

X-ENS 2013Mathématiques BUn corrigé proposé par : **AQALMOUN MOHAMED** agrégé de mathématiques CPGE

Khouribga

Première partie :**Définition de l'exposant d'Hölder ponctuel**

1. (a) La fonction nulle est un élément de $\Gamma^s(x_0)$, et si f, g sont deux éléments de $\Gamma^s(x_0)$ et λ un réel, alors, pour tout $x \in [0, 1] \setminus \{x_0\}$ on a l'inégalité :

$$\frac{|(f + \lambda g)(x) - (f + \lambda g)(x_0)|}{|x - x_0|^s} \leq \sup_{x \in [0, 1] \setminus \{x_0\}} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^s} + |\lambda| \sup_{x \in [0, 1] \setminus \{x_0\}} \frac{|g(x) - g(x_0)|}{|x - x_0|^s},$$
 donc

$$\sup_{x \in [0, 1] \setminus \{x_0\}} \frac{|(f + \lambda g)(x) - (f + \lambda g)(x_0)|}{|x - x_0|^s} < +\infty.$$
 Il en résulte que $f + \lambda g$ est un élément de Γ^s .
 Soient s_1 et s_2 deux réels tels que $0 \leq s_1 \leq s_2 < 1$, pour tout $x \in [0, 1]$ on a $x - x_0 \in]0, 1]$ et la fonction $s \mapsto |x - x_0|^s$ est décroissante sur $[0, 1]$, donc $\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^{s_1}} \leq \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^{s_2}}$, il en résulte que si $f \in \Gamma^{s_2}(x_0)$ alors f est aussi dans $\Gamma^{s_1}(x_0)$.
 $f \in \Gamma^0$ si, et seulement si, la fonction $x \mapsto f(x) - f(x_0)$ est bornée si, et seulement si, f est bornée; et comme tout élément de $\mathcal{C}$ est borné, alors $\Gamma^0(x_0) = \mathcal{C}$.
- (b) Si $f \in \mathcal{C}$ est dérivable en x_0 , alors la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet un prolongement par continuité en x_0 , ce prolongement est continue sur $[0, 1]$ donc borné sur $[0, 1]$, en particulier la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est borné sur $[0, 1] \setminus \{x_0\}$, on en déduit alors l'existence d'une constante M telle que $\forall x \in [0, 1], |f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|$, considérons maintenant un réel $s \in [0, 1[$, puisque $|x - x_0| \leq 1$ alors on a $|x - x_0| \leq |x - x_0|^s$, d'où $\forall x \in [0, 1]; |f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|^s$, et donc $f \in \Gamma^s$.
- (c) Pour $x_0 \in]0, 1]$, on considère la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x - x_0|$, f n'est pas dérivable en x_0 , mais pour tout $s \in [0, 1[$, la fonction $x \mapsto \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^s} = |x - x_0|^{1-s}$ est borné sur $[0, 1] \setminus \{x_0\}$, c'est-à-dire $f \in \Gamma^s(x_0)$, $\forall s \in [0, 1[$.
2. $p(x) = 2|\frac{1}{2} - x|^{\frac{1}{2}} \sqrt{|\frac{1}{2} + x|}$, pour $s \in [0, 1[$ et $x \neq x_0$, on a

$$\frac{|p(x) - p(x_0)|}{|x - \frac{1}{2}|^s} = 2|\frac{1}{2} - x|^{\frac{1}{2}-s} \sqrt{|\frac{1}{2} + x|},$$
 ainsi, la fonction $x \mapsto \frac{|p(x) - p(x_0)|}{|x - \frac{1}{2}|^s}$ est bornée si, et seulement si, $s \leq \frac{1}{2}$, on en déduit alors que $\{s \in [0, 1[, f \in \Gamma^s\} = [0, \frac{1}{2}]$, et par suite $\alpha_f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.
3. (a) Soient $h, h' \in [0, 1]$ tels que $h \leq h'$.
 Notons $A_f(h) = \{x, y \in [0, 1] \text{ et } |x - y| \leq h\}$ de même on définit $A_f(h')$, de sorte que $\omega_f(h) = \sup_{x, y \in A_f(h)} |f(x) - f(y)|$; si $x, y \in [0, 1]$ tels que $|x - y| \leq h$, alors $|x - y| \leq h'$ et donc $|f(x) - f(y)| \in A_f(h')$, on a alors l'inclusion $A_f(h) \subset A_f(h')$, il vient alors que $\omega_f(h) \leq \omega_f(h')$.
Continuité de ω_f en 0 : $\omega_f(0) = 0$

f étant continue sur le compact $[0, 1]$, donc uniformément continue sur $[0, 1]$ (C'est le théorème de **Heine**).

Soit ε un réel strictement positif, il existe alors η strictement positif, tel que $\forall x, y \in [0, 1]$ on ait $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Soit $h \in [0, 1]$ tel que $h \leq \eta$, pour tout $x, y \in [0, 1]$ tel que $|x - y| \leq h$, on a aussi $|x - y| \leq \eta$ donc $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$, ainsi $\forall x, y \in [0, 1]$ tels que $|x - y| \leq h$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$, il en résulte alors que $\omega_f(h) \leq \varepsilon$.

On en déduit que ω_f est continue en 0.

(b) Soient $h, h' \in [0, 1]$ tels que $h \leq h'$.

Soient $x, y \in [0, 1]$ tels que $|x - y| \leq h'$, on considère un réel $z \in [0, 1]$ tel que $|x - z| \leq h - h'$ et $|z - y| \leq h$ (un tel réel existe puisque $[x - (h' - h), x + (h' - h)] \cap [y - h, y + h] \cap [0, 1]$ est non vide).

