

I

I.A -

I.A.1) La singularité est bien sûr en $+\infty$, et la fonction est positive.

Sur l'intervalle, la fonction est majorée par e^{-xt} , dont l'intégrale converge car $x > 0$.

La même majoration donne donc : $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt \leq \int_1^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$.

I.A.2) On fait un développement limité à l'ordre 1 du numérateur, et on obtient :

$$e^{-t} - e^{-xt} = (x-1)t + o(t).$$

Ce qui donne : $\frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} = x - 1 + o(1)$.

La limite, finie, en 0^+ de cette fonction existe et vaut $x - 1$.

I.A.3) Cette limite finie en 0 donne donc la convergence de l'intégrale en 0.

Sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$, la fonction ne change pas de signe. Ce signe dépend de l'intervalle et de la valeur de x par rapport à 1.

La convergence absolue de l'intégrale équivaut alors à sa convergence, ce qu'on vient de montrer.

I.B -

I.B.1) On considère sur $[c, +\infty[\times]0, +\infty[$, $f(x, t) = \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$

Cette application est absolument intégrable par rapport à t sur $]0, +\infty[$,

de plus, $\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| = e^{-xt} \leq e^{-ct}$, qui ne dépend pas de x , et dont l'intégrale converge.

Ceci assure la classe $\mathcal{C}^1$ de F sur $[c, +\infty[$.

De plus, on a alors $F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$

I.B.2) Ce résultat est encore valable sur la réunion des intervalles précédents, donc sur $]0, +\infty[$.

On a $F'(x) = \frac{1}{x}$, et, $F(1) = 0$, ce qui donne immédiatement : $F(x) = \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.

I.C - Il suffit d'utiliser F en a et en b .

$$F(b) - F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-bt}}{t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt,$$

par linéarité des intégrales convergentes.

Ce qui prouve que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ converge et vaut $\ln(b) - \ln(a)$.

I.D -

I.D.1) On a une double singularité en 0 et en 1. Remarquons encore que la fonction est positive.

En 0, $1 - e^{-t} \sim t$ et donc, $\frac{e^{-xt}}{t}(1 - e^{-t})^n \sim t^{n-1}$, dont l'intégrale converge évidemment !

En $+\infty$, quand $t \geq 1$, on a $0 \leq \frac{e^{-xt}}{t}(1 - e^{-t})^n \leq e^{-xt}$, dont l'intégrale converge encore une fois.

$$I.D.2) - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (1 - e^{-kt}) = - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-kt} = -(1-1)^n + (1 - e^{-t})^n = (1 - e^{-t})^n$$

$$I.D.3) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} (1 - e^{-t})^n dt = - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} (1 - e^{-kt}) dt,$$

par linéarité des intégrales convergentes.

$$\text{On en déduit : } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} (1 - e^{-t})^n dt = - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-(x+k)t}}{t} dt$$

$$= - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (\ln(x+k) - \ln(x)) = - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \ln(x+k) + \ln(x) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k.$$

Finalement : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} (1 - e^{-t})^n dt = - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \ln(x+k).$

II

II.A -

II.A.1) On a une famille de polynômes de degrés différents deux à deux, elle est donc libre.

D'autre part, on a $n+1$ polynômes dans un espace vectoriel de degré $n+1$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

II.A.2) $P_k(X) = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X+j)$, donc :

$$\begin{aligned} \Delta(P_k)(X) &= \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X+1+j) - \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X+j) = \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^k (X+j) - \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X+j) \\ &= \left(\frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} (X+j) \right) ((X+k) - X) = \frac{1}{(k-1)!} \prod_{j=1}^{k-1} (X+j) = \frac{1}{(k-1)!} \prod_{j=0}^{k-2} (X+1+j) \\ &= P_{k-1}(X+1). \end{aligned}$$

D'autre part, $P_0(X) = 1$, donc, $\Delta(P_0)(X) = 1 - 1 = 0$.

II.A.3) À chaque fois qu'on applique Δ , on descend d'un indice, par récurrence très facile, on a donc, pour $m \leq k-1$, $\Delta^m(P_k)(X) = P_{k-m}(X+m)$.

Pour $m = k$, $\Delta^m(P_m)(X) = P_0(X+m) = 1$.

Enfin, à partir de ce moment, on aura la fonction nulle, pour $m \geq k+1$, $\Delta^m(P_k)(X) = 0$.

II.A.4) Si P est de degré inférieur ou égal à $n-1$, alors, P est combinaison linéaire des P_k , pour k variant de 0 à $n-1$.

On a alors toujours $\Delta^m(P_k)(X) = 0$, et, par linéarité, $\Delta^m(P)(X) = 0$.

