Correction de l'épreuve Mines MP 1 (année 2017)
Étude d'un endomorphisme d'un espace de fonctions numériques

Frédéric Morlot et Jean Nougayrède

Partie A - Préliminaires

1) • Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{C} \\ t \mapsto t^n \end{array} \right.$

f_n est de classe C^∞ donc $f_n \in \mathcal{E}$. Par définition, $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$.
En tant que sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs de $\mathcal{E}$,
$\boxed{\mathcal{P} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{E}}$

• $\mathcal{D}$ est une partie de $\mathcal{E}$ par définition.
Soit $(f, g) \in \mathcal{D}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.
Il existe $(\alpha, \beta) \in]0, a]^2$ et deux suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall t \in]-\alpha, \alpha[\,, f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

et

$$\forall t \in]-\beta, \beta[\,, g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

On pose $c = \min\{\alpha, \beta\}$.
Alors $c > 0$ et $\forall t \in]-c, c[\,, (\lambda f + \mu g)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)t^n$
donc $\lambda f + \mu g$ est un élément de $\mathcal{E}$ développable en série entière au voisinage de 0.
Enfin, la fonction nulle est évidemment développable en série entière au voisinage de 0.
Conclusion : $\boxed{\mathcal{D} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{E}}$

2) • Soit $f \in \mathcal{E}$.
Soit $x \in [-a, a]$.
$t \mapsto x\sin(t)$ est continue sur le segment $[0, \pi/2]$ et à valeurs dans le segment de bornes 0 et x qui est inclus dans $[-a, a]$.
De plus, $y \mapsto f(y)$ est continue sur $[-a, a]$.
Donc $t \mapsto f(x\sin t)$ est continue sur $[0, \pi/2]$ ce qui valide la bonne définition de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x\sin t)\,\mathrm{d}t$ donc de $u(f)(x)$.
Conclusion : $\boxed{u(f) \text{ est bien définie.}}$
De même $t \mapsto x\sin(t)$ est continue sur $[0, \pi/2]$ à valeurs dans $[-a, a]$ et f' est continue sur $[-a, a]$.
Donc $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f'(x\sin(t))\,\mathrm{d}t$ existe et $v(f)(x)$ également.
Conclusion : $\boxed{v(f) \text{ est bien définie}}$

• Montrons que $u(f)$ est de classe C^∞ sur $[-a, a]$ en appliquant un théorème de convergence dominée.
Pour $(x, t) \in [-a, a] \times \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on pose $h(x, t) = f(x\sin t)$.
Soit $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
$x \mapsto x\sin(t)$ est de classe C^∞ sur $[-a, a]$ et à valeurs dans $[-a, a]$.
f est de classe C^∞ sur $[-a, a]$.
Donc $x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^∞ sur $[-a, a]$.
De plus, un calcul direct donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x, t) = (\sin t)^n f^{(n)}(x\sin t)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
$|f^{(n)}|$ est continue sur le segment $[-a, a]$ donc il existe $M > 0$ tel que

$$\forall y \in [-a, a]\,, |f^{(n)}(y)| \leq M$$

Pour tout $x \in [-a, a]$, $t \mapsto (\sin t)^n f^{(n)}(x \sin t)$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\left|(\sin t)^n f^{(n)}(x \sin t)\right| \leq M$
$t \mapsto M$ est continue et intégrable sur $[-a, a]$ (et indépendante de x).
Par conséquence d'un théorème de convergence dominée, on peut conclure : $\boxed{u(f) \in \mathcal{E}}$

- Notons que f' est également un élément de $\mathcal{E}$ et que

$$\forall x \in [-a, a]\,, v(f)(x) = f(0) + \frac{\pi}{2} x u(f')(x)$$

$x \mapsto x$ est de classe C^∞ sur $[-a, a]$, tout comme $u(f')$ (d'après le point précédent).
Par produit, $x \mapsto xu(f')(x)$ est de classe C^∞ et enfin, $\boxed{v(f) \in \mathcal{E}}$

