# CCP PSI 2
**un corrigé.**

## 1 Etude d'un endomorphisme

**I.1.1** $\Phi$ est linéaire par linéarité de la dérivation et distributivité de la multiplication sur l'addition. On remarque que
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \Phi(X^k) = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$$
Ainsi, $\Phi(\mathbb{R}_n[X]) = \text{Vect}(\Phi(1), \dots, \Phi(X^n)) \subset \mathbb{R}_n[X]$ (chaque $\Phi(X^k)$ étant dans $\mathbb{R}_n[X]$ pour $k \le n$). $\mathbb{R}_n[X]$ est donc stable par $\Phi_n$.

**I.1.2** L'application $\langle .,. \rangle$ est symétrique, linéaire par rapport à la seconde variable. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P, P \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)^2\ dt \ge 0$. Si cette quantité est nulle alors $P^2$ est nul sur $[-1, 1]$ (positif, continu, d'intégrale nulle) et donc $P = 0$ (polynôme avec une infinité de racines). On a donc bien un produit scalaire.
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ ;
$$\langle XP, Q \rangle = \int_{-1}^{1} tP(t)Q(t)\ dt = \langle P, XQ \rangle$$

**I.2.1** Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ ; comme $B = A'$, on a
$$\langle \Phi(P), Q \rangle - \langle P, \Phi(Q) \rangle = \int_{-1}^{1} \big((P''Q - PQ'')A + (P'Q - PQ')A'\big)$$
On remarque que $(P''Q - PQ'')A + (P'Q - PQ')A'$ est la dérivée de $(P'Q - PQ')A$ et on a donc
$$\langle \Phi(P), Q \rangle - \langle P, \Phi(Q) \rangle = \big[(P'Q - PQ')A\big]_{-1}^{1} = 0$$
On a montré que
$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ \langle \Phi_n(P), Q \rangle = \langle P, \Phi_n(Q) \rangle$$
ce qui signifie que $\Phi_n$ est auto-adjoint.

**I.2.2** Les calculs de **I.1.1** montre que la matrice de $\Phi_n$ dans la base canonique est
$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 6 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & n(n+1) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$
C'est une matrice triangulaire et ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux. On a ainsi
$$\text{Sp}(\Phi(n)) = \{k(k+1)/\ 0 \le k \le n\}$$

**I.2.3** Les valeurs propres de $\Phi_n$ sont deux à deux distinctes ($x \mapsto x(x+1)$ est injective sur $\mathbb{R}^+$) et en nombre $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. Comme les sous-espaces propres sont en somme directe, ils sont donc forcément tous de dimension 1.
$\Phi_{k+1}$ possède une valeur propre de plus que $\Phi_k$. Il y a donc un vecteur propre de $\Phi_{k+1}$ qui n'est pas vecteur propre de $\Phi_k$. C'est un polynôme de degré $\le k+1$ qui n'est pas de degré $\le k$ et qui est donc de degré $k+1$. Ceci montre que $\Phi_n$ possède un vecteur propre de degré $1, 2, \dots, n$. Il y en a aussi un de degré 0 (le polynôme constant qui est associé à la valeur propre 0).
Un multiple d'un vecteur propre étant encore propre, on peut se ramener au cas d'un polynôme

unitaire. Il existe finalement une base de vecteurs propres pour $\Phi_n$ échelonnée en degré et formée de polynômes unitaires.
Avec la remarque initiale, on peut même affirmer que

$$\ker(\Phi_n - k(k+1)Id) = \text{Vect}(P_k)$$

**I.2.4** Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique étant orthogonaux, les $P_k$ forment ainsi une famille orthogonale (et donc une base orthogonale de vecteurs propres) et on a

$$\forall i \neq k,\ \langle P_i, P_k\rangle = 0$$

En particulier $P_k$ est dans l'orthogonal de $\text{Vect}(P_0, \dots, P_{k-1})$. Cette famille est constitué de $k$ polynômes indépendants (orthogonaux et non nuls) de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Elle engendre ainsi un sous-espace de dimension $k$ de $\mathbb{R}_k[X]$ qui, par dimension, est égal à $\mathbb{R}_k[X]$ :

$$\forall k,\ P_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]^{\perp}$$

**I.2.5** On détermine avec la calculatrice les vecteurs propres de $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ et on en déduit (après normalisation) que

$$P_0 = 1,\ P_1 = X,\ P_2 = X^2 - \frac{1}{3} = (X - \frac{1}{\sqrt{3}})(X + \frac{1}{\sqrt{3}}),\ P_3 = X(X^2 - \frac{3}{5}) = X(X - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}})(X + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}})$$

## 2 Etude des racines de ces polynômes

**II.1** $P_n$ et $XP_{n-1}$ étant unitaires de degré $n$, $P_n - XP_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Notons $\lambda_n$ l'opposé du coefficient de $X^{n-1}$ dans ce polynôme. On a alors $P_n - XP_{n-1}$ et $-\lambda_n P_{n-1}$ qui sont de degré $\leq n-1$ et ont des coefficients identiques devant $X^{n-1}$. Leur différence $P_n - XP_{n-1} + \lambda_n P_{n-1}$ est donc de degré $\leq n-2$ et

$$P_n - XP_{n-1} + \lambda_n P_{n-1} = S_n \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$$

