Concours d'Admission 1987
MATHEMATIQUES II
(3 pages dactylographiées)

MP'

L'espace affine euclidien orienté de dimension 3 est rapporté à un repère direct orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ noté R_0. On désigne par O_1 et O_2 les points définis par

$$\overrightarrow{OO_1} = \vec{i} \qquad \overrightarrow{OO_2} = \vec{k}$$

On appellera R_1 et R_2 respectivement les repères $(O_1 ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(O_2 ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

A tout point M de l'espace on associera ses coordonnées (x, y, z) dans R_0, (x_1, y, z) dans R_1, (x, y, z_2) dans R_2. Le temps t décrit l'ensemble des réels.

Il est demandé d'illustrer par des figures les situations géométriques rencontrées.
La seconde partie est dans une large mesure indépendante de la première.

PREMIERE PARTIE : Etude d'une surface

Dans cette partie l'espace est rapporté à R_0.

A toute valeur du temps t on associe la droite Δ_t définie par les équations :

$$\begin{cases} x \cos t + y \sin t - 1 = 0 \\ y - z \sin t = 0 \end{cases}$$

On désigne par S la surface engendrée par Δ_t lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

I.1. Montrer que S a deux plans de symétrie et un axe de symétrie (on ne cherchera pas à établir que ce sont les seuls).

I.2. Déterminer les enveloppes des projections orthogonales de Δ_t sur les plans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et $(O; \vec{j}, \vec{k})$. Quelle est la projection orthogonale de S sur chacun de ces deux plans ?

I.3. Soit $\mathcal{C}$ le cylindre de révolution d'axe $(O; \vec{k})$ et de rayon 1. Etablir qu'il y a identité entre l'ensemble des droites Δ_t et l'ensemble des droites coplanaires à la droite $(O ; \vec{i})$ et tangentes à $\mathcal{C}$ en un point (dépendant de la droite) situé dans le plan d'équation $z - 1 = 0$.

N.B. Les génératrices du cylindre seront considérées comme des tangentes particulières à ce cylindre.

I.4.a) On désigne par P_t et Q_t les points d'intersection de Δ_t respectivement avec la droite $(O; \vec{i})$ et le plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$. Discuter l'existence de P_t et de Q_t ; donner leurs coordonnées dans R_0 et déterminer les ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ qu'ils décrivent respectivement lorsque t varie.

b) Faire un croquis en perspective représentant les axes de coordonnées, la portion du cylindre $\mathcal{C}$ comprise entre les plans $z = 0$ et $z = 1$, les ensembles $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et, pour une valeur de t appartenant à $]0, \frac{\pi}{2}[$, le segment $[P_t\, Q_t]$ et sa projection orthogonale sur le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

c) Déterminer et représenter les intersections de S avec les trois plans de coordonnées.

I.5. Etablir que la surface S est contenue dans la surface S' d'équation cartésienne $x^2(y^2 - z^2) + (z - y^2)^2 = 0$

Préciser les points de S' n'appartenant pas à S.

I.6. Discuter suivant les valeurs de λ l'allure de la section de S par les plans d'équation $z - \lambda = 0$.

On tracera avec soin, sur trois graphiques distincts, les projections orthogonales des sections correspondant à :

$$\lambda = \frac{1}{3}, \qquad \lambda = \frac{2}{3}, \qquad \lambda = 2 .$$

I.7. Etablir que S admet le paramétrage suivant :

$$x = \cos t - \lambda \sin^2 t$$
$$y = \sin t\,(1 + \lambda \cos t)$$
$$z = 1 + \lambda \cos t$$

Quels sont les points de S obtenus pour des couples (t, λ) distincts (on ne distinguera pas deux couples (t, λ) et (t', λ) tels que t et t' soient égaux modulo 2π) ?

DEUXIEME PARTIE : Etude d'une courbe

II.1.a) Soit Σ la sphère de centre O_2 et passant par O_1. Etablir que Δ_t coupe Σ en deux points distincts dont l'un, noté M_t, a pour coordonnées dans R_0 :

$$M_t \begin{cases} x = \cos t + \sin^2 t \\ y = \sin t\,(1 - \cos t) \\ z = 1 - \cos t \end{cases}$$

Donner les coordonnées de l'autre point, qu'on appellera N_t.

b) Soit Γ la courbe décrite par M_t lorsque t décrit $\mathbb{R}$ et Γ' la courbe décrite par N_t. Comment peut-on déduire Γ' de Γ ?

Dans toute la suite de la seconde partie on étudie quelques propriétés de Γ en utilisant le repère R_1.