- u est bien définie de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}$.
Soit $(f, g) \in \mathcal{E}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.
Soit $x \in [-a, a]$. On a

$$\begin{aligned}
u(\lambda f + \mu g)(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\lambda f + \mu g)(x \sin t)\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \lambda f(x \sin t) + \mu g(x \sin t)\, \mathrm{d}t \\
&= \lambda \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x \sin t)\, \mathrm{d}t + \mu \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} g(xs \sin t)\, \mathrm{d}t \qquad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \lambda u(f)(x) + \mu u(g)(x) = (\lambda u(f) + \mu u(g))(x).
\end{aligned}$$

Donc $u(\lambda f + \mu g) = \lambda u(f) + \mu u(g)$
Conclusion : $\boxed{u \in L(\mathcal{E})}$

- v est bien définie de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}$.
Soit $(f, g) \in \mathcal{E}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.
Soit $x \in [-a, a]$. On a

$$\begin{aligned}
v(\lambda f + \mu g)(x) &= \lambda f(0) + \mu g(0) + x \times \frac{\pi}{2} \times u((\lambda f + \mu g)')(x) \\
&= \lambda f(0) + \mu g(0) + x \times \frac{\pi}{2} \times u(\lambda f' + \mu g')(x) \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\
&= \lambda f(0) + \mu g(0) + x \times \frac{\pi}{2} \times (\lambda u(f')(x) + \mu u(g')(x)) \quad \text{par linéarité de } u(-) \\
&= (\lambda v(f) + \mu v(g))(x) \quad \text{après développement et regroupement des termes.}
\end{aligned}$$

Donc $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$. Conclusion : $\boxed{v \in L(\mathcal{E}).}$

3) On reprend la notation de la question 1).
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-a, a]$. On a

$$u(f_n)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (x \sin t)^n\, \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} W_n f_n(x)$$

donc $u(f_n) = \dfrac{2W_n}{\pi} f_n$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, u(f_n) \in \mathcal{P}$.

Par linéarité de u, $u(\mathcal{P}) = \mathrm{Vect}((u(f_n))_{n \in \mathbb{N}}) \subset \mathcal{P}$ car $\mathcal{P}$ est stable par combinaisons linéaires.
Conclusion : $\boxed{\mathcal{P} \text{ est stable par } u}$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-a, a]$. On a

$$v(f_n)(x) = f_n(0) + x \int_0^{\pi/2} n(x \sin t)^{n-1}\, \mathrm{d}t = nW_{n-1}x^n$$

donc $v(f_n) = nW_{n-1}f_n$ donc $v(f_n) \in \mathcal{P}$.
De plus, $v(f_0) = f_0$ donc $v(f_0) \in \mathcal{P}$.
v est linéaire.
On peut donc conclure comme précédemment : $\boxed{\mathcal{P} \text{ est stable par } v}$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$W_n - W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(t)) \sin^n(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos(t) \times \cos(t) \sin^n(t)\ \mathrm{d}t$
Les fonctions $t \mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{n+1} \sin^{n+1}(t)$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, \pi/2]$.
D'après le théorème d'intégration par parties :
$W_n - W_{n+2} = \left[\cos t \dfrac{\sin^{n+1}(t)}{n+1}\right]_0^{\pi/2} - \displaystyle\int_0^{\pi/2} (-\sin t) \times \frac{\sin^{n+1}(t)}{n+1}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} W_{n+2}$
Donc
$$W_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) W_{n+2} = \frac{n+2}{n+1} W_{n+2}.$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n}$
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = (n+1)W_n W_{n+1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
$a_{n+1} - a_n = (n+2)W_{n+1}W_{n+2} - (n+1)W_n W_{n+1} = 0$ d'après ce qui précède.
Donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante et
$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = a_0$$
$a_0 = W_0 W_1 = \dfrac{\pi}{2} \times \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin t\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \times [-\cos t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$
Donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}}$