**II.2** Soit $k \leq n-3$. $\langle XP_{n-1}, P_k\rangle = \langle P_{n-1}, XP_k\rangle = 0$ car $XP_k \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et est donc orthogonal à $P_{n-1}$. On a ainsi (on sait aussi que $P_{n-1}$ et $P_k$ sont orthogonaux)

$$\langle S_n, P_k\rangle = \langle P_n, P_k\rangle - \langle XP_{n-1}, P_k\rangle + \lambda_n\langle P_{n-1}, P_k\rangle = \langle P_n, P_k\rangle$$

**II.3** $S_n$ et $P_{n-2}$ sont tous deux deux dans $\mathbb{R}_{n-2}[X] \cap \mathbb{R}_{n-3}[X]^{\perp}$ et cet espace est de dimension 1 (l'orthogonal d'un espace de dimension $n-2$ dans un espace de dimension $n-1$ est de dimension 1). Ces deux polynômes sont donc colinéaires et comme $P_{n-2} \neq 0$, il existe $\mu_{n-2}$ tel que $S_{n-2} - \mu_{n-2}P_{n-2}$. On a alors

$$P_n = (X - \lambda_n)P_{n-1} - \mu_n P_{n-2}$$

Prenons le produit scalaire de cette expression avec $P_{n-2}$. On obtient

$$\mu_n \|P_{n-2}\|^2 = \langle XP_{n-1}, P_{n-2}\rangle = \langle P_{n-1}, XP_{n-2}\rangle$$

$XP_{n-2} - P_{n-1}$ est de degré $\leq n-2$ et donc orthogonal à $P_{n-1}$. On a donc aussi

$$\mu_n \|P_{n-2}\|^2 = \langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle > 0$$

et comme $\|P_{n-2}\|^2 > 0$, on conclut que

$$\mu_n > 0$$

Avec les résultats de **I.2.5** on a

$$P_2 = XP_1 - \frac{1}{3} \text{ et } P_3 = XP_2 - \frac{4}{15}P_1$$

et ainsi

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0, \ \mu_2 = \frac{1}{3}, \ \mu_3 = \frac{4}{15}$$

**II.4** Si $k \geq 1$ alors $P_k$ est orthogonal à $P_0 = 1$ et donc

$$\int_{-1}^{1} P_k(t)\, dt = \langle P_k, P_0 \rangle = 0$$

Si, par l'absurde, $P_k$ n'admettait que des racines d'ordre impair dans $]-1,1[$, il serait de signe constant sur $]-1,1[$ (les racines avec changement de signe sont celles d'ordre impair) et donc aussi (continuité) sur $[-1,1]$. Etant continu et d'intégrale nulle sur $[-1,1]$, il serait nul sur $[-1,1]$ et donc nul (polynôme avec une infinité de racines). C'est impossible et $P_k$ a donc au moins une racine d'ordre impair dans $]-1,1[$.

**II.5** Supposons, par l'absurde $k < n$. On a alors $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui est orthogonal à $P_n$ et donc $\int_{-1}^{1} PQ_n = 0$. Or, par définition de $Q_n$, $PQ_n$ n'a que des racines d'ordre pair dans $]-1,1[$ et est donc de signe constant sur $[-1,1]$. On aboutit à une contradiction comme en question précédente.

On a donc au moins $n$ racines d'ordre impair dans $]-1,1[$ pour $P_n$. Mais $P_n$ admettant au plus $n$ racines comptées avec leurs multiplicités, les ordres valent nécessairement 1 et il n'y a pas d'autres racines. Finalement, $P_n$ est scindé à racines simples et ses racines sont toutes dans $]-1,1[$.

# 3 Etude d'une matrice

**III.1.1** On a directement

$$Q_1(X) = X \text{ et } Q_2(X) = X(X-\lambda_2) - \mu_2 = (X-\lambda_2)Q_1(X) - \mu_2 Q_0(X)$$

Pour calculer $Q_3(X)$, on développe par rapport à la dernière colonne :

$$Q_3(X) = (X-\lambda_3)Q_2(X) + \sqrt{\mu_3}(-\sqrt{\mu_3}X) = (X-\lambda_3)Q_2(X) - \mu_3 Q_1(X)$$

**III.1.2** On procède de même en développant par rapport à la dernière colonne dans $Q_n(X)$ :

$$Q_n(X) = (X-\lambda_n)Q_{n-1}(X) + \sqrt{\mu_n}\Delta_{n-1}(X)$$

où $\Delta_{n-1}(X)$ est un déterminant de taille $n-1$ que l'on développe par rapport à sa dernière ligne pour obtenir

$$Q_n(X) = (X-\lambda_n)Q_{n-1}(X) - \mu_n Q_{n-2}(X)$$

**III.1.3** On a $Q_O = P_0$, $P_1 = Q_1$ et $(P_k)$ et $(Q_k)$ qui vérifient la même relation de récurrence d'ordre 2. Une récurrence donne alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ Q_k(X) = P_k(X)$$

Or, $M_n$ est symétrique réelle et donc diagonalisable. Son polynôme caractéristique $(-1)^n Q_n(X)$ est alors scindé sur $\mathbb{R}$. $Q_n = P_n$ est donc scindé sur $\mathbb{R}$ (toutes ses racines sont réelles).

