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

et

le résultat est établi.

- (c) La droite D est contenue dans S si et seulement si, pour tout t réel :

$$(a + \alpha t)^2 + (b + \beta t)^2 - t^2 = 1$$

ce qui équivaut à dire que le polynôme $P(t) = (\alpha^2 + \beta^2 - 1)t^2 + 2(a\alpha + b\beta)t + (a^2 + b^2 - 1)$ est identiquement nul, cette condition équivalant à la nullité des coefficients, soit

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 = a^2 + b^2 \text{ et } a\alpha + b\beta = 0.$$

Mais

$$\begin{pmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{pmatrix} \in O(2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & a\alpha + b\beta \\ a\alpha + b\beta & \alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix}$$

donc

$$D \subset S \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{pmatrix} \in O(2).$$

- (d) Les éléments de $O(2)$ sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

avec θ réel, et représentent alors une rotation (isométrie positive du plan) ou de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

avec θ réel, et représentent une réflexion (isométrie négative du plan).

- (e) D'après les questions précédentes, les droites incluses dans S admettent une représentation paramétrique du type :

$$\begin{cases} x = \cos(\theta) - t \sin(\theta) \\ y = \sin(\theta) + t \cos(\theta) \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \cos(\theta) + t \sin(\theta) \\ y = \sin(\theta) - t \cos(\theta) \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Troisième partie.

1. (a) On donne :

$$\boxed{z(\theta) = \theta e^{i\theta}.$$

- (b) La fonction z est dérivable comme produit de telles fonctions, et facilement :

$$\boxed{\forall \theta \in [0; 2\pi], \quad z'(\theta) = (1 + i\theta) e^{i\theta}.$$

- (c) Puisque $z'(\theta) = x'(\theta) + iy'(\theta)$ et $|e^{i\theta}| = 1$ on a :

$$\boxed{\left\| \frac{d\vec{OM}}{d\theta}(\theta) \right\| = \sqrt{1 + \theta^2}.$$

Notamment, cette quantité ne s'annule pas, donc

la courbe Γ est régulière.

2. (a) La fonction f est dérivable sur D , et pour tout $\theta \in D$:

$$f'(\theta) = 2 + \tan^2(\theta) > 0.$$

On en déduit que f croît de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, +\infty[$, puis croît de $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ sur $\mathbb{R}$, et enfin croît de $\left]\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ sur $]-\infty, 2\pi]$.

- (b) On voit que f est trois fois strictement croissante et continue d'un intervalle I sur son intervalle image $J = f(I)$. Elle réalise à chaque fois une bijection de I sur J , et dans les trois cas, 0 appartient à J , donc admet un unique antécédent dans I . On peut préciser que $\theta_0 = 0$.

L'existence des réels θ_0 , θ_2 et θ_4 est établie.

- (c) Les points $M(\theta)$ en lesquels existent une tangente horizontale correspondent aux valeurs de $\theta \in [0; 2\pi]$ pour lesquelles $y'(\theta) = 0$. Or

$$y'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \sin(\theta) + \theta \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow f(\theta) = 0$$

car $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ ne peuvent s'annuler simultanément.

