

CINP - Corrigé de Mathématiques II - Filière MP

Session 2022

Par M.TARQI

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées¹.

•••••

Exercice 1

Q1. $V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1.$

Si $x_i = x_j$ et $i \neq j$, alors les colonnes d'indices i et j seront identiques et donc le déterminant serait nul et dans ce cas la relation de récurrence est bien vérifiée.

Q2. $P(t) = V(x_1, \dots, x_{n-1}, t)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$, pour cela il suffit pour cela de développer le déterminant suivant la dernière colonne.

Soit $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. $P(x_k) = V(x_1, \dots, x_{n-1}, x_k) = 0$ car c'est un déterminant ayant deux colonnes égales. x_1, \dots, x_{n-1} sont donc des racines du polynôme P . Compte-tenu du degré de ce polynôme,

il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P(t) = \lambda \prod_{k=1}^{n-1} (t - x_k)$. Le coefficient de t^{n-1} est λ . Par ailleurs, en

développant $V(x_1, \dots, x_{n-1}, t)$ suivant la dernière colonne, le coefficient de t^{n-1} est $V(x_1, \dots, x_{n-1})$ donc $\lambda = V(x_1, \dots, x_{n-1})$ et on a :

$$V(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = V(x_1, \dots, x_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1} (x_n - x_k).$$

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Pour $n = 2$, $\mathcal{P}(2)$ est vraie d'après la question **Q1**.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soient $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in \mathbb{C}$. On a :

$$V(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n-1} (x_{n+1} - x_k) \times V(x_1, \dots, x_n) \quad (\text{relation de récurrence}) \quad (1)$$

$$= \prod_{k=1}^{n-1} (x_{n+1} - x_k) \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \quad (2)$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) \quad (3)$$

1. medtarqi@yahoo.fr

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

Q3. On met i en facteur dans chaque colonne de la matrice. On voit alors apparaître le déterminant de Vandermonde $V(1, 2, \dots, n)$. Le déterminant recherché vaut donc :

$$\det(A) = n!V(1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

$$= n! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) \quad (5)$$

$$= n! \prod_{1 \leq j \leq n} \prod_{1 \leq i < j} (j - i) \quad (6)$$

$$= n! \prod_{1 \leq j \leq n} (j - 1)! \quad (7)$$

$$= 1!2! \dots n! \quad (8)$$

Q4. Notons z_1, z_2, \dots, z_n les racines n -ème de l'unité, $z_k = e^{\frac{2ki\pi}{n}}$. Les nombres complexes $a_k = e^{\frac{ki\pi}{n}}$ vérifient $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 0$. (la somme des racines n -ème de l'unité est nulle).

Supposons que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{k=1}^n x_k^i = 0$. Ces égalités se traduisent par le système suivant :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_1 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit la matrice A associée à ce système n'est pas inversible (le système admet une solution non triviale), donc $\det(A) = 0$. Mais $\det(A) = x_1 x_2 \dots x_n V(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ par hypothèse, ce qui est absurde. Donc l'hypothèse précédente est fautive, et donc il existe au moins un $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que

$$\sum_{k=1}^n x_k^i = 0.$$

Exercice 2

Q5. Comme $\forall k \in \mathbb{N}, \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$ et que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\|A^k\|}{k!}$ converge, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente et comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, alors la série converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q6. Soit $r > 0$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\|A\| \leq r$, on a $\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{r^k}{k!}$. Donc la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ converge

normalement et donc uniformément sur tout compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et comme les applications $A \mapsto \frac{A^k}{k!}$ sont continues, alors $A \mapsto e^A$ est continue sur tout compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc elle est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q7. On a $\left\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H\|^k}{k!} = \|H\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H\|^{k-1}}{k!}$, on conclut donc que $\lim_{H \rightarrow 0} \frac{1}{\|H\|} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} = 0$
 puisque $\lim_{H \rightarrow 0} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H\|^{k-1}}{k!} = 0$.