Puisque $|f(x) - f(y)| \leq |f(z) - f(y)| + |f(z) - f(x)|$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(h) + \omega_f(h' - h)$, on a alors pour tout $x, y \in [0, 1]$, tels que $|x - y| \leq h'$, $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(h) + \omega_f(h' - h)$, un passage à la borne sup, donne $\omega_f(h') \leq \omega_f(h) + \omega_f(h' - h)$.

Remarque : Si $0 \leq h \leq h' \leq 1$, on a $\omega_f(h') - \omega_f(h) \leq \omega_f(h' - h)$, ou encore, puisque ω_f croissante $|\omega_f(h') - \omega_f(h)| \leq \omega_f(h' - h)$, et de même si $0 \leq h \leq h' \leq 1$, on a $|\omega_f(h') - \omega_f(h)| \leq \omega_f(h - h')$, de façon générale :

$$\forall h, h' \in [0, 1], \quad |\omega_f(h') - \omega_f(h)| \leq \omega_f(|h' - h|)$$

(c) Soit $h \in [0, 1]$, et $(h_n)_n$ une suite de nombres réels à valeurs dans $[0, 1]$, convergente de limite h , la suite $(|h - h_n|)_n$ est convergente de limite nulle, la fonction ω_f étant continue en 0, donc la suite $(\omega_f(|h_n - h|))_n$ tend vers 0, or $|\omega_f(h_n) - \omega_f(h)| \leq \omega_f(|h_n - h|)$ alors, la suite $(\omega_f(h_n))_n$ tend vers $\omega_f(h)$. Ce qui montre la continuité de ω_f en h , donc continue sur $[0, 1]$.

4. (a) Soit $s \in [0, 1[$, par hypothèse, il existe $M \in \mathcal{R}$, tel que $\forall h \in]0, 1]$, $\frac{\omega_f(h)}{h^s} \leq M$, Soit $x_0 \in [0, 1]$ fixé. Pour $x \in [0, 1] \setminus \{x_0\}$, on pose $h = |x - x_0| \leq 1$, on a alors $|x - x_0| \leq h$, donc $|f(x) - f(x_0)| \leq \omega_f(h) \leq Mh^s = M|x - x_0|^s$, d'où $\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^s} \leq M$. Ainsi $f \in \Gamma^s(x_0)$.

(b) Soit $x_0 \in [0, 1]$:

- Si $x_0 \neq 0$: p est alors dérivable en x_0 , et d'après la question 1.b, $\forall s \in [0, 1[$ $p \in \Gamma^s(x_0)$ et par la suite $\alpha_p(x_0) = 1$.

- Si $x_0 = 0$: Pour tout $s \in [0, 1[$, la fonction $x \mapsto \frac{|p(x)|}{|x|^s} = x^{1-s} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ est bornée sur $]0, 1]$, donc $\forall s \in [0, 1[$, $p \in \Gamma^s(0)$, d'où $\alpha_p(0) = 1$.

Pour montrer que $\frac{\omega_q(h)}{\sqrt{h}}$ ne tend pas vers 0, il suffit de démontrer l'existence d'une

suite $(x_n)_n$ à valeurs dans $]0, 1]$, qui tend vers 0 mais $\frac{\omega_q(x_n)}{\sqrt{x_n}}$ ne tend pas vers 0.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x_n = \frac{1}{n^2}$, bien sûr cette suite tend vers 0.

On a $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$, donc $|q(\frac{1}{n+1}) - q(\frac{1}{n})| \leq \omega_q(\frac{1}{n^2}) = \omega_q(x_n)$,

et d'autre part $|q(\frac{1}{n+1}) - q(\frac{1}{n})| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \frac{2n+1}{n(n+1)}$, il vient que

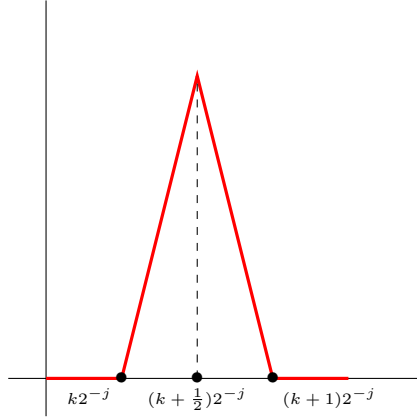
$\frac{\omega_q(x_n)}{\sqrt{x_n}} \geq \frac{2n^2 + n}{n^2 + n} \geq 1$, donc la suite $\frac{\omega_q(x_n)}{\sqrt{x_n}}$ ne tend pas vers 0.

Deuxième partie :
Le système de Schauder

Remarques : :

$$\theta_{j,k}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, k2^{-j}], \\ 2^{j+1}x - 2k & \text{si } x \in [k2^{-j}, (k + \frac{1}{2})2^{-j}], \\ -2^{j+1}x + 2k - 1 & \text{si } x \in [(k + \frac{1}{2})2^{-j}, (k+1)2^{-j}], \\ 0 & \text{si } x \in [(k+1)2^{-j}, 1]. \end{cases}$$

La courbe de $\theta_{j,k}$:



Si I est un intervalle inclus dans le segment $[0, 1]$, alors la fonction $\theta_{j,k}$ est affine sur I si, et seulement si, les trois points "Pics" $k2^{-j}$, $(k + \frac{1}{2})2^{-j}$ et $(k+1)2^{-j}$, ne sont pas à l'intérieur de I . En effet :

Si ces trois points ne sont pas à l'intérieur de I , alors l'intervalle I est inclus dans l'un des quatre segments suivants $[0, k2^{-j}]$, $[k2^{-j}, (k + \frac{1}{2})2^{-j}]$, $[(k + \frac{1}{2})2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$ ou $[(k+1)2^{-j}, 1]$ sur lesquels la fonction $\theta_{j,k}$ est affine.

En pratique, pour démontrer que la fonction $\theta_{j,k}$ est affine sur le segment I , il suffit de démontrer que les trois points "Pics" ne sont pas à l'intérieur de I .