II.B -

II.B.1) La vérification initiale est immédiate,

$$\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X) = -P(X) + P(X+1) = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} (-1)^{1-k} P(X+k).$$

On admet donc la propriété au rang n , on la montre au rang $n+1$.

Par linéarité,

$$\begin{aligned} \Delta^{n+1}(P)(X) &= \Delta(\Delta^n(P))(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \Delta(P)(X+k) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (P(X+1+k) - P(X+k)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+1+k) - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} (-1)^{n+1-k} P(X+k) - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k) \\ &= P(X+n+1) + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) (-1)^{n+1-k} P(X+k) + (-1)^{n+1} P(X) \\ &= (-1)^{n+1} P(X) + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} P(X+k) + P(X+n+1) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} P(X+k). \end{aligned}$$

Ce qui est bien la formule attendue, et termine la récurrence.

II.B.2) On prend $P(X) = X^r$, et, $r \leq n-1$, donc, $\Delta^n(P) = 0$.

Ce qui donne immédiatement : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (X+k)^r = 0$.

On multiplie par $(-1)^n$, et on utilise $(-1)^{-k} = (-1)^k$, pour obtenir : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (X+k)^r = 0$.

III

III.A -

III.A.1) La seule singularité est en $+\infty$ et la fonction est positive.

$$0 \leq \frac{e^{-xt}}{t^r} (1 - e^{-t})^n \leq \frac{e^{-xt}}{t^r} = e^{-xt/2} \frac{e^{-xt/2}}{t^r} \leq e^{-xt/2}, \text{ pour } t \text{ assez grand.}$$

Comme cette dernière fonction a une intégrale convergente en $+\infty$,

l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^r} (1 - e^{-t})^n dt$ converge.

III.A.2) La fonction est encore positive, et, la singularité est maintenant en 0.

Comme dans la première partie, en 0, $\frac{e^{-xt}}{t^r} (1 - e^{-t})^n \sim \frac{1}{t^{r-n}}$, dont l'intégrale converge en 0 si et seulement si $r - n < 1$.

Mais comme ce sont des entiers, ceci équivaut à $r - n \leq 0$, c'est à dire $n \geq r$.

III.B -

III.B.1) On pose $f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{t^r} (1 - e^{-t})^n$

Pour $x \in [c, +\infty[$ et $t \in]0, +\infty[$, on a : $|f(x, t)| \leq \frac{e^{-ct}}{t^r} (1 - e^{-t})^n$, qui ne dépend pas de x et dont l'intégrale converge.

Ceci assure la continuité de F_r sur $[c, +\infty[$.

De plus, $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{e^{-xt}}{t^{r-1}} (1 - e^{-t})^n$.

Pour $x \in [c, +\infty[$ et $t \in]0, +\infty[$, on a : $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq \frac{e^{-ct}}{t^{r-1}} (1 - e^{-t})^n$, qui ne dépend pas de x et dont l'intégrale converge.

Ceci assure la classe $\mathcal{C}^1$ de F_r sur $[c, +\infty[$.

De plus, $F'_r(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x} dt = -F_{r-1}(x)$, pour $r \leq n$ et $r \geq 1$.

Ce qui est aussi $F'_{r+1}(x) = -F_r(x)$ pour $r \leq n-1$.

III.B.2) Les résultats de la question précédente sont valables sur la réunion des intervalles $[c, +\infty[$, avec $c > 0$, c'est à dire sur $]0, +\infty[$.

III.C -

III.C.1) Pour $t \geq 0$, l'inégalité $0 \leq 1 - e^{-t}$ est évidente.

On considère maintenant $g(t) = t - 1 + e^{-t}$, on a $g'(t) = 1 - e^{-t} \geq 0$, donc g est croissante.

Comme $g(0) = 0$, g est positive pour $x \geq 0$, ce qui est la deuxième inégalité demandée.

III.C.2) Tout d'abord, $F_r(x) > 0$ car c'est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non identiquement nulle.

Compte tenu de la majoration précédente, $\frac{e^{-xt}}{t^r} (1 - e^{-t})^n \leq e^{-xt} t^{n-r}$ dont l'intégrale converge en 0, car elle y a une limite finie, et en $+\infty$ par une majoration identique à la première question de cette partie.

Donc : $F_r(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} t^{n-r} dt$.

