

Problème — Mines-Ponts PSI II, 2019

I – Quelques exemples

1. La fonction $g(x) = e^x$ est positive et continue sur \mathbb{R}_+ et l'on a $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$, donc g est bien une densité. On réalise une intégration par parties. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m_{n+1}(g) = \int_0^{+\infty} \underbrace{x^{n+1}}_u \underbrace{e^{-x}}_{v'} dx = [-x^{n+1}e^{-x}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (n+1)x^n (-e^{-x}) dx = (n+1)m_n(g).$$

La convergence du crochet (vers 0) montre précisément que « si $m_n(g)$ existe, alors $m_{n+1}(g)$ existe aussi et vérifie la relation $m_{n+1}(g) = (n+1)m_n(g)$ ». Par une récurrence simple immédiate, $m_n(g)$ existe pour tout entier naturel n et $m_n(g) = n!$.

2. Pour tout entier naturel n , la fonction $x \mapsto x^n \varphi(x)$ est continue sur \mathbb{R} , paire et $0 \leq x^n e^{-x^2/2} \leq x^n e^{-x/2}$ si $x \geq 1$, d'où l'existence des moments $m_n(\varphi)$ d'après celle de $m_n(g)$ montrée à la question précédente. On peut aussi raisonner directement :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^* : x^{n+2} e^{-x^2/2} = \exp\left(\underbrace{(n+2) \ln x - x^2/2}_{\sim -x^2/2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \therefore \quad x^n \varphi(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \mathfrak{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^{2p+1} \varphi(x)$ est impaire, donc $m_{2p+1}(\varphi) = 0$ comme intégrale *convergente* (il faut le rappeler) d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0.

4. On réalise une intégration par parties. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x^{2p-2}}_{u'} \underbrace{e^{-x^2/2}}_v dx &= \left[\frac{x^{2p-1}}{2p-1} e^{-x^2/2} \right]_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow +\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2p-1}}{2p-1} (-x e^{-x^2/2}) dx = \frac{1}{2p-1} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p} e^{-x^2/2} dx \quad \therefore \\ m_{2p}(\varphi) &= (2p-1)m_{2(p-1)}(\varphi) = (2p-1)(2p-3)m_{2(p-2)}(\varphi) = \dots = (2p-1)(2p-3) \times \dots \times 3 \times 1 \times m_0(\varphi) \\ &= \frac{(2p)!}{2p(2p-2) \times \dots \times 2} \times m_0(\varphi) = \frac{(2p)!}{2^p p!} \times m_0(\varphi) = \frac{(2p)!}{2^p p!}. \end{aligned}$$

La validité de l'intégration par parties est automatiquement assurée par la question 2.

5. La fonction $a(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ est continue positive et $\int_{-\infty}^{+\infty} a(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x \right) = 1$, donc a est une densité. Son moment d'ordre 1 est infini par divergence de $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ par comparaison avec $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

II – Théorème de Stone-Weierstraß

6. La formule du binôme de Newton donne $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1$.

7. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, x)$ (loi binomiale de paramètre nx), alors $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx.$$

Une alternative algébrique consiste à poser $S(x, y) = (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. Alors,

$$(1) \quad x \frac{\partial S}{\partial x}(x, y) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = nx(x+y)^{n-1},$$

d'où l'égalité demandée en évaluant $x \frac{\partial S}{\partial x}(x, 1-x)$.

Si l'on ne reconnaît pas l'espérance d'une loi binomiale et si l'on ne pense pas à utiliser la dérivation des polynômes à deux variables, la relation s'obtient enfin par le calcul : la relation $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$, valable pour tout $k \geq 1$, donne

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &\stackrel{(j=k-1)}{=} nx \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} = nx(x + (1-x))^{n-1} = nx. \end{aligned}$$

8. Avec les notations probabilistes de la question précédente,

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \mathbf{E}(X^2) \stackrel{\text{(Koenig)}}{=} \mathbf{V}(X) + \mathbf{E}(X)^2 = nx(1-x) + n^2 x^2 = nx + n(n-1)x^2.$$

L'approche polynomiale consiste à réappliquer l'opérateur $x \frac{\partial}{\partial x}$, donc de l'appliquer à (1), ce qui donne

$$(2) \quad \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = x[n(x+y)^{n-1} + n(n-1)x(x+y)^{n-2}],$$

d'où l'égalité demandée en évaluant (2) en $y = 1-x$.

On peut enfin rester dans les calculs sur les coefficients binomiaux et réutiliser la transformation de la question 7 pour écrire

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= nx \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-k} \\ &\stackrel{(j=k-2)}{=} n(n-1)x^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^j (1-x)^{n-2-j} = n(n-1)x^2(x + (1-x))^{n-2} = n(n-1)x^2, \end{aligned}$$

et l'on conclut comme avec les polynômes en reprenant la somme de la question précédente.

