Partie I- Fonctions homographiques

I.A - Une équation différentielle

I.A.1). On suppose $a > 0$.

a) Pour tout $x \in]-R, R[$, $(x-a)y''(x) + 2y'(x) = (x-a)\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

$(x-a)y''(x) + 2y'(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} an(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^{n-1}$.

En regroupant la première somme (qui peut commencer aussi à $n=1$) et la dernière, il vient:

$(x-a)y''(x) + 2y'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} an(n-1)a_n x^{n-2}$.

En posant $p = n-1$ dans la première somme, et $p = n-2$ dans la dernière, on obtient finalement:

$(x-a)y''(x)+2y'(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)(p+2)a_{p+1}x^p - \sum_{p=0}^{\infty} a(p+1)(p+2)a_{p+2}x^p = \sum_{p=0}^{\infty}(p+1)(p+2)\left(a_{p+1} - a\ a_{p+2}\right) x^p$.

b) On suppose y solution de (E_a). D'après l'unicité du DSE en 0 de la fonction nulle, il vient:
$\forall p \in \mathbb{N},\ (p+1)(p+2)\left(a_{p+1} - a\ a_{p+2}\right) = 0$, d'où puisque $(p+1)(p+2) > 0$, la relation de récurrence:
$\forall p \in \mathbb{N},\ a_{p+2} = \dfrac{1}{a}a_{p+1}$, soit encore $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ a_n = \dfrac{1}{a}a_{n-1}$.

On en déduit que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{a}$, ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1,\ a_n = \dfrac{1}{a^{n-1}}a_1$.

$y = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1\ x\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} = a_0 + a_1\ a\frac{x}{a-x}$.

La série géométrique est convergente s.si $\dfrac{|x|}{a} < 1$, donc s.si $x \in]-a, a[$.

c) D'après ce qui précède, les fonctions DSE qui sont solutions de (E_a) sur $]-a, a[$ sont de la forme $y = \lambda + \mu\dfrac{x}{a-x}$,
ou encore $y = \lambda + \mu\dfrac{x-a+a}{a-x} = \alpha + \beta\dfrac{1}{a-x}$.

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E_a) sur $]-a, a[$. Comme (E_a) est une équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre, on sait d'après le cours que $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{R}$-e.v de dimension 2.

Notons $\mathcal{S}'$ l'ensemble des solutions de (E_a) DSE sur $]-a, a[$. On vient de voir que $\mathcal{S}'$ est le s.e.v de $\mathcal{S}$ engendré par les deux fonctions linéairement indépendantes $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \dfrac{1}{a-x}$ qui forment donc une base de $\mathcal{S}'$.

Comme $\mathcal{S}$ contient $\mathcal{S}'$ et que ces deux espaces vectoriels ont même dimension 2, ils sont égaux.

Les solutions de (E_a) sur $]-a, a[$ sont donc les fonctions de la forme $y = \alpha + \beta\dfrac{1}{a-x}$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

I.A.2). On suppose que a est un nombre réel quelconque.

Résolvons (E_a) sur $]-\infty, a[$ en posant $y' = z$, ce qui ramène à une équation différentielle linéaire du premier ordre: $z' + \dfrac{2}{x-a}z = 0$, dont les solutions s'écrivent $z = e^{-\int \frac{2}{x-a}dx} = \lambda e^{-2\ln|x-a|} = \frac{\lambda}{(x-a)^2} = y'$.

Par intégration, $y = -\dfrac{\lambda}{x-a} + \mu$, que nous noterons y_1.

Le même calcul vaut également sur $]a,+\infty[$ et l'on obtient $y = -\dfrac{\alpha}{x-a} + \beta$, que nous noterons y_2.
Une solution y de (E_a) sur $\mathbb{R}$ doit coïncider avec y_1 sur $]-\infty,a[$, avec y_2 sur $]a,+\infty[$, et être deux fois dérivable au point a.
La continuité de y au point a impose que $\lambda = \alpha = 0$, sinon y aurait une limite $\pm\infty$ au voisinage de ce point.
Sous ces conditions, comme $\lim\limits_{x\to a^-} y = \mu$ et $\lim\limits_{x\to a^+} y = \beta$, y est continue au point a s.si $\mu = \beta$.
On obtient alors $y = \mu = \beta$ sur $\mathbb{R}$, fonction de classe C^∞ sur cet ensemble, donc les solutions de (E_a) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions constantes.