On pose maintenant $u = xt$, changement de variable monotone de classe $\mathcal{C}^1$, les intégrales sont de même nature, ici convergentes, et donc égales.

$$F_r(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} t^{n-r} dt = \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{u^{n-r}}{x^{n+1-r}} du = \frac{1}{x^{n+1-r}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{n-r} du.$$

III.C.3) L'intégrale apparaissant dans la majoration ne dépend pas de x , la puissance de x au dénominateur est strictement positive, la limite de $F_r(x)$ en $+\infty$ est donc nulle.

$$\begin{aligned} \text{III.D - } G'_{r+1}(x) &= \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (r(x+k)^{r-1} \ln(x+k) + (x+k)^{r-1}) \\ &= \frac{(-1)^{r+1}}{(r-1)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^{r-1} \ln(x+k) + \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^{r-1} \\ &= -G_r(x) + 0, \text{ en utilisant II.B.2, on a bien } r-1 \geq 0. \end{aligned}$$

On a bien le résultat demandé !

III.E - Il faut d'abord montrer que $F_1(x) = G_1(x)$.

$$F_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} (1 - e^{-t})^n dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-kt} \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-(x+k)t} \right) dt$$

Remarquons que : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^n = 0$; donc on a : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-t} = 0$.

$$\text{Ce qui nous donne : } \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-t} \right) dt = 0.$$

On enlève cette quantité à $F_1(x)$, et on regroupe les deux intégrales, qui sont bien sûr convergentes !

$$\begin{aligned} F_1(x) &= - \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (e^{-t} - e^{-(x+k)t}) \right) dt = - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-(x+k)t}}{t} dt \\ &= - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \ln(x+k) = G_1(x) \end{aligned}$$

On admet l'égalité au rang r , F_{r+1} et G_{r+1} ont donc même dérivée : elles diffèrent d'une constante. Mais comme elles ont la même limite en $+\infty$, elles sont égales.

La récurrence est démontrée.

III.F -

$$\text{III.E.1) } G_{r+1}(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^r \ln(x+k)$$

On utilise maintenant l'égalité : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (x+k)^r = 0$.

On la multiplie par $\ln(x)$ et on la soustrait à $G_{r+1}(x)$, ceci donne :

$$G_{r+1}(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^r (\ln(x+k) - \ln(x)) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^r \ln\left(1 + \frac{k}{x}\right)$$

$$\text{III.E.2) } \ln(1+u) = \sum_{j=1}^r (-1)^{j+1} \frac{u^j}{j} + o(u^r)$$

On remplace u par $\frac{k}{x}$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} G_{r+1}(x) &= \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^r \left(\sum_{j=1}^r (-1)^{j+1} \frac{k^j}{j x^j} + o\left(\frac{1}{x^r}\right) \right) \\ &= \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^r \left(\sum_{j=1}^r (-1)^{j+1} \frac{k^j}{j x^j} \right) + o(1). \end{aligned}$$

La première partie est polynomiale de degré r , qu'on divise par des termes en x^j , de $j = 1$ à r . On obtient donc des termes en x^s , pour s variant de $-r$ à $r-1$.

$$\text{Ce qui donne : } G_{r+1}(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \sum_{s=-r}^{r-1} A_s x^s + o(1) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \sum_{s=0}^{r-1} A_s x^s + o(1)$$

L'existence des coefficient A_s est démontrée, on en cherche maintenant une expression.

$$G_{r+1}(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(\sum_{i=0}^r \binom{r}{i} x^i k^{r-i} \right) \left(\sum_{j=1}^r (-1)^{j+1} \frac{k^j}{j x^j} \right) + o(1).$$

Pour avoir le terme en x^s , il faut prendre $i = s + j$.

On obtient alors, avec la convention des coefficients binomiaux « inconnus » nuls :

$$\begin{aligned} A_s &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(\sum_{j=1}^r (-1)^{j+1} \frac{k^j}{j} \binom{r}{s+j} k^{r-s-j} \right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(\sum_{j=1}^r (-1)^{j+1} \frac{k^{r-s}}{j} \binom{r}{s+j} \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^{r-s} \right) \left(\sum_{j=1}^r \frac{(-1)^{j+1}}{j} \binom{r}{s+j} \right). \end{aligned}$$

III.F.3) Remarquons que, pour $0 \leq s \leq r-1$, on a : $1 \leq r-s \leq n-1$ en utilisant $r \leq n-1$, ce qui est vérifié quand on considère $G_{r+1}(x)$.

On applique encore le II.B.2, avec $r-s$ à la place de r , et, en prenant aussi $X = 0$.

$$\text{Ce qui donne : } \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^{r-s} = 0, \text{ et donc : } A_s = 0 \text{ pour } s \geq 0.$$

III.F.4) Finalement : $G_{r+1}(x) = o(1)$, sa limite en $+\infty$ est bien nulle !

IV

IV.A -

$$\text{IV.A.1) } P_n(a) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (a+j).$$

Si $n \geq |a| + 1$, j prend la valeur $-a$, et donc, $P_n(a) = 0$.