On a $e^A = I_n + H + H\varepsilon(H)$ où $\varepsilon(H) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^{k-1}}{k!}$ qui tend vers 0 quand H tend vers 0. Ceci montre que l'application $A \mapsto e^A$ est différentiable en 0 et que sa différentielle est $H \mapsto H$ (l'application identique).

Problème

Partie I - Exponentielle d'une matrice symétrique

Q8. Si $b = 0$, $A \in \mathcal{S}_3^+$ si, et seulement si, $a \geq 0$. Si $b \neq 0$, on remarque que $A - (a - b)I_3 = bJ$, donc $\text{rg}(A - (a - b)I_3) = \text{rg}(J) = 2$ et par conséquent $a - b$ est une valeur propre d'ordre 2. Si λ est une valeur propre différent de $a - b$, alors $\lambda + 2(a - b) = \text{tr}(A) = 3a$, ce qui donne $\lambda = a + 2b$. Ainsi, les seules valeurs propres de A sont $a - b$ et $a + 2b$, donc $A \in \mathcal{S}_3^+$ si, et seulement si, $a - b \geq 0$ et $a + 2b \geq 0$.

Q9. On peut vérifier par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $J^k = 3^{k-1}J$, il est clair que la relation n'est pas valable pour $k = 0$.

Puisque $A = (a - b)I_3 + bJ$ et $I_3J = JI_3$, donc $e^A = e^{(a-b)I_3}e^{bJ}$. Or $e^{(a-b)I_3} = e^{a-b}I_3$ et $e^{bJ} = I_3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^k 3^{k-1}}{k!} J = I_3 + \frac{1}{3}(e^{3b} - 1)J$, d'où :

$$e^A = e^{a-b}I_3 + \frac{1}{3}(e^{a+2b} - e^{a-b})J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha = \frac{2}{3}e^{a-b} + \frac{1}{3}e^{a+2b}$ et $\beta = \frac{1}{3}e^{a-b} - \frac{1}{3}e^{a-b}$. On voit bien que $\alpha \geq \beta$ et $\alpha + 2\beta \geq 0$, ce qui permet de conclure que $e^A \in \mathcal{S}_3^+$.

Q10. Il s'agit d'une application linéaire en dimension finie, donc elle est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

D'après le théorème spectral A est diagonalisable, il existe alors $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, Δ une matrice diagonale telle que :

$$A = P\Delta P^{-1}$$

Montrons par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k = P\Delta^k P^{-1}.$$

la propriété est vraie pour $k = 0$ et $k = 1$. Si elle est vraie pour $k \in \mathbb{N}$, alors

$$A^{k+1} = A^k A = (P\Delta^k P^{-1})(P\Delta P^{-1}) = P(\Delta^k \Delta)P^{-1} = P\Delta^{k+1}P^{-1}.$$

d'autre part, en notant $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$, on a clairement :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \Delta^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} = P \sum_{k=0}^N \frac{\Delta^k}{k!} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^N \frac{\lambda_1^k}{k!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^N \frac{\lambda_2^k}{k!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=0}^N \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} P^{-1}$. On utilisant la conti-

nuité de l'application $M \mapsto PMP^{-1}$, on en déduit $e^A = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$, donc e^A est

semblable à $D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$. En particulier, $\text{Sp}(e^A) = \text{Sp}(D) = \{e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}\}$ qui est

includ dans \mathbb{R}^+ , donc $e^A \in \mathcal{S}_n^+$.

Partie II - Produit de Hadamard de deux matrices

Q11. Soit $A \in \mathcal{S}_3^+$, donc $a \geq b$ et $a + 2b \geq 0$. Comme dans la question **Q8.**, $E(A) \in \mathcal{S}_3^+$ si, et seulement si, $e^a \geq e^b$ et $e^a + 2e^b \geq 0$, ce qui est vraie puisque l'exponentielle est croissante et positive.