I.B - Une famille de fonctions

I.B.1). g est constante s.si les fonctions $x \mapsto \alpha x + \beta$ et $x \mapsto \gamma x + \delta$ sont proportionnelles, donc s.si le déterminant $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma = 0$.
Autre méthode: on pouvait aussi utiliser la dérivée $g'(x) = \dfrac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x+\delta)^2} = 0$ pour trouver la même condition: $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$.
On suppose dans la suite que cette condition n'est jamais remplie, donc $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

I.B.2).

a) On veut que pour tout $x \neq \dfrac{-\delta}{\gamma}$, $g(x) = \dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = u + \dfrac{v}{x+w}$, donc $\dfrac{\frac{\alpha}{\gamma}x + \frac{\beta}{\gamma}}{x + \frac{\delta}{\gamma}} = \dfrac{ux + uw + v}{x+w}$.

Il suffit de choisir u, v, w tels que: $\begin{cases} u = \frac{\alpha}{\gamma} \\ uw + v = \frac{\beta}{\gamma} \\ w = \frac{\delta}{\gamma} \end{cases}$, donc que $u = \frac{\alpha}{\gamma},\ v = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2},\ w = \frac{\delta}{\gamma}$.

b) g est dérivable en tout point $x \neq \dfrac{-\delta}{\gamma}$, et $g'(x) = -\dfrac{v}{(x+w)^2}$ a le signe contraire de $v \neq 0$.
Donc si $v > 0$, g est strictement décroissante sur chacun de ses intervalles de définition, et si $v < 0$, g est strictement croissante sur chacun de ses intervalles de définition.

I.B.3). On suppose $v > 0$.
a) (C) et (D) étant deux hyperboles de centre O, cherchons une homothétie h de centre O, de rapport $k \neq 0$, telle que $h(\text{C}) = D$. h est définie analytiquement par: $M(x,y) \mapsto M'(x' = kx,\ y' = ky)$.
On a les équivalences: $M(x,y) \in (\text{C})$ s.si $xy = 1$ s.si $\dfrac{x'y'}{k^2} = 1$ s.si $x'y' = k^2$.
La dernière égalité traduit l'appartenance de $M'(x',y')$ à (D) s.si $k^2 = v$ s.si $k = \pm\sqrt{v}$.
On vérifie par exemple que l'homothétie de centre O de rapport $\sqrt{v}$ convient.

b) Cherchons une translation t de vecteur $\vec{u}(x_0,y_0)$ telle que $(t \circ h)(\text{C}) = \Gamma$, donc telle que $t(\text{D}) = \Gamma$.
t est définie analytiquement par: $M(x,y) \mapsto M'(x' = x + x_0,\ y' = y + y_0)$.
On a les équivalences: $M(x,y) \in (\text{D})$ s.si $xy = v$ s.si $(x' - x_0)((y' - y_0) = v$ s.si $y' = y_0 + \dfrac{v}{x' - x_0}$.
La dernière égalité traduit l'appartenance de $M'(x',y')$ à (Γ) s.si $u = y_0,\ w = -x_0$.
On vérifie bien que cette translation de vecteur $\vec{u}(-w,u)$ convient.

c) $t \circ h$ est définie analytiquement par: $M(x,y) \mapsto M'(x' = \sqrt{v}\,x - w,\ y' = \sqrt{v}\,y + u)$.

$t \circ h$ est l'identité s.si $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} \sqrt{v}\,x - w = x \\ \sqrt{v}\,y + u = y \end{cases}$ s.si $\begin{cases} \sqrt{v} = 1 \\ u = 0 \\ w = 0 \end{cases}$ s.si $(u,v,w) = (0,1,0)$.
Donc si $v \neq 1$, $t \circ h$ n'est pas l'identité.