5. (a)

$$\begin{aligned} [k2^{-j-1}, (k+1)2^{-j-1}] &\subset [k'2^{-j}, (k'+1)2^{-j}] \\ \Leftrightarrow k'2^{-j} &\leq k2^{-j-1} \leq (k+1)2^{-j-1} \leq (k'+1)2^{-j} \\ \Leftrightarrow 2k' &\leq k \leq k+1 \leq 2k'+2 \\ \Leftrightarrow 2k' &\leq k < 2k+2 \\ \Leftrightarrow k' &\leq \frac{k}{2} < k'+1 \\ \Leftrightarrow k' &= \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \quad \text{La partie entière de } \frac{k}{2} \end{aligned}$$

$0 \leq k < 2^{j+1}$, alors $k' \leq \frac{k}{2} < 2^j$, c'est-à-dire $k' \in \mathcal{T}_j$.

(b) Soient $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathcal{T}_j$ et $\ell \in \mathcal{T}_{j+1}$.

$k2^{-j} \leq \ell2^{-j-1} \leq (k+1)2^{-j}$ si, et seulement si, $2k \leq \ell \leq 2(k+1)$ si, et seulement si, $k \in \{2k, 2k+1, 2k+2\}$, et on a :

$\theta_{j,k}(2k2^{-j-1}) = 1 - |2k - 2k - 1| = 0$, $\theta_{j,k}((2k+1)2^{-j-1}) = 1 - |2k+1 - 2k+1| = 1$ et $\theta_{j,k}((2k+2)2^{-j-1}) = 1 - |2k+2 - 2k+1| = 0$, on a alors $\theta_{j,k}(\ell2^{-j-1}) = 1$ si $\ell = 2k+1$ et 0 sinon.

(c) On a affaire aux deux points $k2^{-j}$ et $(k+1)2^{-j}$.

La fonction $\theta_{j,k}$ est continue sur $[0, 1] \setminus \{k2^{-j}, (k+1)2^{-j}\}$, et de plus $\sum_{x \rightarrow k2^{-j}} \theta_{j,k}(x) = \lim_{x \rightarrow (k+1)2^{-j}} \theta_{j,k}(x) = 0$, alors f est continue sur $[0, 1]$.

D'après la remarque ci-dessus, il suffit de démontrer que les points $k2^{-j}$, $(k + \frac{1}{2})2^{-j}$ et $(k+1)2^{-j}$ ne sont pas à l'intérieure de l'intervalle $[\ell 2^{-n}, (\ell+1)2^{-n}]$.

Si $\ell 2^{-n} < k2^{-j} < (\ell+1)2^{-n}$ alors $\ell < k2^{n-j} < \ell+1$, mais $n > j$ et donc $k2^{n-j}$ est un entier qui est compris strictement entre deux entiers successifs, ce qui est alors impossible.

Si $\ell 2^{-n} < (k + \frac{1}{2})2^{-j} < (\ell+1)2^{-n}$, on obtient $2\ell < (2k+1)2^{n-j} < 2\ell+2$, puisque $n-j > 0$, on alors un entier pair qui est compris strictement entre deux entiers pairs successifs, ce qui est aussi impossible.

Par la même façon, pour le troisième nombre.

(d) Soient $(j, k) \in \mathcal{I}$, et $(x, y) \in [0, 1]^2$, pour simplifier on peut supposer que $x \leq y$;

Si $x, y \in [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$: dans ce cas

$$|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(y)| = |2^{j+1}x - 2k - 1| - |2^{j+1}y - 2k - 1| \leq 2^{j+1}|x - y|$$

Si $x, y \notin [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$: les images sont nulles, donc l'inégalité est vérifiée.

Si $x < k2^{-j}$ et $y \in [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$; dans ce cas

$|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(y)| = |1 - |2^{j+1}y - 2k - 1|| \leq |2^{j+1}x - 2k|$, par hypothèse on a $0 \leq 2^{j+1}x < 2k$ et $2k \leq 2^{j+1}$, on obtient alors l'encadrement suivant : $0 \leq 2^{j+1}y - 2k \leq 2^{j+1}y - 2^{j+1}x = 2^{j+1}|y - x|$, ce qui donne $|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(y)| \leq 2^{j+1}|y - x|$.

Si $x \in [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$ et $y \leq (k+1)2^{-j}$: de même on obtient l'encadrement $0 \leq 2^{j+1}x - 2k - 2 \leq 2^{j+1}(y - x) = 2^{j+1}|x - y|$, et d'autre part on a $|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(y)| = |1 - |2^{j+1}x - 2k - 1|| \leq |2^{j+1}x - 2k - 2|$, il en résulte que $|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(y)| \leq 2^{j+1}|x - y|$.

On résume, pour tout $x, y \in [0, 1]$, $|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(y)| \leq 2^{j+1}|x - y|$.

6. Encore, la continuité uniforme :

f continue sur le compact $[0, 1]$, donc uniformément continue.

Fixons un ε strictement positif, et soit η tel que, pour tout $x, y \in [0, 1]$ tels que $|x - y| \leq \eta$ on ait $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Comme la suite $(2^{-j-1})_0$ tend vers 0, il existe alors $j_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$ avec $j \geq j_0$, on ait $2^{-j-1} \leq \eta$. Pour $j \geq j_0$ et $k \in \mathcal{T}_j$, on a :

$|c_{j,k}(f)| \leq \frac{1}{2}|f((k + \frac{1}{2})2^{-j}) - f(k2^{-j})| + \frac{1}{2}|f((k+1)2^{-j}) - f((k + \frac{1}{2})2^{-j})|$, et comme $(k + \frac{1}{2})2^{-j} - k2^{-j} = 2^{-j-1} \leq \eta$ et $(k+1)2^{-j} - (k + \frac{1}{2})2^{-j} = 2^{-j-1} \leq \eta$, alors $|c_{j,k}(f)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, la dernière inégalité est valable, pour tout $k \in \mathcal{T}_j$, donc $\max_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \leq \varepsilon$.