5)
- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  $W_n - W_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \times (1 - \sin t)\ \mathrm{d}t$
  $t \mapsto (\sin t)^n (1 - \sin t)$ est une fonction continue, positive sur le segment non trivial $[0, \pi/2]$.
  De plus, cette fonction est non nulle car elle vaut $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \times \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ en $\dfrac{\pi}{4}$.
  Donc $W_n - W_{n+1} > 0$.
  Conclusion : $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante.
- Comme précédemment, on peut vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, W_n > 0$ (intégrale d'une fonction continue positive et non nulle).
  Soit $n \in \mathbb{N}$.
  On peut écrire l'inégalité suivante :
  $$0 < W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$$
  On divise par le réel strictement positif W_n :
  $$0 < \frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$
  puis
  $$0 < \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{\pi}{2(n+1)W_n^2} \leq 1.$$
  On inverse cette inégalité (qui concerne des réels strictement positifs) :
  $$1 \leq \frac{2(n+1)}{\pi} W_n^2 \leq \frac{n+2}{n+1}.$$

Enfin, on multiplie par le réel strictement positif $\dfrac{n\pi}{2(n+1)}$:

$$\frac{n\pi}{2(n+1)} \leq nW_n^2 \leq \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\frac{\pi}{2}.$$

Les deux suites encadrantes sont convergentes et de limite $\dfrac{\pi}{2}$.
Donc (nW_n^2) est une suite convergente, de limite $\dfrac{\pi}{2}$.
Cette limite étant non nulle, on peut écrire l'équivalent simple suivant :

$$nW_n^2 \sim \frac{\pi}{2} \qquad \text{puis} \qquad W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}.$$

et enfin, par positivité de W_n : $\boxed{W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}}$

L'équivalent simple converge vers 0 donc $\boxed{(W_n) \text{ converge aussi vers } 0.}$

Note : on aura bien entendu reconnu les célèbres intégrales de Wallis...

Partie B - Étude de la continuité de u et v

6) Soit $f \in \mathcal{E}$. Alors $|f|$ est continue sur le segment I, donc le réel $M(f)$ est bien défini.
On ne sait pas trop si l'énoncé demande de vérifier que M est une norme. Dans le doute, vérifions.
Montrons que l'application M définit bien une norme (on rappelle qu'il s'agit de la norme infinie sur I).

- Soit $f \in \mathcal{E}$. Alors $|f| \geq 0$ donc $M(f) \geq 0$ (par positivité de l'intégrale).
- Soit $f \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
  - Si $\lambda = 0$, on a immédiatement $M(\lambda f) = 0 = |\lambda| M(f)$.
  - Sinon, écrivons
  $$\forall x \in I,\ |\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leq |\lambda| M(f)$$
  puis passons au maximum. On obtient $M(\lambda f) \leq |\lambda| M(f)$.
  Puis appliquons cette même inégalité à $1/\lambda$ et λf. On obtient $M(f) \leq \dfrac{M(\lambda f)}{|\lambda|}$, d'où
  $$\boxed{M(\lambda f) = |\lambda| M(f)}$$
- Soit $(f,g) \in \mathcal{E}^2$. Écrivons
  $$\forall x \in I,\ |f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M(f) + M(g)$$
  puis passons au maximum. On obtient $\boxed{M(f+g) \leq M(f) + M(g)}$
- Enfin, soit $f \in \mathcal{E}$ telle que $M(f) = 0$. Alors $\forall x \in I,\ |f(x)| = 0$ donc f est la fonction nulle.