Dans ce cas, son rapport est $\sqrt{v}$ et son centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$, unique point invariant par $t \circ h$, est caractérisé par: $\left\{\begin{array}{l}(\sqrt{v}-1)x_\Omega - w = 0\\(\sqrt{v}-1)y_\Omega + u = 0\end{array}\right)$, donc $\Omega\left(\dfrac{w}{\sqrt{v}-1}, \dfrac{-u}{\sqrt{v}-1}\right)$.

I.B.4). g est solution de (E_a) sur $]-\infty, a[$ ou $]a, +\infty[$ s.si $\forall x,\ (x-a)g''(x) + 2g'(x) = 0$ s.si
$\forall x,\ \dfrac{2(x-a)v}{(x+w)^3} - \dfrac{2v}{(x+w)^2} = \dfrac{-2v(a+w)}{(x+w)^3} = 0.$
On obtient donc $a = -w$. Dans ce cas, g est solution de E_{-w} sur $]-\infty, -w[$ ou sur $]-w, +\infty[$, mais pas sur $\mathbb{R}$ car v est un réel non nul.

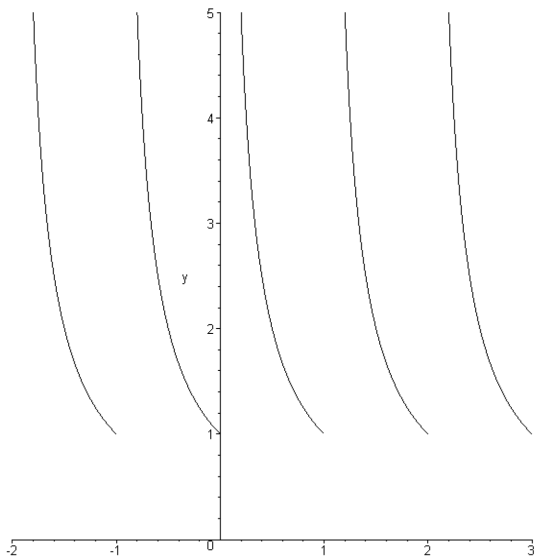
Partie II - Fractions continues

II.A - Etude de f

II.A.1) f est définie s.si $x \neq E(x)$ s.si $x \neq \mathbb{Z}$. Donc $D_f = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
Montrons que pour tout $n \in \mathbb{Z}, E(x+n) = E(x) + n$, formule qui sera utilisée dans la suite.
$E(x) \leqslant x < 1 + E(x)$ s.si $E(x) + n \leqslant x + n < E(x) + n + 1$, d'où le résultat puisque $E(x) + n$ et $E(x) + n + 1$ sont des entiers consécutifs.
Il en découle: $\forall x \in D_f,\ 1 + x \in D_f$, et $f(x+1) = \dfrac{1}{x+1-E(x+1)} = \dfrac{1}{x+1-(E(x)+1)} = f(x)$.
Donc f est de période 1.

II.A.2) On considère $k \in \mathbb{Z}$. Sur l'intervalle $]k, k+1[$, $f(x) = g(x)$ s.si $\dfrac{1}{x-k} = \dfrac{\frac{\alpha}{\gamma}x + \frac{\beta}{\gamma}}{x + \frac{\delta}{\gamma}}$ s.si $\left\{\begin{array}{l}\frac{\alpha}{\gamma} = 0\\\frac{\beta}{\gamma} = 1\\\frac{\delta}{\gamma} = -k\end{array}\right.$ s.si
$\alpha = 0,\ \beta = \gamma \neq 0,\ \delta = -k\gamma$.
On a bien alors les 2 restrictions respectives de f et de g qui coïncident sur $]k, k+1[$.

II.A.3) f étant de période 1, il suffit de l'étudier sur $]0,1[$. Sur cet intervalle, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et f est de classe C^∞, strictement dcroissante, de limite $+\infty$ en 0^+ et de limite 1 en 1^-.
L'ensemble image de f est donc l'intervalle $]1, +\infty[$.
La courbe de f admet une infinité d'asymptotes d'équation $x = k$, où $k \in \mathbb{Z}$.