Maintenant, on a, pour tout $j \geq j_0$, $\max_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \leq \varepsilon$, d'où ; $\lim_{j \rightarrow \infty} \max_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| = 0$.

7. (a) Calcul de $c_{j,k}(\theta_{i,\ell})$:

• Cas : $i < j$:

D'après la question 5.c la fonction $\theta_{i,\ell}$ est affine sur l'intervalle $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$, par le calcul du taux de variation de $\theta_{i,\ell}$ qui est constant (dans cet intervalle), il vient que

$$\theta_{i,\ell}((k+1)2^{-j}) - \theta_{i,\ell}((k + \frac{1}{2})2^{-j}) = \theta_{i,\ell}((k + \frac{1}{2})2^{-j}) - \theta_{i,\ell}(k2^{-j}), \text{ ce qui donne}$$

$$\theta_{i,\ell}((k + \frac{1}{2})2^{-j}) - \frac{\theta_{i,\ell}(k2^{-j}) + \theta_{i,\ell}((k+1)2^{-j})}{2} = 0, \text{ dans ce cas } c_{j,k}(\theta_{i,\ell}) = 0.$$

• Cas $j < i$:

Les deux nombres $k2^{-j}$, $(k + \frac{1}{2})2^{-j}$ et $(k+1)2^{-j}$ ne sont pas à l'intérieure de l'intervalle $[\ell 2^{-i}, (\ell+1)2^{-i}]$: en fait si $\ell 2^{-i} < (k + \varepsilon)2^{-j} < (\ell+1)2^{-i}$ avec $\varepsilon = 0$ ou $\frac{1}{2}$ ou 1, alors $\ell < (k + \varepsilon)2^{i-j} < \ell+1$ et comme $(k + \varepsilon)2^{i-j}$ est un entier dans les deux cas ($\varepsilon = 0$ ou 1) ces inégalités sont impossibles, dans le cas $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on a $2\ell < (2k+1)2^{i-j} < 2\ell+2$,

mais $i - j \geq 1$, donc $(2k + 1)2^{i-j}$ est un entier pair compris strictement entre deux entiers pairs successifs, ce qui est encore impossible.

En on déduit alors que l'intervalle, $[\ell 2^{-i}, (\ell + 1)2^{-i}]$ est inclus dans l'un des intervalles $[0, k2^{-j}]$, $[k2^{-j}, (k + \frac{1}{2})2^{-j}]$, $[(k + \frac{1}{2})2^{-j}, (k + 1)2^{-j}]$ ou $[(k + 1)2^{-j}, 1]$, dans les quatre cas la fonction $\theta_{i,\ell}$ est nulle en $k2^{-j}$, $(k + \frac{1}{2})2^{-j}$ et $(k + 1)2^{-j}$, il en résulte alors que $c_{j,k}(\theta_{i,\ell}) = 0$.

• Cas $i = j$:

Si $k \neq \ell$, alors l'intersection des deux intervalle $[\ell 2^{-i}, (\ell + 1)2^{-i}]$ et $[k2^{-i}, (k + 1)2^{-i}]$ est vide ou réduit à l'une extrémité du premier intervalle, ainsi la fonction $\theta_{i,\ell}$ est nulle sur l'intervalle $[k2^{-i}, (k + 1)2^{-j}]$, on en déduit alors que $c_{j,k}(\theta_{i,\ell}) = 0$

Si $k = \ell$, $c_{j,k}(\theta_{j,k}) = \theta_{j,k}((k + \frac{1}{2})2^{-j}) = 1$.

Conclusion :

$$c_{j,k}(\theta_{i,\ell}) = \delta_{(j,k),(i,\ell)}$$

(b) La convergence uniforme de la série $\sum f_j^a$ sur le segment $[0, 1]$;

Pour $j \in \mathbb{N}$, et $x \in [0, 1]$, $k \in \mathcal{T}_j$ si $k \neq \tilde{k}_j(x)$, on a $\theta_{j,k}(x) = 0$, donc $f_j^a(x) = \theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x)$, on obtient la majoration suivante $|f_j^a(x)| \leq \max_{k \in \mathcal{T}_j} |a_{j,k}| = b_j$, ou encore $\|f_j^a\|_\infty \leq b_j$, puisque la série $\sum b_j$ converge, alors la série $\sum f_j^a$ converge normalement, donc uniformément sur $[0, 1]$.

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a $f_j^a(0) = f_j^a(1) = 0$, la convergence simple de la série $\sum f_j^a$ implique que $f^a(0) = f^a(1) = 0$, de plus la convergence uniforme assure que la fonction f^a est continue, il en résulte alors que f^a est un élément de $\mathcal{C}_0$.

Soit $(j_0, k_0) \in \mathcal{I}$, L'application $c_{j_0, k_0} : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue ($|c_{j_0, k_0}(f)| \leq 2\|f\|_\infty$), alors $c_{j_0, k_0}(f^a) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} a_{j,k} c_{j_0, k_0}(\theta_{j,k}) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} a_{j,k} \delta_{(j_0, k_0), (j, k)}$, dans cette somme un seul terme qui peut être non nul, le terme correspondant à l'indice (j_0, k_0) , on obtient alors $c_{j_0, k_0}(f^a) = a_{j_0, k_0}$.

8. (a) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

f' étant continue sur $[0, 1]$, donc bornée, il existe alors une constante $\alpha \in \mathbb{R}$, telle que $\|f'\| \leq \alpha$.