Il s'agit maintenant de montrer que u est continue de $(\mathcal{E}, M)$ dans $(\mathcal{E}, M)$. Dans la question 2), on a déjà montré que c'était un endomorphisme. Il suffit donc de contrôler $M(u(f))$ par rapport à $M(f)$. Soit donc $f \in \mathcal{E}$. L'inégalité triangulaire fournit

$$\forall x \in I,\ |u(f)(x)| \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} |f(x\sin t)|\,dt \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} M(f)\,dt = M(f).$$

En passant au maximum, on obtient $\boxed{M(u(f)) \leq M(f)}$ ce qui permet de conclure.

7) Supposons par l'absurde que v soit continue. Alors, comme v est également un endomorphisme, il existerait une constante $K \geq 0$ telle que

$$\forall f \in \mathcal{E},\ M(v(f)) \leq K \times M(f).$$

En particulier, réutilisons les fonctions f_n de la question 1). Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. La question 3) montre que

$$v(f_n)(a) = nW_{n-1}a^n \qquad \text{puis} \qquad M(v(f_n)) \geq |v(f_n)(a)| = nW_{n-1}a^n.$$

De plus, soit $x \in I$. Alors $|x| \le a$ donc $|x|^n \le a^n$ par croissance de f_n sur $[0,a]$. Ainsi, on a

$$\forall x \in I,\ |f_n(x)| \le a^n = |f_n(a)|,$$

si bien que $\boxed{M(f_n) = a^n}$

Donc on aurait $K \times M(f_n) \ge nW_{n-1} \times M(f_n)$. Et comme f_n n'est pas la fonction nulle, on a $M(f_n) > 0$ si bien que $\boxed{K \ge nW_{n-1}}$

Or lorsque $n \to +\infty$, la question 5) montre que

$$nW_{n-1} \sim n \times \sqrt{\frac{\pi}{2(n-1)}} \sim \sqrt{\frac{n\pi}{2}}.$$

En particulier on a $nW_{n-1} \to +\infty$, d'où contradiction.

8) Déjà, pour tout $f \in \mathcal{E}$ on a $f' \in \mathcal{E}$, donc le réel $M(f) + M(f')$ est bien défini. Montrons ensuite que N est une norme.

- N est bien à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{E}$. Alors

$$\begin{aligned} N(\lambda f) &= M(\lambda f) + M(\lambda f') \\ &= |\lambda| M(f) + |\lambda| M(f') \\ &= |\lambda| N(f). \end{aligned}$$

- Soit $(f,g) \in \mathcal{E}^2$. Alors

$$\begin{aligned} N(f+g) &= M(f+g) + M(f'+g') \\ &\le M(f) + M(g) + M(f') + M(g') \\ &= N(f) + N(g). \end{aligned}$$

- Soit $f \in \mathcal{E}$ telle que $N(f) = 0$. Alors $M(f) = -M(f') \le 0$, donc $M(f) = 0$ puis $f = 0$.

Donc <u>N est bien une norme</u>. Montrons ensuite que v est continue de $(\mathcal{E}, N)$ dans $(\mathcal{E}, M)$. Soit $f \in \mathcal{E}$. Toujours par l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} \forall x \in I,\ |v(f)(x)| &\le |f(0)| + |x| \int_0^{\pi/2} |f'(x \sin t)|\, dt \\ &\le M(f) + \frac{\pi a}{2} M(f'). \end{aligned}$$

Posons alors $K = \max\left\{1, \frac{\pi a}{2}\right\}$. On a

$$\forall x \in I,\ |v(f)(x)| \le K(M(f) + M(f')),$$

puis en passant au maximum on obtient $\boxed{M(v(f)) \le K \times N(f)}$

Supposons que les normes M et N soient équivalentes. Alors l'application $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ serait continue de $(\mathcal{E}, M)$ dans $(\mathcal{E}, N)$. Donc comme composée, l'application $v = v \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ serait continue de $(\mathcal{E}, M)$ dans $(\mathcal{E}, M)$, ce qui est faux d'après la question 7).

Donc <u>M et N ne sont pas équivalentes</u>.

