Corrigé Mines PSI Maths II 2011 par Christophe Hénocq

1) La fonction $t \longmapsto \phi(t, x_0) - \lambda(t)$ est continue sur $[0, T(x_0)[$ et ne s'annule pas. D'après le théorème de la valeur intermédiaire, elle garde un signe constant. Or $\phi(0, x_0) - \lambda(0) = x_0 > 0$, donc $\phi(t, x_0) - \lambda(t) > 0$ sur $[0, T(x_0)[$. On en déduit que $\phi(., x_0)$ a une dérivée strictement positive sur $[0, T(x_0)[$. Elle est donc strictement croissante sur cet intervalle. Elle admet donc une limite, éventuellement infinie, en $T(x_0)$.

2) On a $\phi'(t, x_0) = \dfrac{2}{\phi(t, x_0) - \lambda(t)}$. La fonction λ, étant continue sur $\mathbf{R}^+$, admet une limite finie en $T(x_0)$. On a donc $\lim\limits_{t \to T(x_0)} \phi'(t, x_0) = 0$. On en déduit que $t \longmapsto \phi'((t, x_0)$ est prolongeable par continuité à tout l'intervalle $[0, T(x_0]$. Elle est donc bornée sur cet intervalle. Soit M tel que $\forall u \in [0, T(x_0)[\ \ \phi'(u, x_0) \leq M$. Alors, pour tout $t \in [0, T(x_0)[$, on intègre l'inégalité précédente sur $[0, t]$:

$$\phi(t, x_0) \leq x_0 + Mt \leq x_0 + MT(x_0)$$

Cela contredit l'hypothèse $\lim\limits_{t \to T(x_0)} \phi(t, x_0) = +\infty$. En conséquence $\lim\limits_{t \to T(x_0)} \phi(t, x_0) = l \in \mathbf{R}$.

3) On a $\forall t \in [0, T(x_0)[\ \ \phi(t, x_0) > \lambda(t)$. En passant à la limite quand $t \to T(x_0)$, on a $l \geq \lambda(T(x_0))$.
On suppose $l > \lambda(T(x_0))$. On a $\lim\limits_{t \to T(x_0)} \phi'(t, x_0) = \dfrac{2}{l - \lambda(T(x_0))}$. On en déduit que $\phi(., x_0)$ admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ à l'intervalle $[0, T(x_0)]$. On applique la partie 1] du théorème 1 : il existe $\epsilon > 0$ et une fonction x solution de $E(\lambda)$ sur l'intervalle $]T(x_0) - \epsilon, T(x_0) + \epsilon[$ vérifiant $x(T(x_0)) = l$. D'après la partie 2] du théorème, x et $\phi(., x_0)$ coïncidant en $T(x_0)$ sont égales sur $]T(x_0) - \epsilon, T(x_0)]$. Cela contredit le caractère maximal de $\phi(., x_0)$. On peut conclure que $l = \lambda(T(x_0))$.

4) On utilise la partie 2] du théorème 1. Si $\phi(., x_0)$ et $\phi(., y_0)$ coïncident en t_1, elles sont égales sur $[0, \min(T(x_0), T(y_0))[$. Ceci est faux en $t = 0$. Donc $\forall t \in [0, \min(T(x_0), T(y_0))[\ \ \ \phi(t, y_0) - \phi(t, x_0) \neq 0$. Cette fonction étant continue, elle garde un signe constant sur cet intervalle. On a donc

$$\forall t \in [0, \min(T(x_0), T(y_0))[\quad \phi(t, y_0) - \phi(t, x_0) > 0$$

5) On suppose par l'absurde $T(y_0) < T(x_0)$. Alors sur l'intervalle $[0, T(y_0)[$, on a $\phi(t, y_0) - \phi(t, x_0) > 0$. En passant à la limite quand $t \to T(y_0)^-$, on a $\phi(T(y_0), x_0) \leq \lambda(T(y_0))$. Ceci contredit le résultat de la question 1) : $\phi(t, x_0) - \lambda(t) > 0$ sur $[0, T(x_0)[$. On peut conclure $T(y_0) \geq T(x_0)$.