Par le théorème des accroissements finis, ils existe deux constantes a et b dans $[0, 1]$ telles :

$$f((k + \frac{1}{2})2^{-j}) - f(k2^{-j}) = 2^{-j} f'(a) \text{ et}$$

$$f((k + 1)2^{-j}) - f((k + \frac{1}{2})2^{-j}) = 2^{-j} f'(b), \text{ et donc par une majoration de chaque terme on obtient :}$$

$$|c_{j,k}(f)| \leq \alpha 2^{-j}.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\max_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \leq \alpha 2^{-j}$, et puisque la série $\sum \alpha 2^{-j}$ est convergente, donc d'après la question 7.b, la suite de fonctions $S_n f$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

(b) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

f'' est bornée sur $[0, 1]$, notons $\beta = \|f''\|_\infty$.

Comme à la question précédente, ils existent a et b dans l'intervalle $[k2^{-j}, (k + 1)2^{-j}]$, tels que :

$$f((k + \frac{1}{2})2^{-j}) - f(k2^{-j}) = 2^{-j} f'(a) \text{ et}$$

$$f((k + 1)2^{-j}) - f((k + \frac{1}{2})2^{-j}) = 2^{-j} f'(b) \text{ et demême il existe } c \text{ entre } a \text{ et } b \text{ tel que}$$

$c_{j,k}(f) = \frac{1}{2}2^{-j}(a-b)f''(c)$, et puisque $|a-b| \leq 2^{-j}$, alors $|c_{j,k}(f)| \leq (\frac{1}{2}\beta)4^{-j}$.

9. (a) Pour $j \leq n < n+1$, et $k \in \mathcal{T}_j$, la fonction $\theta_{j,k}$ est affine sur $[\ell 2^{-n-1}, (\ell+1)2^{-n-1}]$ où $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$, et puisque $S_n f$ est une combinaison des fonctions $\theta_{j,k}$ avec $j < n+1$ et $k \in \mathcal{T}_j$, alors $S_n f$ est affine sur l'intervalle $[\ell 2^{-n-1}, (\ell+1)2^{-n-1}]$.

(b) Soit $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$;

Cas $\ell = 2\ell'$ pair, dans ce cas $\ell' \in \mathcal{T}_n$.

$S_n f(\ell 2^{-n-1}) = S_n f(\ell' 2^{-n}) = \sum_{k \in \mathcal{T}_n} c_{n,k}(f) \theta_{n,k}(\ell' 2^{-n}) + S_{n-1} f(\ell' 2^{-n})$, par hypothèse

de récurrence $S_{n-1} f(\ell' 2^{-n}) = f(\ell' 2^{-n}) = f(\ell' 2^{-n-1})$, et d'autre par les fonctions $\theta_{n,k}$ avec $k \in \mathcal{T}_n$ s'annule en $\ell' 2^{-n}$, alors $S_n f(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell' 2^{-n-1})$.

Cas $\ell = 2\ell' + 1$ impair, dans ce cas on a $\ell' \in \mathcal{T}_n$.

De même on a $S_n f(\ell 2^{-n-1}) = \sum_{k \in \mathcal{T}_n} c_{n,k}(f) \theta_{n,k}((\ell' + \frac{1}{2})2^{-n}) + S_{n-1} f((\ell' + \frac{1}{2})2^{-n})$.

Lorsque $k \neq \ell'$, alors $\theta_{n,k}((\ell' + \frac{1}{2})2^{-n}) = 0$, et donc

$$\sum_{k \in \mathcal{T}_n} c_{n,k}(f) \theta_{n,k}((\ell' + \frac{1}{2})2^{-n}) = c_{n,\ell'}(f) \theta_{n,\ell'}((\ell' + \frac{1}{2})2^{-n}) = c_{n,\ell'}(f).$$

Puisque la fonction $S_{n-1} f$ est affine sur le segment $[\ell' 2^{-n}, (\ell' + 1)2^{-n}]$, alors

$$S_{n-1} f((\ell' + \frac{1}{2})2^{-n}) = \frac{S_{n-1} f(\ell' 2^{-n}) + S_{n-1} f((\ell' + 1)2^{-n})}{2} = \frac{f(\ell' 2^{-n}) + f((\ell' + 1)2^{-n})}{2}.$$

En effet, si g est affine sur le segment $[a, b]$, alors $\forall x \in [a, b]$; $g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$ et en particulier $g(\frac{a+b}{2}) = \frac{g(a)+g(b)}{2}$.

Il en résulte;

$$S_n f(\ell 2^{-n-1}) = c_{n,\ell'}(f) + \frac{f(\ell' 2^{-n}) + f((\ell' + 1)2^{-n})}{2} = f((\ell' + \frac{1}{2})2^{-n}) = f(\ell 2^{-n-1}).$$

- (c) La récurrence aux yeux!..., il faut la démarrer (bien sur pour $n = 0$).

D'abord; $S_0 f = c_{0,0}(f) \theta_{0,0}$

Soit $\ell \in \mathcal{T}_1$, ($\ell = 0$ ou $\ell = 1$), un calcul donne :

$$S_0 f(0) = 0 = f(0) \text{ et } S_0 f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) \theta_{0,0}(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}).$$

10. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, et $x \in [0, 1]$, remarquons que $[0, 1] = \bigcup_{k=0}^{2^{n+1}-1} [k 2^{-n-1}, (k+1)2^{-n-1}]$, donc il existe k avec $0 \leq k < 2^{n+1}$, tel que $x \in [k 2^{-n-1}, (k+1)2^{-n-1}]$, et comme $S_n f$ est affine sur $[k 2^{-n-1}, (k+1)2^{-n-1}]$, alors

$$\begin{aligned} |S_n f(x) - S_n f(k 2^{-n-1})| &\leq |S_n f(k 2^{-n-1}) - S_n f((k+1)2^{-n-1})| \\ &\leq |f(k 2^{-n-1}) - f((k+1)2^{-n-1})| \\ &\leq \omega_f(2^{-n-1}) \end{aligned}$$

($S_n f(x)$ est compris entre les deux valeurs $S_n f(k 2^{-n-1})$ et $S_n f((k+1)2^{-n-1})$)

Et d'autre part $|x - k 2^{-n-1}| \leq 2^{-n-1}$, donne $|f(x) - f(k 2^{-n-1})| \leq \omega_f(2^{-n-1})$, on en déduit alors que

$|f(x) - S_n f(x)| \leq |f(x) - f(k 2^{-n-1})| + |S_n f(k 2^{-n-1}) - S_n f(x)| \leq 2\omega_f(2^{-n-1})$, il vient alors que $\|f - S_n f\|_\infty \leq 2\omega_f(2^{-n-1})$, et puisque ω_f est continue en 0 et $\omega_f(0) = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - S_n f\|_\infty = 0$.