9) Soit $f \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$. La fonction f' étant continue sur le segment I, le théorème de Weierstrass dit qu'il existe une fonction polynomiale $q : I \to \mathbb{C}$ telle que

$$\forall x \in I,\ |f'(x) - q(x)| \le \varepsilon.$$

La fonction q est continue sur l'intervalle I. Soit p son unique primitive telle que $p(0) = f(0)$. Alors p est polynomiale et répond à la question.

Pour finir, montrons que $\mathcal{P}$ est dense dans $(\mathcal{E}, N)$. On garde $f \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$ comme précédemment, et on pose

$$\eta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2a}\right\}.$$

Soit $p \in \mathcal{P}$ telle que $p(0) = f(0)$ et $\forall x \in I,\ |f'(x) - p'(x)| \le \eta$.

- D'une part, on a $M(f'-p') \leq \eta \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
- D'autre part, soit $x \in I$. L'inégalité des accroissements finis montre que $f-p$ est η-lipschitzienne, d'où on tire
$$|f(x)-p(x)| = |(f-p)(x)-(f-p)(0)| \leq \eta|x| \leq \eta a \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
En passant au maximum, on a donc $M(f-p) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Finalement, par sommation on obtient $\boxed{N(f-p) \leq \varepsilon}$

Partie C - Étude de l'inversibilité de u et v

10) On reprend les notations de la question 1).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$(u \circ v)(f_n) = u\left(nW_{n-1}f_n\right) = nW_{n-1}u(f_n) = nW_{n-1}\dfrac{2}{\pi}W_nf_n = f_n$ d'après la question 4).
$(u \circ v)(f_0) = u(v(f_0)) = u(f_0) = \dfrac{2}{\pi}W_0f_0 = f_0$
$f \mapsto (u \circ v)(f)$ et $id_{\mathcal{P}}$ sont linéaires et coïncident sur une partie génératrice de $\mathcal{P}$.
Conclusion : $\boxed{\forall f \in \mathcal{P}, (u \circ v)(f) = f}$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$(v \circ u)(f_n) = v(u(f_n)) = v(\dfrac{2}{\pi W_n}f_n) = \dfrac{2}{\pi}W_nv(f_n) = \dfrac{2}{\pi W_n n W_{n-1}}f_n = f_n$
$(v \circ u)(f_0) = v(u(f_0)) = v(f_0) = f_0$.
Comme précédemment, on peut conclure : $\boxed{\forall f \in \mathcal{P}, (v \circ u)(f) = f}$

11) Posons K la constante $\max\left\{1, \dfrac{a\pi}{2}\right\}$.
Soit $f \in \mathcal{E}$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Par densité de $\mathcal{P}$ dans l'espace $(\mathcal{E}, N)$, il existe $g \in \mathcal{P}$ tel que
$$N(f-g) \leq \frac{1}{p}$$
Notons désormais $h = f-g$.
D'après la question 8),
$$M(v(h)) \leq K \times N(h)$$
D'après la question 6),
$$M(u(v(h)) \leq M(v(h))$$
Donc $M((u \circ v)(h)) \leq \dfrac{K}{p}$
puis $M((u \circ v)(f) - (u \circ v)(g)) \leq \dfrac{K}{p}$
$M((u \circ v)(f) - g) \leq \dfrac{K}{p}$
Et enfin $M((u \circ v)(f) - f) \leq M(f-g) + \dfrac{K}{p} \leq N(f-g) + \dfrac{K}{p}$.
Ainsi,
$$\forall p \in \mathbb{N}^*, 0 \leq M((u \circ v)(f) - f) \leq \frac{K+1}{p}$$
Par passage à la limite quand $p \to +\infty$ (tous les termes convergent), on obtient $M((u \circ v)(f) - f) = 0$
Comme $M(-)$ est une norme sur $\mathcal{E}$, on peut conclure :
$$\boxed{\forall f \in \mathcal{E}, (u \circ v)(f) = f}$$
$u \circ v$ est donc une fonction injective et par suite, v est également injective.
Donc $\boxed{0 \text{ n'est pas valeur propre de } v}$

12) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Par densité de $\mathcal{P}$ dans l'espace $(\mathcal{E}, N)$, il existe $g \in \mathcal{P}$ tel que
$$N(f-g) \leq \frac{1}{p}$$

Notons désormais $h = f - g$.
D'après la question 6), $M(u(h)) \leq M(h)$. De plus

$$\forall x \in [-a, a]\,, (u(h))'(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin t \times h'(x \sin t)\ \mathrm{d}t.$$

Donc $\forall x \in [-a, a]\,, |(u(h))'(x)| \leq M(h')$ puis $M((u(h))') \leq M(h')$.
Par sommation, $N(u(h)) \leq N(h)$.
D'après la question 8),

$$M(v(u(h)) \leq K \times N(u(h)) \leq KN(h)$$

Donc $M((v \circ u)(h)) \leq \dfrac{K}{p}$

Puis $M((v \circ u)(f) - (v \circ u)(g)) \leq \dfrac{K}{p}$

Donc $M((v \circ u)(f) - g) \leq \dfrac{K}{p}$

$M((v \circ u)(f) - f) \leq M(f - g) + \dfrac{K}{p} \leq N(f - g) + \dfrac{K}{p}$.
Ainsi,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, 0 \leq M((v \circ u)(f) - f) \leq \frac{K+1}{p}.$$

Par passage à la limite quand $p \to +\infty$ (tous les termes convergent), on obtient $M((v \circ u)(f) - f) = 0$
Comme $M(-)$ est une norme sur $\mathcal{E}$, on peut conclure :

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{E}, (v \circ u)(f) = f}$$

D'après les questions 11) et 12),

$\boxed{u \text{ et } v \text{ sont inversibles dans } L(\mathcal{E}) \text{ et bijection réciproque l'une de l'autre}}$

13) On a déjà vu dans la question 2) que $\boxed{\forall x \in [-a, a]\,, v(f)(x) = f(0) + \dfrac{x\pi}{2}u(f')(x)}$
arctan$'$ est de classe C^∞ sur $[-a, a]$ donc on peut calculer $u(\arctan')$.
Soit $x \in [-a, a]$.
$u(\arctan')(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + x^2 \sin^2(t)}\ \mathrm{d}t$
$t \mapsto \tan(t)$ est une fonction de classe C^1, strictement croissante et bijective de $[0, \pi/2[$ vers $[0, +\infty[$.
$z \mapsto \dfrac{1}{1 + (1 + x^2)z^2}$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.
D'après le théorème de changement de variable et après quelques calculs annexes,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + (1 + x^2)z^2}\ \mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + x^2 \sin^2(t)}\ \mathrm{d}t$$

Donc $u(\arctan')(x) = \dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \arctan(\sqrt{x^2 + 1}z)\right]_0^\infty = \dfrac{2}{\pi} \times \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in [-a, a]\,, u(\arctan')(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}}$
La fin de la question est totalement et grossièrement hors programme. Je n'en rédigerai pas de correction.

14) Supposons f paire.
$u(f)$ est définie sur un intervalle symétrique par rapport à 0.
Soit $x \in [-a, a]$.

$$\begin{aligned} u(f)(-x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(-x \sin t)\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x \sin t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{par parité de } f \\ &= u(f)(x). \end{aligned}$$

Donc $u(f)$ est paire.
On démontre de la même façon que si f est impaire, alors $u(f)$ est également impaire.
Supposons $u(f)$ paire.
D'après ce qui précède, on peut écrire que

$$\forall x \in [-a, a]\,, f(x) = v(u(f))(x) = u(f)(0) + \frac{\pi}{2} x u(u(f)')(x)$$