Q12. Posons $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors ${}^tYDY = \sum_{i=1}^n d_i y_i^2$. Comme les d_i sont positifs,

alors ${}^tYDY \geq 0$.

(\Leftarrow) Supposons $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \geq 0$.

Pour X vecteur propre associé à la valeur propre λ , on obtient ${}^tXAX = \lambda {}^tXX$ avec ${}^tXX > 0$ et donc $\lambda \geq 0$.

(\Rightarrow) Supposons $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$.

Par le théorème spectral, on peut écrire $A = PD^tP$ avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale. De plus, les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ de A . Pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a alors ${}^tXAX = {}^tYDY$ avec $Y = {}^tPX$ puis ${}^tXAX = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq 0$.

Q13. Soit A et B deux matrices de \mathcal{S}_n^+ et α, β deux réels positifs. Donc pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a ${}^tXAX \geq 0$ et ${}^tXBX \geq 0$, donc ${}^tX(\alpha A + \beta B)X = \alpha {}^tXAX + \beta {}^tXBX \geq 0$ et par conséquent $\alpha A + \beta B \in \mathcal{S}_n^+$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ de \mathcal{S}_3 . Il est évident que A et B sont dans \mathcal{S}_3^+ (

d'après **Q18.**), mais $AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \notin \mathcal{S}_3^+$.

Q14. D'après le théorème spectral $A = {}^tPDP$ avec P orthogonale et $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ diagonale à coefficients diagonaux ≥ 0 (car $A \in \mathcal{S}_n^+$). Si on pose $\Delta = \text{diag}\left(\lambda_1^{\frac{1}{2}}, \lambda_2^{\frac{1}{2}}, \dots, \lambda_n^{\frac{1}{2}}\right)$ et $R = {}^tP\Delta P$

alors R est symétrique et ses valeurs propres sont les $\lambda_i^{\frac{1}{2}} \geq 0$ (R est semblable à Δ puisque $P^{-1} = {}^tP$). Ainsi R est symétrique et positive et vérifie $R^2 = A$.

Q15. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Par définition $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$, mais $a_{ij} = \sum_{k=1}^n u_{ik}u_{kj} = \sum_{k=1}^n u_{ki}u_{kj}$ puisque $A = U^2$

et U est symétrique, de même $b_{ij} = \sum_{l=1}^n v_{li}v_{lj}$, d'où :

$$c_{ij} = \left(\sum_{k=1}^n u_{ki}u_{kj} \right) \left(\sum_{l=1}^n u_{li}u_{lj} \right)$$

Il est clair que $A * B$ est symétrique puisque pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $c_{ij} = a_{ij}b_{ij} = a_{ji}b_{ji} = c_{ji}$. Pour démontrer que $A * B$ est positive, nous considérons une matrice $R \in \mathcal{S}_n^+$ telle que $A = R^2$. On a alors pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$c_{ij} = \left(\sum_{k=1}^n u_{ki}u_{kj} \right) b_{ij}$$

et pour ${}^tX = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$${}^tXCX = \sum_{1 \leq i, j \leq n} c_{ij} x_i x_j = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} b_{ij} u_{ki} x_i u_{kj} x_j \right)$$

La matrice B étant positive, la somme $\sum_{1 \leq i, j \leq n} b_{ij} (u_{ki} x_i)(u_{kj} x_j)$ est donc positive pour tout $k \in$

$\llbracket 1, n \rrbracket$. On en déduit que ${}^tXCX \geq 0$, la matrice $A * B$ est donc positive.

Q16. Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la définition des matrices A^{*p} permet de les écrire sous la forme $A^{*p} =$

$(a_{ij}^p)_{1 \leq i, j \leq n}$. Les coefficients de la matrice $T_N = \sum_{p=0}^N \frac{1}{p} A^{*p}$ sont donc donnés par $(T_N)_{ij} = \sum_{p=0}^N \frac{1}{p} a_{ij}^p$