6) On doit intégrer $x'(t) = \dfrac{2}{x(t)}$ (sur $[0, a[$ avec $x(0) = x_0 > 0$). On a $x(t)x'(t) = 2$. On trouve $x(t)^2 = 4t + x_0^2$ donc $x(t) = \sqrt{x_0^2 + 4t}$, solution sur $\mathbf{R}^+$ donc maximale. Il n'y a pas capture.

7) On veut $\dfrac{a-2}{2\sqrt{1-t}} = \dfrac{2}{\phi_0(t) - \lambda(t)} = \dfrac{2}{a - 4 + (6-a)\sqrt{1-t}}$. On choisit $a = 4$, alors $\phi_0(t) = 4 - 2\sqrt{1-t}$. Cette fonction n'est pas dérivable en 1. Elle est donc solution sur $[0, 1[$. C'est une solution maximale. On a bien $T(2) = 1$.

8) Si $t \in [0, \min(1, T(x_0))[$, on a en utilisant l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt}(\ln|\phi(t) - \phi_0(t)|) = \frac{\phi'(t) - \phi_0'(t)}{\phi(t) - \phi_0(t)} = \frac{-2}{(\phi(t) - \lambda_1(t))(\phi_0(t) - \lambda_1(t))} = \frac{-1}{(\phi(t) - \lambda_1(t))\sqrt{1-t}}$$

9) La fonction C est bien définie puisque deux solutions d'un même problème $E(\lambda)$ ne coïncident en aucun point. On dérive C :

$$C'(t) = \frac{-1}{(\phi(t) - \lambda_1(t))\sqrt{1-t}} + \frac{1}{(\phi(t) - \phi_0(t))\sqrt{1-t}} + \frac{(\phi'(t) - \phi_0'(t))\sqrt{1-t}}{(\phi(t) - \phi_0(t))^2}$$

En utilisant l'équation différentielle, on montre que le dernier terme est égal à $\dfrac{-2}{(\phi(t)-\phi_0(t))(\phi(t)-\lambda_1(t))}$. Cela donne $C'(t)=0$.

10) On a $C(0)=\ln(2-x_0)-\dfrac{2}{x_0-2}$. Un étude rapide de la fonction $t\longmapsto \ln(2-t)-\dfrac{2}{t-2}$ montre qu'elle est croissante strictement. Sa valeur en 0 est $\ln(2)+1$. Donc $C(0)>\ln(2)+1$. Supposons $T(x_0)<1$. Alors $C(T(x_0)=\ln|\lambda_1(T(x_0))-\phi_0(T(x_0))|-\dfrac{2\sqrt{1-T(x_0)}}{\lambda_1(T(x_0))-\phi_0(T(x_0))}=\ln\left(2\sqrt{1-T(x_0)}\right)+1<\ln(2)+1$. Cela contredit le caractère constant de C. Donc $T(x_0)\geq 1$. Mais, d'après la question 5) $T(x_0)\leq T(2)=1$. Donc $T(x_0)=1$.

11) Ici $x_0>2$. D'après 5), $1=T(2)\leq T(x_0)$. On écrit $C(t)=\ln\left(\phi(t)-4+2\sqrt{1-t}\right)-\dfrac{2\sqrt{1-t}}{\phi(t)-4+2\sqrt{1-t}}$ Donc $C(t)\leq\ln\left(\phi(t)-4+2\sqrt{1-t}\right)$. On sait que C est constante donc bornée. Or ϕ est croissante sur $[0,1[$ donc nécessairement $\displaystyle\lim_{t\to 1^-}\phi(t)>4$. En utilisant la question 3), cela exclut que $T(x_0)$ puisse être égal à 1 car $\lambda_1(1)=4$. Donc $T(x_0)>1$. On résout l'équation $E(\lambda_1)$ sur $[1,T(x_0)[$: $\phi'(t)=\dfrac{2}{\phi(t)-4}$. On trouve $\phi(t)=4+\sqrt{4t+D}$ avec D une constante. Cette fonction est solution sur $[1,+\infty[$. Donc $T(x_0)=+\infty$. Il n'y a pas de capture dans ce cas.