On définit deux vecteurs mobiles $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$, en abrégé $\vec{u}$ et $\vec{v}$, par

$$\vec{u}(t) = \cos t\, \vec{i} + \sin t\, \vec{j}$$
$$\vec{v}(t) = -\sin t\, \vec{i} - \cos t\, \vec{j}$$

II.2. Etablir que le point M_t défini au II.1 vérifie pour tout t :

$$\overrightarrow{O_1M_t} = (\vec{k} + \vec{u}(t))\,(1 - \cos t)$$

Préciser la nature du cône $\mathcal{K}$ engendré par la droite $(O_1 ; \vec{k} + \vec{u}(t))$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$. Comparer Γ à $\Sigma \cap \mathcal{K}$.

II.3. Construire les projections orthogonales de Γ sur les trois plans de coordonnées de R_1 : dans chaque cas on tracera également, lorsqu'elles existent, les courbes délimitant les projections de Σ et $\mathcal{K}$, en précisant la position par rapport à ces courbes de la projection de Γ et les éventuels points communs.

II.4.a) Faire l'étude locale de Γ aux points de paramètre $t = 0$ et $t = \pi$; on précisera la tangente et le plan osculateur en chacun de ces points.

b) Donner la courbure et la torsion de Γ au point de paramètre π.

II.5.a) Soit g une fonction polynomiale du second degré des coordonnées x_1, y, z :

$$g(x_1, y, z) = Ax_1^2 + By^2 + Cz^2 + Dx_1y + Ex_1z + Fyz + Gx_1 + Hy + Kz + L.$$

.../...

TOURNER LA PAGE

On suppose que la quadrique représentée dans le repère R_1 par $g(x_1, y, z) = 0$ contient Γ.

Etablir que la quadrique d'équation $g(x_1, -y, z) = 0$ dans R_1, contient aussi Γ.

Montrer que $D = F = H = 0$ et que $L = 0$

Montrer que g peut s'écrire sous la forme :

$g(x_1, y, z) = Ah(x_1, y, z) + G\ell(x_1, y, z)$

où h et ℓ sont deux polynômes du second degré très simples.

b) Montrer que toutes les quadriques trouvées ci-dessus contiennent bien Γ et qu'elles sont toutes, sauf une, de révolution.

Pour A non nul, donner en fonction de $\alpha = \frac{G}{A}$, l'axe de révolution et la nature de la surface.

TROISIEME PARTIE : Interprétation cinématique

L'espace est maintenant rapporté à R_2.

III.1.a) Déterminer les fonctions vectorielles de classe C^1, $t \mapsto \overrightarrow{W(t)}$ telles que pour tout t

$$\vec{W}'(t) = (\vec{k} - \vec{u}(t)) \wedge \vec{W}(t)$$

b) Etablir qu'il existe une base orthonormale mobile $(\vec{I}(t), \vec{J}(t), \vec{K}(t))$ unique vérifiant les conditions suivantes :

i) les fonctions $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

ii) $\vec{I}(0) = \vec{i}$, $\vec{J}(0) = \vec{j}$, $\vec{K}(0) = \vec{k}$

iii) Le vecteur rotation de cette base mobile $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est à chaque instant : $\overrightarrow{\Omega(t)} = \vec{k} - \vec{u}(t)$.

Etablir que l'on a, pour tout t :

$\vec{I}(t) = \vec{u}(t)$, $\vec{J}(t) = \cos t\, \overrightarrow{v(t)} - \sin t\, \vec{k}$

$\vec{K}(t) = \sin t\, \overrightarrow{v(t)} + \cos t\, \vec{k}$

III.2. On considère le point mobile $M(t)$ lié au repère $(O_2; \vec{I}(t), \vec{J}(t), \vec{K}(t))$ qui à l'instant zéro coïncide avec O_1.

Etudier son mouvement par rapport au repère $(O_2; \overrightarrow{u(t)}, \overrightarrow{v(t)}, \vec{k})$; soit γ sa trajectoire dans ce repère. Quelle est la surface engendrée par γ dans R_0 lorsque t varie ?

III.3. Déterminer le plan médiateur du segment $[O_1 M(t)]$ par son équation dans le repère $(O_2 ; \vec{u}(t), \vec{v}(t), \vec{k})$. Quelle est la courbe σ symétrique de γ par rapport à ce plan ? Faire une figure représentant R_0, σ, γ, les points $M(t)$ et O_1, la droite Δ_t et sa projection orthogonale sur le plan $(O_2; \vec{i}, \vec{j})$. En déduire une définition cinématique de Γ et S.

****
***
*