**III.2.1** Soit $x \in F_i$. On peut l'écrire $x = \sum_{k=1}^{i} x_k e_k$ et on a (la famille des $e_k$ étant orthonormée)

$$(u(x)|x) = \sum_{k=1}^{i} \alpha_k x_k^2 \leq \alpha_i \sum_{k=1}^{i} x_k^2 = \alpha_i \|x\|^2$$

avec égalité pour $x = e_i$ par exemple. On a ainsi

$$\max_{x \in F_i, \|x\|=1} (u(x)|x) = \alpha_i$$

**III.2.2** Soit $x \in G_i$. On peut l'écrire $x = \sum_{k=i}^{n} x_k e_k$ et on a (la famille des $e_k$ étant orthonormée)

$$(u(x)|x) = \sum_{k=i}^{n} \alpha_k x_k^2 \geq \alpha_i \sum_{k=i}^{n} x_k^2 = \alpha_i \|x\|^2$$

avec égalité pour $x = e_i$ par exemple. On a ainsi

$$\min_{x \in G_i, \|x\|=1} (u(x)|x) = \alpha_i$$

**III.3** Soit $F$ de dimension $i$. Par formule de Grassman,

$$\dim(F \cap G_i) = \dim(F) + \dim(G_i) - \dim(F + G_i) = n + 1 - \dim(F + G_i) \geq 1$$

et $F \cap G_i \neq \{0\}$. D'après la question précédente $(u(x)|x) \geq \alpha_i$ pour $x$ unitaire dans $G$ et donc a fortiori dans $G \cap F_i$. Comme il existe un tel $x$ (puisque $F \cap G_i$ contient une droite) on a

$$\max_{x \in F, \|x\|=1} (u(x)|x) \geq \alpha_i$$

et comme ceci est vrai pour tout sous-espace $F$ de dimension $i$ (la borne inférieure est le plus grand des minorants et $\alpha_i$ est un minorant)

$$\alpha_i \leq \inf_{\substack{F \text{ sev de } \mathbb{R}^n \\ \dim(F)=i}} \left\{ \max_{x \in F, \|x\|=1} (u(x)|x) \right\}$$

Pour $F = F_i$, on a vu que le minorant trouvé est atteint. C'est donc en fait la borne inférieure et, mieux, le minimum :

$$\alpha_i = \min_{\substack{F \text{ sev de } \mathbb{R}^n \\ \dim(F)=i}} \left\{ \max_{x \in F, \|x\|=1} (u(x)|x) \right\}$$

**III.4.1** On note $u_k$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^k$ canoniquement associé à $u_k$. Si $y \in \mathbb{R}^k$, on note $Y$ la matrice colonne associée (coordonnées dans la base canonique).
Soit $F'$ un sous-espace de $\mathbb{R}^{n-1}$ de dimension $n-i$. On note $F = \{x = (x'_1, \dots, x'_{n-1}, 0) / (x'_1, \dots, x'_{n-1}) \in F'\}$. $F$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ isomorphe à $F'$ et donc de dimension $n - i$. Si $x' \in F'$, on note $x \in F$ l'élément associé. Un calcul par blocs montre que

$$\forall x' \in F', \ (u_{k-1}(x')|x') = {}^t X' M_{n-1} X' = {}^t X M_n X = (u_n(x)|x)$$

et donc ($\|x\| = 1$ ssi $\|x'\| = 1$)

$$\min_{x' \in F', \|x'\|=1} (u_{k-1}(x')|x') = \min_{x \in F, \|x\|=1} (u_{k-1}(x)|x)$$

Avec le résultat admis, le membre de droite est inférieur à $\alpha_{i+1}$ et donc

$$\min_{x' \in F', \|x'\|=1} (u_{k-1}(x')|x') \leq \alpha_{i+1}$$

Ceci étant vrai pour tout sous-espace de dimension $i$ de $\mathbb{R}^{n-1}$, la question **III.3** (utilisée avec $u_{n-1}$) donne alors

$$\beta_i \leq \alpha_{i+1}$$

Soit maintenant $F'$ de dimension $i$. Avec les mêmes notations,

$$\max_{x' \in F', \|x'\|=1} (u_{k-1}(x')|x') = \max_{x \in F, \|x\|=1} (u_{k-1}(x)|x) \geq \alpha_i$$

et donc

$$\beta_i \geq \alpha_i$$

**III.4.2** Il suffit d'utiliser la question précédente avec $i = 1, \ldots, n-1$ pour obtenir

$$\alpha_1 \leq \beta_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_{n-1} \leq \beta_{n-1} \leq \alpha_n$$

**III.4.3** Les $\beta_i$ sont les racines de $Q_{n-1} = P_{n-1}$ et les $\alpha_i$ celles de $Q_n = P_n$. La question précédente permet immédiatement de conclure.