Si $n \leq |a|$, en posant $p = |a|$,

$$P_n(a) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (-p+j) = (-1)^n \frac{\prod_{j=0}^{n-1} (p-j)}{n!} = (-1)^n \frac{p!}{n!(p-n)!} = (-1)^n \binom{p}{n}$$

IV.A.2) La série est donc nulle à partir d'un certain rang, donc convergente.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(a) x^n = \sum_{n=0}^p (-1)^n \binom{p}{n} x^n = (1-x)^p = (1-x)^{-a}$$

IV.B -

IV.B.1) Dans ce cas, aucun des $P_n(a)$ n'est nul, on peut chercher le rayon de convergence par application du théorème de d'Alembert.

$$\left| \frac{P_{n+1}(a) x^{n+1}}{P_n(a) x^n} \right| = \left| \frac{\prod_{j=0}^n (p-j)}{\prod_{j=0}^{n-1} (p-j)} \times \frac{n!}{(n+1)!} \right| |x| = \left| \frac{p-n}{n+1} \right| |x| = \left| \frac{n-p}{n+1} \right| |x|, \text{ dont la limite en } +\infty \text{ est } |x|.$$

Le rayon de convergence est donc égal à 1.

IV.B.2) On se place donc sur $] - 1, 1[$, et on calcule :

$$\begin{aligned} (-x)S'_a(x) - aS_a(x) &= (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} nP_n(a)x^{n-1} - a \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(a)x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} nP_n(a)x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} nP_n(a)x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} aP_n(a)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nP_n(a)x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} nP_n(a)x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} aP_n(a)x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} nP_n(a)x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+a)P_n(a)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)P_{n+1}(a)x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+a)P_n(a)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)P_{n+1}(a) - (n+a)P_n(a))x^n \end{aligned}$$

Calculons maintenant le coefficient de x^n en utilisant $P_{n+1}(a) = \frac{a+n}{n+1}P_n(a)$:

$$(n+1)P_{n+1}(a) - (n+a)P_n(a) = \left((n+1)\frac{a+n}{n+1} - (n+a) \right) P_n(a) = 0.$$

S_a vérifie donc bien l'équation différentielle indiquée.

IV.B.3) On résout cette équation différentielle sur $] - 1, 1[$, qui est un intervalle admissible :

$$S_a(x) = Ke^{\int \frac{a}{1-x} dx} = Ke^{-a \ln(1-x)} = K(1-x)^{-a}.$$

D'autre part, $S_a(0) = P_0(a) = 1$, donc $K = 1$.

Finalement, sur $] - 1, 1[$, $S_a(x) = (1-x)^{-a}$.

IV.C -

IV.C.1) $w_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln \left((n+1)^c \left| \frac{n+a}{n+1} \right| |P_n(a)| \right) - \ln(n^c |P_n(a)|)$

$$= c \ln(n+1) + \ln \left(1 + \frac{a}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - c \ln(n) = (c-1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{a}{n} \right)$$

On fait un développement limité à l'ordre 2 de w_n , ce qui donne :

$$w_n = \frac{c-1}{n} - \frac{c-1}{2n^2} + \frac{a}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{c-1+a}{n} - \frac{c-1+a^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ceci est le terme général d'une série convergente si et seulement si $c-1+a=0$.

L'unique valeur de c cherchée est donc $c = 1-a$.

IV.C.2) La convergence de la série des w_n équivaut à la convergence de la suite $\ln(u_n)$.

Si on appelle l la limite de cette suite, alors la suite u_n converge vers $L = e^l > 0$.

Donc, en $+\infty$, $n^c |P_n(a)| \rightarrow L$, ou, ce qui est la même chose ici, $+\infty$, $n^c |P_n(a)| \sim L$,

ce qui entraîne : $|P_n(a)| \sim \frac{L}{n^c} = \frac{L}{n^{1-a}}$.

IV.C.3) On a donc la convergence de la série des $|P_n(a)|$ si et seulement si $1-a > 1$, c'est à dire si et seulement si $a < 0$.

Dans ce cas, S_n est définie sur $[-1, 1]$ puisqu'on a convergence absolue en 1 et en -1 . D'autre part, comme somme de série entière, elle est aussi continue sur $[-1, 1]$.

$x \rightarrow (1-x)^{-a}$ est aussi définie et continue sur $[-1, 1]$, et ces deux fonctions sont égales sur l'ouvert, donc égales sur $[-1, 1]$.

On a donc : $\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(a) = (1-1)^{-a} = 0$, et, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n P_n(a) = (1-(-1))^{-a} = 2^{-a}$.

Vu la longueur du sujet, certaines démonstrations ont été rédigées succinctement.

À la question III.F.2, il faut aussi supposer $r \leq n-1$, ce que l'énoncé ne fait pas clairement.