9. La somme se calcule facilement à partir des sommes des questions 6 à 8. On note S_i la somme de la question i :

$$\sum_{k=0}^n (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = S_8 - 2nxS_7 + n^2x^2S_6 = [nx + n(n-1)x^2] - 2n^2x^2 + n^2x^2 = nx(1-x).$$

Une étude de fonction montre immédiatement que la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $x \mapsto x(1-x)$ est positive et admet son maximum en $1/2$, où elle prend la valeur $1/4$. On peut donc prendre $C = 1/4$, ce choix étant optimal. On peut aussi se passer d'étude de fonction et prendre la majoration évidente $C = 1$, ce qui répond à la question et suffit pour la suite.

10. L'énoncé invite implicitement à donner une expression sommatoire de $B_n(f) - f$ et à séparer la somme donnant le polynôme $B_n(f)$ selon la partition $\llbracket 0, n \rrbracket = X \uplus Y$, soit

$$\begin{aligned} B_n(f)(x) - f(x) &\stackrel{(Q.6)}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] \\ &= \sum_{k \in X} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] + \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] = S_X + S_Y \\ |S_X| &\leq \sum_{k \in X} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq \varepsilon \sum_{k \in X} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \stackrel{(Q.6)}{=} \varepsilon \\ |S_Y| &\leq \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq 2 \|f\|_\infty \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad \therefore \\ |B_n(f)(x) - f(x)| &\leq \varepsilon + 2 \|f\|_\infty \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

11. Le plus efficace, comme en début de partie, est de procéder de manière probabiliste. On note que

$$(3) \quad Y = \left\{ k \in \llbracket 0, n \rrbracket ; \left| x - \frac{k}{n} \right| > \alpha \right\} = \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket ; |k - nx| > \alpha\} = \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket ; (k - nx)^2 > \alpha^2\}.$$

Alors, toujours avec $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, x)$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

$$\sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| > n\alpha) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{(n\alpha)^2} = \frac{nx(1-x)}{\alpha^2 n^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Il s'ensuit que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_Y = 0$, ce qui, couplé avec la majoration de $|S_X|$ donne bien $\|B_n - f\|_\infty \leq 2\varepsilon$ à.p.c.r.

Plus directement, mais cela revient peu ou prou à redémontrer l'inégalité de Markov pour un loi binomiale, ce qui explique que l'on trouve exactement la même majoration, on utilise la majoration obtenue à la question 9 en partant de (3) :

$$\sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{k \in Y} \frac{(k-nx)^2}{\alpha^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=0}^n (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

III – Le problème des moments sur $[0, 1]$

12. Soit l'application Ψ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\Psi(P) = \int_0^1 (f(x) - g(x))P(x) dx$. Elle est bien définie (intégrales de fonctions continues sur un segment) et, par linéarité de l'intégrale, c'est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, l'égalité $m_n(f) = m_n(g)$ traduit que $\Psi(X^n) = 0$. Ainsi, si $m_n(f) = m_n(g)$ pour tout entier naturel n , les images par Ψ de tous les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ sont nulles donc Ψ est nulle, c.q.f.d.

13. Soit $(P_n)_n$ une suite de polynômes convergeant uniformément vers $f - g$ sur $[0, 1]$. Alors,

$$(f - g)P_n - (f - g)^2 = (f - g)(P_n - (f - g)) \quad \therefore \quad \|(f - g)P_n - (f - g)^2\|_\infty \leq \|f - g\|_\infty \times \|P_n - (f - g)\|_\infty.$$

Ainsi, la suite de fonctions $((f - g)P_n)_n$ converge uniformément vers $(f - g)^2$ sur le segment $[0, 1]$. On peut donc passer à la limite sous l'intégrale, ce qui donne $\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx = 0$.

14. On en déduit que $f = g$, l'intégrale d'une fonction positive continue n'étant nulle que si cette fonction est nulle.

IV – Transformée de Fourier de la densité gaussienne

15. Dans toute cette partie, on considère la fonction f définie par

$$\forall (\xi, t) \in \mathbb{R}^2 : f(\xi, t) = e^{it\xi} \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{it\xi - t^2/2}.$$

Étant de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^2 , elle est en particulier continue par rapport à ξ pour tout t et continue par morceaux par rapport à t pour tout ξ . De plus, pour tout $(\xi, t) \in \mathbb{R}^2$, $|f(\xi, t)| = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = \varphi(t)$, fonction intégrable ainsi qu'il a été prouvé à la question 2. Le théorème de continuité des intégrales à paramètre s'applique donc sur \mathbb{R} et garantit que $\hat{\varphi}$ est bien définie et continue sur \mathbb{R} .

16. Avec les notations de la question précédente,

i) pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(\xi, t)$ est intégrable sur \mathbb{R} , ainsi que le prouvent la domination réalisée à la question 16 et le théorème de comparaison ;

ii) on a déjà vu que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(\xi, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ;

iii) pour $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial}{\partial \xi}(f(\xi, t)) = it f(\xi, t)$ est continue (p.m.) ;

iv) pour tout $(\xi, t) \in \mathbb{R}^2$, $|it f(\xi, t)| = |t| \varphi(t)$, fonction intégrable d'après la question 2 (ou, directement, parce qu'elle est paire et admet sur \mathbb{R}_+ comme primitive la fonction $-\frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, de limite finie (en l'occurrence, 0) en $\pm\infty$).

Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre s'applique donc et montre que $\hat{\varphi}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , l'expression de sa dérivée étant $\hat{\varphi}'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \xi}(f(\xi, t)) dt = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi} t e^{-t^2/2} dt$.

17. On réalise une intégration par parties.

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}'(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{ie^{it\xi}}_u \underbrace{te^{-t^2/2}}_{v'} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ie^{it\xi} (-e^{-t^2/2}) \right]_{t \rightarrow -\infty}^{t \rightarrow +\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} i^2 \xi e^{it\xi} (-e^{-t^2/2}) dt \\ &= 0 - \frac{\xi}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi} e^{-t^2/2} dt = -\xi \hat{\varphi}(\xi). \end{aligned}$$

Ainsi, $\hat{\varphi}$ est solution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre un $y'(\xi) + \xi y(\xi) = 0$.

18. Plus précisément, puisque $\hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 1$, $\hat{\varphi}$ est l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y'(\xi) + \xi y(\xi) = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$ L'équation différentielle s'intègre en $c \exp\left(\int -\xi d\xi\right) = c e^{-\xi^2/2}$, ce qui, avec $y'(0) = 1$, donne $c = 1$, soit $\hat{\varphi}(\xi) = e^{\xi^2/2}$.

V – Le problème des moments sur \mathbb{R}_+

19. La fonction f donnée par $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$ est clairement continue sur \mathbb{R}_+^* et positive. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors,

$$x^\alpha e^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2} = \exp\left(\alpha \ln x - \frac{1}{2}(\ln(x))^2\right).$$

Quand x tend vers 0 par valeurs positives, comme vers $+\infty$, $|\ln x|$ tend vers l'infini, donc

$$\alpha \ln x - \frac{1}{2}(\ln(x))^2 \sim -\frac{1}{2}(\ln(x))^2 \xrightarrow[\text{ou } x>0]{x \rightarrow +\infty} -\infty \quad \therefore \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^\alpha e^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2} = 0.$$

Pour $\alpha = -1$, cela montre que f est continue en 0. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha = n + 3$, cela montre que $x^n f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathfrak{o}(1/x^2)$, donc que f admet un moment d'ordre n . Enfin,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2} \frac{dx}{x} \underset{(u=\ln x)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi},$$

donc f est bien une densité sur \mathbb{R}_+ .

Notons que le changement de variable pouvait aussi servir à obtenir l'existence des moments. On obtient en effet

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2} \frac{dx}{x} \underset{(u=\ln x)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{nx} e^{-u^2/2} du.$$

Pour $n > 0$, $e^{nu} e^{-u^2/2} = e^{-u} e^{-u^2/2 + (n+1)u} \underset{u \rightarrow +\infty}{=} \mathfrak{o}(e^{-u})$, d'où l'existence du moment d'ordre n , un changement de variable bijectif conservant la nature d'une intégrale (on peut aussi prouver directement la convergence sans changement de variable).

21. & 22. Le même changement de variable $u = \ln x$ donne

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} x^n f(x) \sin(2\pi \ln(x)) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2} \sin(2\pi \ln(x)) \frac{dx}{x} \\ &\underset{(u=\ln x)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{nu} e^{-u^2/2} \sin(2\pi u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{nu} e^{-u^2/2} \operatorname{Im}(e^{i2\pi u}) du = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(2\pi-in)u} e^{-u^2/2} du\right) \\ &= \operatorname{Im}(\hat{\varphi}(2\pi - in)) = \operatorname{Im}(e^{-(2\pi-in)^2/2}) = e^{n^2/2 - 2\pi^2} \operatorname{Im}(e^{2i\pi n}) = 0. \end{aligned}$$

La question 2 assure la convergence des intégrales.

23. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $g_\alpha(x) = f(x)[1 + \alpha \sin(2\pi \ln(x))] \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$. La fonction sinus étant bornée, on a $g_\alpha(x) \underset{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}}{=} \mathcal{O}(f(x))$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g_\alpha(x) = f(0) = 0 = g_\alpha(0)$. Comme g_α est clairement continue sur \mathbb{R}_+^* , elle est continue sur \mathbb{R}_+ . Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} x^n g_\alpha(x) dx = \int_0^{+\infty} x^n f(x) dx + \alpha \int_0^{+\infty} x^n f(x) \sin(2\pi \ln x) dx = m_n(f) + \alpha I_n = m_n(f).$$

Il s'ensuit que g_α est une densité de probabilité dont les moments coïncident avec ceux de f à la condition *sine qua non* que la dernière condition d'une définition de densité soit vérifiée, c'est-à-dire que $g_\alpha \geq 0$, donc que $\alpha \in [-1, 1]$, ensemble infini non dénombrable.