$S_n f(x)$ est compris entre les deux valeurs $S_n f(k 2^{-n-1}) = f(k 2^{-n-1})$ et

$S_n f((k+1)2^{-n-1}) = f((k+1)2^{-n-1})$, donc

$$|S_n f(x)| \leq \max(|f(k 2^{-n-1})|, |f((k+1)2^{-n-1})|) \leq \|f\|_\infty, \text{ et par la suite } \|S_n f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Pour $k \in \mathcal{T}_n$, on a $S_n \theta_{n,k} = \theta_{n,k}$, donc la norme subordonnée (à $\|\cdot\|_\infty$) de S_n est égal à 1.

(b) Soient $n \in \mathbb{N}$, et $f \in \mathcal{C}_0$.

Rappelons ici que $c_{i,\ell}(\theta_{j,k}) = 1$ si $(i, \ell) = (j, k)$ et 0 sinon, et que les applications $c_{i,\ell}$ sont linéaires.

$$\begin{aligned}
 S_n(S_n f) &= S_n\left(\sum_{j=0}^n \sum_{k \in \mathcal{T}_j} c_{j,k}(f) \theta_{j,k}\right) \\
 &= \sum_{i=0}^n \sum_{\ell \in \mathcal{T}_i} c_{i,\ell} \left(\sum_{j=0}^n \sum_{k \in \mathcal{T}_j} c_{j,k}(f) \theta_{j,k} \right) \theta_{i,\ell} \\
 &= \sum_{i=0}^n \sum_{\ell \in \mathcal{T}_i} \sum_{j=0}^n \sum_{k \in \mathcal{T}_j} c_{j,k}(f) c_{i,\ell}(\theta_{j,k}) \theta_{i,\ell} \\
 &= \sum_{i=0}^n \sum_{\ell \in \mathcal{T}_i} c_{i,\ell}(f) \theta_{i,\ell} \\
 &= S_n f
 \end{aligned}$$

11. (a) La fonction $x \mapsto x^s$ est concave sur $\mathbb{R}_+$, pour tous $a, b \geq 0$, on a $\frac{a^s}{2} + \frac{b^s}{2} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^s$, et donc $a^s + b^s \leq 2^{1-s}(a+b)^s$.

(b) Soit $f \in \mathcal{C}_0 \cap \Gamma^s$,

Il existe alors $M \in \mathbb{R}_+$, tel que $\forall x \in [0, 1]$, $|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|^s$.

$c_{j,k}(f) = f\left((k + \frac{1}{2})2^{-j}\right) - f(x_0) - \frac{1}{2}((f(k2^{-j}) - f(x_0)) + (f((k+1)2^{-j}) - f(x_0)))$.

Pour obtenir l'inégalité demandée, on commence par majorer chaque terme :

$$\begin{aligned}
 |f((k + \frac{1}{2})2^{-j}) - f(x_0)| &\leq M|(k + \frac{1}{2})2^{-j} - x_0|^s \\
 &\leq M(\frac{1}{2}2^{-j} + |k2^{-j} - x_0|)^s \\
 &\leq M(2^{-j} + |k2^{-j} - x_0|)^s
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |(f(k2^{-j}) - f(x_0)) + (f((k+1)2^{-j}) - f(x_0))| &\leq M(|k2^{-j} - x_0|^s + |(k+1)2^{-j} - x_0|^s) \\
 &\leq M2^{1-s}(|k2^{-j} - x_0| + |(k+1)2^{-j} - x_0|)^s
 \end{aligned}$$

La dernière inégalité est obtenue par la question précédente.

Mais $|(k+1)2^{-j} - x_0| \leq 2^{-j} + |k2^{-j} - x_0| \leq 2.2^{-j} + |k2^{-j} - x_0|$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
 |(f(k2^{-j}) - f(x_0)) + (f((k+1)2^{-j}) - f(x_0))| &\leq M2^{1-s}(2.2^{-j} + 2|k2^{-j} - x_0|)^s \\
 &\leq 2M(2^{-j} + |k2^{-j} - x_0|)^s
 \end{aligned}$$

On a alors la majoration suivante :

$$|c_{j,k}(f)| \leq 2M(2^{-j} + |k2^{-j} - x_0|)^s.$$

Troisième partie :

Minoration de l'exposant de Hölder ponctuel

12. Pour $x \neq x_0$ on a : $2^{-n_0-1} < |x - x_0| \leq 2^{n_0}$ si, et seulement si, $n_0 \leq \log_2(|x - x_0|) < n_0 + 1$ si, et seulement si, n_0 est la partie entière de $\log_2(|x - x_0|)$, ceci donne l'existence et l'unicité de n_0 .

13. Rappelons que si $x \in [0, 1]$, et $(j, k) \in \mathcal{I}$; si $k \neq \tilde{k}_j(x)$, alors $\theta_{j,k}(x) = 0$.
 Pour $x \in [0, 1]$, et $k \in \mathcal{T}_j$; si k est différent de $\tilde{k}_j(x)$ et $\tilde{k}_j(x_0)$, alors $\theta_{j,k}(x) = \theta_{j,k}(x_0) = 0$,
 il vient alors que : $W_j = |c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)| |\theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x) - \theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x_0)| + |c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}| |\theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x_0) - \theta_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(x_0)|$ et par l'inégalité de la question 5.d, on obtient le résultat.