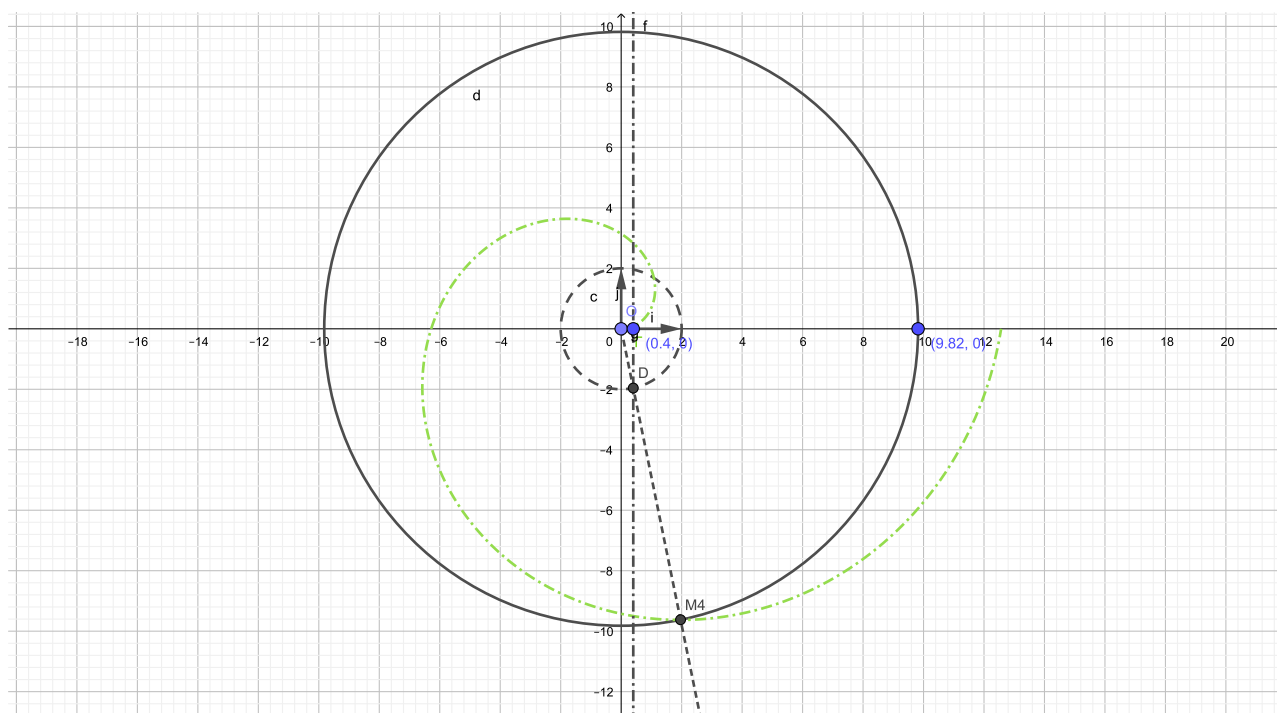
Les points à tangente horizontale sont les points $M(\theta_0)$, $M(\theta_2)$ et $M(\theta_4)$.

3. (a) On trace les axes gradués, puis le cercle unité, et l'on place la valeur $\cos(\theta_4)$ sur l'axe des abscisses.

Avec l'équerre, on trace la perpendiculaire en ce point à l'axe (Ox) , laquelle coupe le cercle unité en deux points. On retient celui d'ordonnée négative puisque

$$\theta_4 \in \left]\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right].$$

En le joignant à l'origine, on trace une droite qui définit l'angle θ_4 .

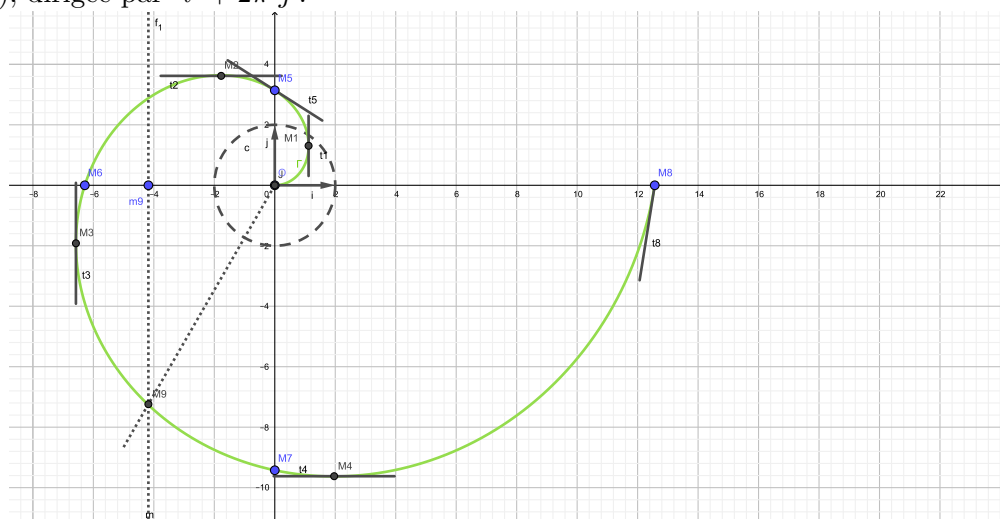


Cette droite coupe le cercle centré en 0 de rayon θ_4 en un unique point d'abscisse positive : c'est le point $M(\theta_4)$.

