

Préambule

Soit une fonction f donnée, définie sur \mathbb{R} , paire et continue, dont l'intégrale sur $[0, +\infty[$ est absolument convergente.

Nous appelons transformée de Fourier de f , la fonction F qui associe à tout réel x l'intégrale $\int_0^{\infty} f(t) \cos(xt) dt$.

L'épreuve se compose de deux problèmes obligatoires mettant en oeuvre la détermination de la transformée de Fourier de deux fonctions paires. Pour la première, un mode discret mettant en oeuvre une série de fonctions s'appuyant sur un développement de Fourier assurera la solution. Pour la seconde, un mode continu de résolution est proposé par l'intermédiaire d'une équation différentielle du second ordre.

PROBLEME 1

Transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto \frac{1}{cht}$.

I Introduction au calcul d'intégrales élémentaires

1- a) Les nombres réels a, b , et A ($A > 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$) étant donnés, calculer l'intégrale :

$$I(a, b, A) = \int_0^A e^{(a+ib)u} du$$

b) Préciser alors les valeurs de :

$$J(a, b, A) = \int_0^A e^{au} \cos(bu) du \quad \text{et} \quad K(a, b, A) = \int_0^A e^{au} \sin(bu) du$$

2- Dédurre alors des résultats précédents, l'intégrale suivante :

$$L(n, t) = \int_0^{\pi} \operatorname{ch}(tx) \cdot \sin(nx) dx$$

où n est un entier strictement positif donné et t un nombre réel arbitraire donné.

On exprimera L à l'aide de n, t et de $cht\pi$.

3- a) Soient p un nombre réel strictement positif et x un nombre réel quelconque. Montrer la convergence de l'intégrale généralisée suivante :

$$M(x, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos(xt) dt$$

b) En déduire la valeur explicite de cette intégrale à l'aide de x et de p .

II Développement en série de Fourier d'une fonction

Soit t un réel quelconque donné. On désignera par f_t , la fonction définie sur \mathbb{R} , 2π -périodique, impaire, telle que :

$$\text{sur }]0, \pi[\quad , \quad f_t(x) = \operatorname{ch}(tx).$$

1- a) Montrer que, pour tout entier relatif k , $f_t(k\pi) = 0$.

b) Construire pour $t = 0,5$ la courbe représentative de la restriction de $f_{0,5}$ à l'intervalle $[-2\pi, +2\pi]$.

2- Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de la fonction f_t .

3- a) En précisant le théorème utilisé dont on vérifiera soigneusement les hypothèses dans le cas présent, donner la valeur de la somme de la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad \text{pour tout } x \in]-\pi, +\pi[.$$

b) Déduire du résultat précédent une expression de $\operatorname{ch}(t \frac{\pi}{2})$ de la forme :

$$\operatorname{ch}(t \frac{\pi}{2}) = \sum_{p=0}^{\infty} U_p(t)$$

où U_p est rationnel par rapport à l'indice p .

4- a) En utilisant les résultats précédents, montrer que $\frac{1}{\operatorname{ch}(t \frac{\pi}{2})}$ s'exprime simplement à l'aide de la somme de la

série alternée
$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (2p+1)}{(2p+1)^2 + t^2}$$

b) En déduire une expression de $\frac{\pi}{4}$ comme somme d'une série numérique.

5- On suppose t strictement positif, déterminer la suite $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de réels vérifiant :

$$\frac{1}{\operatorname{ch} t} = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p e^{-(2p+1)t}$$

Dans la suite du problème, on considère l'égalité suivante :

$$\frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t} = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p \cos(xt) e^{-(2p+1)t}$$

et l'on pose : $v_p(x, t) = \alpha_p \cos(xt) e^{-(2p+1)t}$

III Calcul de la transformée de Fourier d'une fonction

On se propose de calculer la transformée de Fourier de $\frac{1}{\operatorname{ch} t}$ sous la forme :

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t} dt$$

en utilisant l'expression précédente du II-5.

1- a) Montrer que, quelque soit x , l'intégrale généralisée définissant $F(x)$ est absolument convergente.

b) On pose $R_N(x) = \int_0^{\infty} \left[\frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t} - \sum_{p=0}^N v_p(x, t) \right] dt$

où N est un entier positif quelconque.

En utilisant une majoration de $\sum_{p=N+1}^{\infty} \alpha_p e^{-(2p+1)t}$ prouver que : $|R_N(x)| \leq \frac{2}{2N+3}$

2- a) En déduire, alors, que pour tout x :

$$F(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \int_0^{\infty} v_p(x, t) dt$$

b) Terminer alors la détermination de la fonction F à l'aide des résultats I.3 et II.4.

3- Quelle remarque peut-on faire sur la transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} t \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

PROBLEME 2

Transformée de Fourier de la fonction $g \quad t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$.

1- Convergence d'intégrales

Prouver que, pour tout x réel, les intégrales :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt \quad \text{sont absolument convergentes.}$$

On note désormais H et G , les fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$H(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)} dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$$

G étant la transformée de Fourier cherchée de la fonction g .

2- Continuité et dérivabilité de H

Soit $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, la suite de fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$h_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)} dt$$

- Montrer que, pour tout entier $n > 0$, la fonction h_n est continue sur \mathbb{R} .
- En utilisant une majoration simple de $|\sin(xt)|$, montrer que la suite (h_n) converge uniformément, sur tout intervalle borné, vers la fonction H . Que peut-on en déduire pour H ?
- Montrer que, pour tout entier $n > 0$, la fonction h_n est de classe C^1 sur \mathbb{R} et exprimer sa dérivée à l'aide d'une intégrale.
- Montrer que la suite (h'_n) des dérivées converge uniformément sur \mathbb{R} , vers G .
- Quelle est la propriété pour H et quelle relation entre H et G peut-on en déduire ?

3- Dérivabilité de G

Dans ce qui suit, on suppose $x \neq 0$ et même, dans un premier temps, $x > 0$.

On pose pour tout $x > 0$ et pour tout entier n :

$$g_n(x) = \int_0^n \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$$

a) Prouver que pour tout n , g_n est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et montrer que sa dérivée g'_n peut s'exprimer par :

$$g'_n(x) = \frac{1}{x} \left[\frac{n \cos(nx)}{1+n^2} - \int_0^n \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \cos(xt) dt \right]$$

b) Montrer que, si $a > 0$, la suite g'_n converge uniformément sur $[a, +\infty[$ vers une fonction définie sur $]0, +\infty[$ que l'on précisera à l'aide d'une intégrale. Que peut-on en déduire pour G ?

c) Montrer que sur \mathbb{R}^* , la fonction H est de classe C^2 et que pour tout $x \neq 0$:

$$H''(x) = G'(x) = - \int_0^\infty \frac{t \sin(xt)}{1+t^2} dt$$

4- Détermination de G(x)

On pourra, dans cette dernière question admettre le résultat suivant :

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$$

a) Calculer pour tout $x \neq 0$, $H''(x) - H(x)$ et montrer ainsi que H est solution d'une équation différentielle simple.

b) Donner sur $]0, +\infty[$, la solution générale de cette équation. Déterminer alors $H(x)$ pour tout $x \geq 0$.

c) En déduire la transformée de Fourier $G(x)$ de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$.

d) Exprimer pour $x = 0$ une relation simple entre $F(0)$ du problème 1 et $G(0)$. Retrouver ainsi dans ce cas particulier le résultat obtenu au III 2-b) du problème 1.