14. (a) Il suffit de majorer les coefficients qui intervient dans l'inégalité de la question précédente :

$$|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)| \leq c_1(2^{-j} + |\tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0|)^s \text{ et comme } |\tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0| \leq 2^{-j} \text{ alors}$$

$$|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}| \leq c_1(2^{-j} + 2^{-j})^s = c_1 2^s 2^{-js} \leq c_1 3^s 2^{-js}, \text{ on aussi}$$

$$|c_{j,\tilde{k}_j(x)}| \leq c_1(2^{-j} + |\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0|)^s \text{ et puisque}$$

$$|\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0| \leq |\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x| + |x - x_0| \leq 2^{-j} + 2^{-n_0} \leq 2.2^{-j}, \text{ donc}$$

$$(2^{-j} + |\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0|)^s \leq 3^s 2^{-js}, \text{ puis :}$$

$$W_j \leq c_1 2.2^{-js} 3^s 2^{j+1} |x - x_0| = 4c_1 3^s 2^{(1-s)j} |x - x_0|.$$

$$(b) \sum_{j=0}^{n_0} W_j \leq 4c_1 3^s |x - x_0| \sum_{j=0}^{n_0} 2^{(1-s)j} \text{ d'autre part :}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n_0} 2^{(1-s)j} &= (2^{1-s} - 1)^{-1} (2^{(1-s)(n_0+1)} - 1) \leq (2^{1-s} - 1)^{-1} 2^{(1-s)(n_0+1)} \\ &\leq 2.2^{-s} (2^{1-s})^{-1} (2^{-n_0})^{s-1} \\ &\leq 2.2^{-s} (2^{1-s} - 1)^{-1} |x - x_0|^{s-1} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \sum_{j=0}^{n_0} W_j \leq 8c_1 (2^{1-s} - 1)^{-1} (3/2)^2 |x - x_0|^s.$$

15. pour $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)| \leq c_1(2^{-j} + |\tilde{k}_j(x_0) - x_0|)^s \leq c_1(2^{-j} + 2^{-j})^s = c_1 2^{s(1-j)}$$

$$\sum_{j=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x_0)| = \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} |c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)| |\theta_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(x_0)|, \text{ les fonctions } \theta_{j,\tilde{k}_j(x_0)} \text{ sont}$$

majorées par 1, donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} |c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)| |\theta_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(x_0)| &\leq c_1 \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} 2^{s(1-j)} \\ &\leq c_1 2^{s(-n_0-1)} \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-sj} \\ &\leq c_1 2^s |x - x_0|^s (1 - 2^{-s})^{-1} \end{aligned}$$

16. Montrons d'abord que $\omega_f(1) \geq 1$, en effet :

f étant continue sur le segment $[0, 1]$, donc il existe $c \in [0, 1]$ tel que $\|f\|_\infty = |f(c)| = 1$, de plus $|c - 0| \leq 1$, donc $1 = |f(c)| = |f(c) - f(0)| \leq \omega_f(1)$.

De ce qui précède $2^{-n_0 s}$ est compris entre $0 = \omega_f(0)$ et $\omega_f(1)$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $2^{-n_0 s} = \omega_f(\alpha)$, considérons maintenant n' la partie entière de $\log_2 \alpha$, par la monotonie de ω_f , on obtient $\omega_f(2^{-n'-1}) \leq 2^{-n_0 s} \leq \omega_f(2^{-n'})$, mais la première inégalité n'est pas stricte, pour régler ce problème; considérons $A = \{n \in \mathbb{N}, 2^{-n_0 s} \leq \omega_f(2^{-n})\}$, c'est une partie de $\mathbb{N}$, non vide (il contient n'), si cette partie n'est pas majorée, alors on peut trouver une suite d'entiers $\varphi(n)$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \in A$, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{-s n_0} \leq \omega_f(2^{-\varphi(n)})$, mais comme la fonction ω_f est continue en 0 et $\omega_f(0) = 0$, en passant à la limite on obtient

$2^{-n_0 s} \leq 0$ (ce qui est impossible).

La partie A est alors majorée, donc admet un plus grand élément n_1 ; $n_1 \in A$ donne $2^{-n_0 s} \leq \omega_f(2^{-n_1})$ et $n_1 + 1 \notin A$ donne $\omega_f(2^{-n_1-1}) < 2^{-n_0 s}$.

Pour l'unicité supposons l'existence d'un autre entier n_2 tel que $n_2 \neq n_1$, par définition de A l'entier n_2 est un élément de A donc $n_2 < n_1$, on a aussi $n_2 + 1 \leq n_1$, donc $\omega_f(2^{-n_2-1}) < 2^{-n_0 s} \leq \omega_f(2^{-n_1}) \leq \omega_f(2^{-n_2-1})$, et on a alors une contradiction.

17. Soient $t \in [0, 1]$ et $k \in \mathcal{T}_{n+1}$ tel que $t \in [k2^{-n-1}, (k+1)2^{-n-1}]$

$$f(t) - S_n f(t) = (f(t) - S_n f(k2^{-n-1})) + (S_n f(k2^{-n-1}) - S_n f(t))$$

Et comme la fonction $S_n f$ est affine sur le segment $[k2^{-n-1}, (k+1)2^{-n-1}]$ alors elle est monotone sur cet segment, donc $S_n f(t)$ est compris entre les deux valeurs $S_n f(k2^{-n-1})$ et $S_n f((k+1)2^{-n-1})$ on en déduit alors que