Comme dérivée d'une fonction paire, $u(f)'$ est impaire donc $u(u(f)')$ est impaire également donc

$$x \mapsto x \times u(u(f)')(x)$$

est paire.
Conclusion : f est paire.
Supposons $u(f)$ impaire.
Alors $u(f)(0) = 0$.
Comme dérivée d'une fonction impaire, $u(f)'$ est paire donc $u(u(f)')$ est paire également.
De plus,

$$\forall x \in [-a, a]\,, f(x) = u(f)(0) + \frac{\pi}{2} x \times u(u(f)')(x) = \frac{\pi}{2} x \times u(u(f)')(x).$$

Comme produit d'une fonction impaire ($x \mapsto x$) et d'une fonction paire, f est impaire.
Conclusion : $\boxed{\text{Les deux équivalences souhaitées sont démontrées}}$
Supposons $v(f)$ paire.
D'après ce qui précède, $u(v(f))$ est paire donc f est paire.
Supposons $v(f)$ impaire. Alors, de même, f est impaire.
Supposons f paire (resp impaire).
$f = u(v(f))$ donc d'après ce qui précède, $v(f)$ est paire (resp impaire).
Conclusion : $\boxed{\text{Les deux équivalences envisagées sont démontrées pour } v}$

Partie D - Étude des valeurs et vecteurs propres de u et v

15) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour que la question ait un sens, on est obligé de supposer que $\lambda \neq 0$ (de toute façon, on a prouvé que 0 n'était pas valeur propre de v).

   - Supposons que λ soit une valeur propre de v, et soit $f \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors on a

   $$f = u(v(f)) = u(\lambda f) = \lambda u(f).$$

   Il vient ensuite $\boxed{u(f) = \frac{1}{\lambda} \times f}$

   Donc $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de u, et f est un vecteur propre associé.

   - Réciproquement, supposons que $\frac{1}{\lambda}$ soit une valeur propre de u, et soit $f \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors

   $$f = v(u(f)) = v\left(\frac{1}{\lambda} \times f\right) = \frac{1}{\lambda} \times v(f).$$

   Donc $\boxed{v(f) = \lambda f}$

   Donc λ est valeur propre de v, et f est un vecteur propre associé.

16) Soit $f \in \mathcal{D}$, $\alpha \in \,]0, a]$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall u \in]-\alpha, \alpha[\,,\ f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n.$$

Soit $(x, t) \in \,]-\alpha, \alpha[\times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors $|x \sin t| < \alpha$ donc on a

$$u(f)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \sin^n t \right) dt = \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi} a_n x^n \sin^n t \right) dt.$$

On voudrait utiliser le théorème d'intégration terme à terme. Pour cela, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et on écrit

$$\int_0^{\pi/2} \left| \frac{2}{\pi} a_n x^n \sin^n t \right| dt \leq |a_n x^n|.$$

Or la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence au moins égal à α, et comme $|x| < \alpha$ alors la série numérique $\sum a_n x^n$ converge absolument. Cela permet d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme et d'écrire

$$u(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2a_n}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt \right) x^n = \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2a_n W_n}{\pi} x^n}$$

En particulier, on a bien $\boxed{u(f) \in \mathcal{D}}$

De plus, on a

$$\forall t \in]-\alpha, \alpha[\,,\ f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$$

et la série entière $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ possède elle aussi un rayon de convergence supérieur ou égal à α. Ainsi on peut appliquer le même raisonnement, et on obtient

$$v(f)(x) = a_0 + x \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n a_n \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} t \right) x^{n-1} = \boxed{a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n W_{n-1} x^n}$$

En particulier, on a bien $\boxed{v(f) \in \mathcal{D}}$

17) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $|f^{(n)}|$ est continue sur le segment I, donc <u>le réel m_n est bien défini</u>. Ensuite, on a

$$\forall x \in I,\ \lambda f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x \sin t) \, dt.$$

En reprenant les calculs de la question 2), on en déduit

$$\forall x \in I,\ \lambda f^{(n)}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) f^{(n)}(x \sin t) \, dt.$$