- (b) On procède comme ci-dessus pour les points $M(\theta_i)$ avec $1 \leq i \leq 4$, avec leurs tangentes horizontales ou verticales. Le point $M(0)$ est l'origine, avec tangente horizontale.

Les autres points sont sur l'un des axes de coordonnées. Celui de paramètre $\frac{\pi}{2}$ a une tangente dirigée par le vecteur $-\pi \vec{i} + 2\vec{j}$.

- (c) On a donc placé 9 points, dont 6 avec leur tangente. On ajoute la tangente en $M(2\pi)$, dirigée par $\vec{i} + 2\pi \vec{j}$.



On place $M\left(\frac{4\pi}{3}\right)$, de coordonnées $\left(\frac{-2\pi}{3}, \frac{-2\pi\sqrt{3}}{3}\right)$, situé sur la droite (facilement constructible) passant par l'origine de pente $\sqrt{3}$, avec $\frac{2\pi}{3} \approx 2,09$.

4. (a) L'aide de $D(R)$ est égale à πR^2 .
Les demi-droites d'origine O dirigées par $\vec{u}(t_k)$, pour $0 \leq k \leq n-1$, partitionnent $D(R)$ en n secteurs angulaires de même aire, égale à $\frac{\pi R^2}{n}$.

$$\boxed{\mathcal{A}_k(R) = \frac{\pi}{n} R^2.}$$

- (b) Pour $\theta \in [t_k, t_{k+1}]$ l'on a :

$$t_k \leq \left\| \overrightarrow{OM}(\theta) \right\| = \theta \leq t_{k+1}$$

donc $D_k(t_k) \subset \Delta_k \subset D_k(t_{k+1})$ puis, d'après la question précédente :

$$\frac{\pi}{n} t_k^2 \leq \mathcal{A}_k \leq \frac{\pi}{n} t_{k+1}^2$$

ce qui donne :

$$\boxed{\frac{4\pi^3}{n^3} k^2 \leq \mathcal{A}_k \leq \frac{4\pi^3}{n^3} (k+1)^2.}$$

- (c) On procède par récurrence sur N .

Le résultat étant clair pour $N = 0$, supposons le vrai pour un entier N fixé. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{N+1} p^2 &= \sum_{p=0}^N p^2 + (N+1)^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + (N+1)^2 \\ &= \frac{N+1}{6} (2N^2 + 7N + 6) = \frac{N+1}{6} (N+2)(2N+3) \end{aligned}$$

ce qui établit l'hérédité.

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{p=0}^N p^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.}$$

- (d) D'après la question (b) :

$$\frac{4\pi^3}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{A}_k \leq \frac{4\pi^3}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2$$

donc d'après la question (c) :

$$\frac{2\pi^3}{3n^2} (n-1)(2n-1) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{A}_k \leq \frac{2\pi^3}{3n^2} (n+1)(2n+1).$$

Il reste à remarquer que $\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{A}_k = \mathcal{A}$.

$$\boxed{\frac{2\pi^3}{3n^2} (n-1)(2n-1) \leq \mathcal{A} \leq \frac{2\pi^3}{3n^2} (n+1)(2n+1).}$$

Ce résultat vaut pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Puisque

$$\lim_n \frac{2\pi^3}{3n^2} (n-1)(2n-1) = \lim_n \frac{2\pi^3}{3n^2} (n+1)(2n+1) = \lim_n \frac{4\pi n^2}{3n^2} = \frac{4\pi^3}{3}$$

un passage à la limite fournit :