$$\begin{aligned} |S_n f(t) - S_n f(k2^{-n-1})| &\leq |S_n f(k2^{-n-1}) - f(k2^{-n-1})|, \text{ donc} \\ |f(t) - S_n f(t)| &\leq |f(t) - f(k2^{-n-1})| + |f(k2^{-n-1}) - f((k+1)2^{-n-1})| \text{ et puisque} \\ |t - k2^{-n-1}| &\leq 2^{-n-1} \leq 2^{-n_1-1} \text{ et } |(k+1)2^{-n-1} - k2^{-n-1}| \leq 2^{-n-1} \leq 2^{-n_1-1} \\ \text{alors } |f(t) - f(k2^{-n-1})| &\leq \omega_f(2^{-n_1-1}) \leq 2^{-n_0 s} \text{ et} \\ |f((k+1)2^{-n-1}) - f(k2^{-n-1})| &\leq \omega_f(2^{-n_1-1}) \leq 2^{-n_0 s}, \text{ on obtient alors} \\ |f(t) - S_n f(t)| &\leq 2 \cdot 2^{-n_0 s} = 2^{s+1} 2^{-(n_0-1)s} \leq 2^{s+1} |x - x_0|, \text{ et c'est bien que} \\ \|f - S_n f\|_\infty &\leq 2^{s+1} |x - x_0|^s. \end{aligned}$$

18. (a) Pour j entre $n_0 + 1$ et n_1 , on a

Comme à la question 15, $|c_{j, \tilde{k}_j(x)}(f)| \leq c_1 3^s |x - x_0|^s$, donc

$$\sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x)| = \sum_{j=n_0+1}^{n_1} |c_{j, \tilde{k}_j(x)}(f)| |\theta_{j, \tilde{k}_j(x)}(x)| \leq c_1 3^s (n_1 - n_0) |x - x_0|^s.$$

(b) On a $\omega_f(2^{-n_1}) \leq c_4(N)(1 + |\log_2(2^{-n_1})|)^{-N} = c_4(N)(1 + n_1)^{-N}$ et par suite

$$(1 + n_1)^N \leq \frac{c_4(N)}{\omega_f(2^{-n_1})} \text{ d'où :}$$

$$n_1 - n_0 \leq n_1 + 1 \leq \left(\frac{c_4(N)}{\omega_f(2^{-n_1})} \right)^{\frac{1}{N}}.$$

Par définition de n_1 on a $\frac{1}{\omega_f(2^{-n_1})} \leq 2^{n_0 s}$ et donc $n_1 + 1 \leq (c_4(N))^{\frac{1}{N}} 2^{\frac{n_0 s}{N}}$ or $2^{n_0 s} \leq$

$|x - x_0|^{-s}$, alors $(n - n_0) |x - x_0|^s \leq (c_4(N))^{\frac{1}{N}} |x - x_0|^{(1 - \frac{1}{N})s}$, on utilise la majoration de la question 18.a on obtient le résultat.

19. On fixe un entier $N \in \mathbb{N}$.

Cas $n_0 < n_1$:

Pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) = S_{n_0} f(t) + (S_{n_1} f(t) - S_{n_0} f(t)) + (f(t) - S_{n_1} f(t))$.

Nous allons majorer chaque terme :

$$|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| \leq \sum_{j=0}^{n_0} W_j \leq c_2 |x - x_0|^s \leq c_2 |x - x_0|^{(1 - \frac{1}{N})s}.$$

$$\begin{aligned}
|(S_{n_1}f(x) - S_{n_0}f(x)) - (S_{n_1}f(x_0) - S_{n_0}f(x_0))| & \\
&\leq \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(x)| |\theta_{j,k}(x)| + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x_0)| \\
&\leq \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(x)| |\theta_{j,k}(x)| + \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x_0)| \\
&\leq c_5(N) |x - x_0|^{(1-\frac{1}{N})^s} + c_3 |x - x_0|^S \\
&\leq (c_5(N) + c_3) |x - x_0|^{(1-\frac{1}{N})^s}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(f(x) - S_{n_1}f(x)) - (f(x_0) - S_{n_1}f(x_0))| &\leq 2\|f - S_{n_1}f\|_\infty \\
&\leq 2^{s+2} |x - x_0|^s \\
&\leq 2^{s+2} |x - x_0|^{(1-\frac{1}{N})^s}
\end{aligned}$$

Si on pose $M_1(N) = \max(c_2, c_5(N) + c_3, 2^{2+s})$, alors dans ce cas ;

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M_1(N) |x - x_0|^{(1-\frac{1}{N})^s}$$

Cas $n_0 \geq n_1$:

Pour tout $t \in [0, 1]$ on a $f(t) = f(t) - S_{n_0}f(t) + S_{n_0}f(t)$ et on a les majorations suivantes :

$$|S_{n_0}f(x) - S_{n_0}f(x_0)| \leq c_2 |x - x_0|^s \leq c_2 |x - x_0|^{(1-\frac{1}{N})^s} \text{ et puisque } n_0 \geq n_1 \text{ alors}$$

$$\begin{aligned}
|(f(x) - S_{n_0}f(x)) - (f(x_0) - S_{n_0}f(x_0))| &\leq 2\|f - S_{n_0}f\|_\infty \\
&\leq 2^{2+s} |x - x_0|^s \\
&\leq 2^{s+2} |x - x_0|^{(1-\frac{1}{N})^s}
\end{aligned}$$

Si on pose $M_2 = \max(2^{s+2}, c_2)$, alors dans ce cas on a :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M_2 |x - x_0|^{(1-\frac{1}{N})^s}$$

Posons maintenant $M = \max(M_1(N), M_2)$, puisque N ne dépend pas x , alors $\forall x \in [0, 1]$, $|f(x) - f(x_0)| \leq M |x - x_0|^{(1-\frac{1}{N})^s}$, on en déduit alors que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $f \in \Gamma^{(1-\frac{1}{N})^s}$, en particulier, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_f(x_0) \geq (1 - \frac{1}{N})s$, par un passage à la limite quand N tend vers $+\infty$, il vient que $\alpha_f(x_0) \geq s$.

النهاية FIN END