12) On a $\dfrac{|\lambda_1(1-s)-\lambda_1(1-t)|}{\sqrt{t-s}}=4\dfrac{\sqrt{t}-\sqrt{s}}{\sqrt{t-s}}=\dfrac{4\sqrt{1-s/t}}{1+\sqrt{s/t}}$. La fonction $F:x\longmapsto 4\sqrt{1-x}$ convient.
Si $1\leq x<y$, on a $\dfrac{|\lambda_1(y)-\lambda_1(x)|}{\sqrt{y-x}}=0$.
Si $x<1\leq y$, on a $\dfrac{|\lambda_1(y)-\lambda_1(x)|}{\sqrt{y-x}}=\dfrac{4\sqrt{1-x}}{\sqrt{y-x}}\leq 4$. Mais ce rapport vaut 4 lorsque $y=1$.
Si $x<y<1$ alors $\dfrac{|\lambda_1(y)-\lambda_1(x)|}{\sqrt{y-x}}=\dfrac{F((1-y)/(1-x))}{1+\sqrt{(1-y)/(1-x)}}\leq 4$. Donc $M(\lambda_1)=4$.

13) Si $M(\lambda)=0$, λ est constante. Comme $\lambda(0)=0$, λ est la fonction nulle. Il n'y a pas de capture dans ce cas. Donc $M(\lambda)>0$.

14) On cherche $\hat{x}$ sous la forme $t\longmapsto\dfrac{1}{r}x(bt)$. On calcule $\hat{x}'(t)=\dfrac{b}{r}\dfrac{1}{x(bt)-\lambda(bt)}=\dfrac{1}{\hat{x}(t)-\hat{\lambda}_r(t)}$ en choisissant $b=r^2$. On choisit r pour que son temps de vie soit 1. C'est-à-dire $\dfrac{T(x_0)}{r^2}=1$ donc $r=1/\sqrt{T(x_0)}$. On a alors le prolongement par continuité en 1 : $\hat{x}(1)=\hat{\lambda}_r(1)$.

15) Soit $t\in[0,1]$. Comme x est croissante, on a $x(t)-\lambda(t)\leq x(1)-\lambda(t)\leq\lambda(1)-\lambda(t)\leq M(\lambda)\sqrt{1-t}$. Ainsi pour tout $u\in[0,1[$ on a $\dfrac{1}{x(u)-\lambda(u)}\geq\dfrac{1}{M(\lambda)\sqrt{1-u}}$. Donc $\dfrac{x'(u)}{2}\geq\dfrac{1}{M(\lambda)\sqrt{1-u}}$.. Soit $t\in[0,1[$. On intègre l'inégalité précédente sur $[t,1[$. Cela donne : $x(1)-x(t)\geq\dfrac{4\sqrt{1-t}}{M(\lambda)}$.

16) On a $x(t)-\lambda(t)=x(t)-x(1)+\lambda(1)-\lambda(t)\leq\dfrac{-4}{M(\lambda)}\sqrt{1-t}+M(\lambda)\sqrt{1-t}$.

17) On refait le raisonnement de la question 15) : pasage de la première inégalité à la seconde. Ainsi $x(1)-x(t)\geq\dfrac{4\sqrt{1-t}}{\mu}$. Alors, comme dans la question 16) $x(t)-\lambda(t)\leq\dfrac{-4}{\mu}\sqrt{1-t}+M(\lambda)\sqrt{1-t}$. on peut conclure que $M(\lambda)-\dfrac{4}{\mu}>0$.

18) En recommençant on obtient l'existence de la suite (u_n) donnée dans l'énoncé. On introduit la fonction $g : x \longmapsto M(\lambda) - \dfrac{4}{x}$ définie sur $]0, +\infty[$. Le trinôme $-x^2 + M(\lambda)x - 4$ ayant un discriminant < 0 est toujours strictement négatif. On en déduit que (u_n) décroît. Comme elle est minorée, elle converge. Sa limite est nulle car l'équation $g(x) = x$ n'a pas de solution. Mais on aurait $\lim u_{n+1} = -\infty$, ce qui est faux. Il y a donc une contradiction. L'hypothèse faite à la question 12) : $T(x_0) < +\infty$ est donc fausse. Ainsi $T(x_0) = +\infty$: il n'y a pas de capture.