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{4\pi^3}{3}.}$$

5. (a) On a vu que cette tangente est dirigée par $\vec{d} = -\pi \vec{i} + 2\vec{j}$. Un point m appartient à cette tangente si les vecteurs $M\left(\frac{\pi}{2}\right)m$ et $\vec{d}$ sont liés, donc si

$$0 = \left[\overrightarrow{M\left(\frac{\pi}{2}\right)m}, \vec{d} \right] = \begin{vmatrix} x & -\pi \\ y - \frac{\pi}{2} & 2 \end{vmatrix} = 2x + \pi y - \frac{\pi^2}{2}.$$

Le point N a donc pour coordonnées $\left(\frac{\pi^2}{4}, 0\right)$ donc

$$\boxed{ON = \frac{\pi^2}{4}.}$$

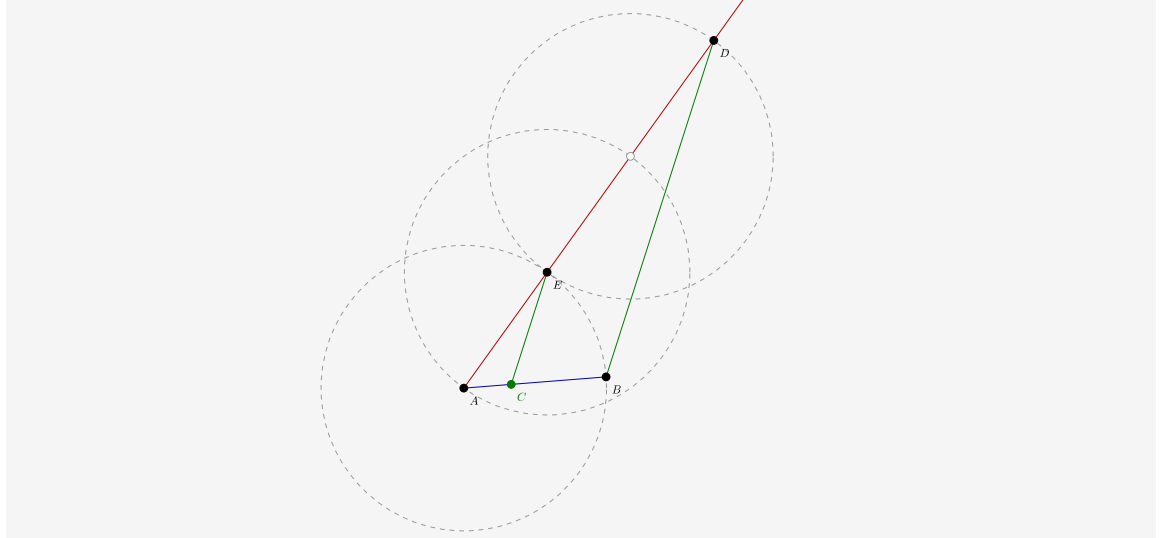
- (b) Le périmètre du cercle de centre O et passant par le point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est

$$2\pi \left\| \overrightarrow{OM\left(\frac{\pi}{2}\right)} \right\| = \pi^2.$$

Il suffit de construire le point N_1 tel que

$$\boxed{\overrightarrow{ON_1} = 4\overrightarrow{ON}.}$$

6. (a) On construit une demi-droite issue de A ne contenant pas le segment $[AB]$. On note E l'intersection de cette demi-droite avec le cercle centré en A de rayon AB . Toujours avec le compas, on construit sur cette demi-droite le point D tel que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AE}$. On trace le segment $[BD]$. La parallèle à (BD) coupe $[AB]$ en un point C .



D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{1}{3}.$$

(b) On construit le point P selon la méthode précédente ; on note $A = M\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

On trace le cercle de centre O passant par P . Il coupe Γ en un point $B = M(\theta)$ tel que

$$\theta = \|\vec{OB}\| = \|\vec{OP}\| = \frac{1}{3} \left\| \vec{OM}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right\| = \frac{4\pi}{9}$$

donc $B = M\left(\frac{4\pi}{9}\right)$ et l'angle $\frac{4\pi}{9}$ est alors déterminé puisque

$$\vec{OB} = \vec{OM}\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{4\pi}{9} \vec{u}\left(\frac{4\pi}{9}\right).$$

Le dessin ci-dessous ne détaille que la dernière construction.