Fixons $x \in I$. En passant au module on en déduit $\boxed{|\lambda| \cdot |f^{(n)}(x)| \leq \frac{2m_n W_n}{\pi}}$

De plus on a $\lambda \neq 0$ (sans quoi u ne serait pas injective), donc $|\lambda| > 0$. Puisque $W_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{2W_n}{\pi} < |\lambda|.$$

Puis fixons $x \in I$ tel que $|f^{(n)}(x)| = m_n$. On a

$$|\lambda| \cdot m_n \leq \frac{2m_n W_n}{\pi},$$

d'où on déduit que nécessairement $m_n = 0$. Donc $\boxed{f^{(n)} = 0}$

Donc <u>f est polynomiale</u> (de degré au plus $n-1$).

18) La question 15) permet de se ramener à l'étude des éléments propres de u. On garde les notations de la question 1).

- Analyse
  Soit λ une valeur propre de u, et $f \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Alors f est polynomiale et non nulle. Notons $n \in \mathbb{N}$ son degré, et décomposons-la sur la base $(f_0, \ldots, f_n)$:

$$f = \alpha_0 f_0 + \ldots + \alpha_n f_n.$$

En appliquant u et en réutilisant la question 3), on a par unicité d'écriture (I est une partie infinie de $\mathbb{R}$) que

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \lambda \alpha_k = \frac{2W_k}{\pi} \alpha_k.$$

Puisque $f \neq 0$, on peut fixer k_0 tel que $\alpha_{k_0} \neq 0$. On en tire $\boxed{\lambda = \dfrac{2W_{k_0}}{\pi}}$

Puis, par stricte monotonie de la suite (W_k) on a

$$\forall k \neq k_0,\ \alpha_k = 0.$$

Donc $\boxed{f \in \mathrm{Vect}(f_{k_0})}$

- Synthèse
  La réciproque a déjà été effectuée à la question 3).

Conclusion

- Les valeurs propres de u sont exactement les $\lambda_n = \dfrac{2W_n}{\pi}$, et les sous-espaces propres associés sont les $\mathrm{Vect}(f_n)$.
- Les valeurs propres de v sont exactement les $\mu_n = \dfrac{\pi}{2W_n}$, et les sous-espaces propres associés sont les $\mathrm{Vect}(f_n)$.

19) - On a $\mathrm{Vect}((f_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \mathcal{P}$, et $\boxed{\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{E}}$
  En effet, par exemple, la fonction cos vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \cos^{(4n)}(0) = 1,$$

  donc elle vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ \cos^{(4n)} \neq 0$. Donc elle n'est pas polynomiale. Pourtant, elle appartient clairement à $\mathcal{E}$.
  Donc $\mathcal{E}$ n'admet pas de base de vecteurs propres (qu'ils soient de u ou de v).
- L'ensemble $\{\lambda_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas fermé, car 0 lui est adhérent.
- Montrons que l'ensemble $F = \{\mu_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ est fermé.
  - Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans F qui converge vers un complexe x. Pour $k \in \mathbb{N}$, écrivons $x_k = \mu_{\varphi(k)}$. Puisque la suite (x_k) converge, elle est bornée. Soit M un majorant de $|x_k|$. On a donc

$$\forall k \in \mathbb{N},\ |\mu_{\varphi(k)}| \leq M.$$

  - Or on a $\mu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n > N,\ |\mu_n| > M.$$

    On en déduit que la suite x_k est à valeurs dans $\{\mu_0, \ldots, \mu_N\}$.
  - Cet ensemble est fini donc compact (ne serait-ce que parce qu'il est fermé et borné dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}$, qui est de dimension finie). Ainsi, la suite (x_k) admet une valeur d'adhérence μ_n, avec $n \in [\![0, N]\!]$. Par unicité de la limite on obtient $x = \mu_n$, donc $\boxed{x \in F}$