II.A.4) Si $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $x - E(x) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, car $E(x)$ est un entier, donc élément de $\mathbb{Q}$.
L'inverse d'un nombre irrationnel non nul est aussi irrationnel donc $f(x) = \dfrac{1}{x - E(x)} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.
Si $x \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$, $x - E(x)$ est rationnel (différence de 2 rationnels), mais n'appartient pas à $\mathbb{Z}$ (sinon, comme $E(x) \in \mathbb{Z}$, $(x - E(x)) + E(x) = x$ serait dans $\mathbb{Z}$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur x). Donc $f(x)$ est bien défini et est un rationnel (inverse d'un rationnel non nul).

II.B - Une suite récurrente
II.B.1) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $x_n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.
Cette proposition est vraie au rang $n = 0$, par hypothèse.
Supposons qu'à un rang $n \geqslant 0$ donné, on ait $x_n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. alors d'après II.A.4), $f(x_n) = x_{n+1} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, ce qui établit la proposition au rang $n + 1$.
Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.
Il en découle: $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n - E(x_n) \neq 0$, et donc x_n est bien défini pour tout n.

II.B.2) On suppose $x_0 \in \mathbb{Q}$ et que x_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc que $x_n - E(x_n) \neq 0$.

a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $x_n \in \mathbb{Q}$.
Cette proposition est vraie au rang $n = 0$, par hypothèse.
Supposons qu'à un rang $n \geqslant 0$ donné, on ait $x_n \in \mathbb{Q}$, alors $x_n - E(x_n) \in \mathbb{Q}^*$, donc $f(x_n) = x_{n+1} \in \mathbb{Q}$, ce qui établit la proposition au rang $n + 1$.
Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in \mathbb{Q}$.
Pour $n \geqslant 1$, $x_n = f(x_{n-1})$ appartient à l'ensemble image $]1, +\infty[$ de f, donc $x_n > 1$.

b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $v_n > 0$ et $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.
Cette proposition est vraie au rang $n = 0$, car $v_0 \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 = \dfrac{u_0}{v_0}$ par hypothèse.
Supposons qu'à un rang $n \geqslant 0$ donné, on ait $v_n > 0$ et $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.
La division euclidienne de u_n par v_n donne: $u_n = v_n q_n + v_{n+1}$, avec $q_n \in \mathbb{Z}$ le quotient et $v_{n+1} \in \mathbb{N}$ le reste tel que $0 \leqslant v_{n+1} < v_n$.
Donc $\dfrac{u_n}{v_n} = q_n + \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, avec $0 \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n} < 1$, ce qui implique $E\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = q_n$.
Si $v_{n+1} = 0$, on aurait $\dfrac{u_n}{v_n} = q_n$, donc $x_n - E(x_n) = \dfrac{u_n}{v_n} - q_n = 0$, en contradiction avec l'hypothèse de II.B.2).
Ainsi $v_{n+1} > 0$. De plus, $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n - E(x_n)} = \dfrac{1}{\frac{u_n}{v_n} - q_n} = \dfrac{1}{\frac{v_{n+1}}{v_n}} = \dfrac{v_n}{v_{n+1}} = \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$, ce qui établit la proposition au rang $n + 1$.
Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n > 0$ et $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

c) On a montré au b) que pour tout n, $0 \leqslant v_{n+1} < v_n$, donc la suite (v_n) est *strictement* décroissante et constituée d'*entiers*. Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} \leqslant v_n - 1$ et par une récurrence immédiate, on vérifie qu'alors, $v_n \leqslant v_0 - n$, une telle suite aurait une limite $-\infty$, ceci est impossible car on a vu que tous les termes v_n sont positifs.
L'hypothèse de B.2) est donc impossible, on en conclut que si $x_0 \in \mathbb{Q}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} - E(x_{n_0}) = 0$ et x_{n_0+1} ne peut être défini.

II.B.3) Si $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, on a montré au II.B.1) que x_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si $x_0 \in \mathbb{Q}$, $\exists p = n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ tel que x_p ne peut être défini, d'après la question II.B.2.c). Par contraposition, si x_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.
Conclusion: une CNS sur x_0 pour que, pour tout entier naturel n, x_n soit bien défini est que $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

II.C - Le cas irrationnel

II.C.1) Algorithme d'arguments x_0 et n donnant a_n écrit en MAPLE:

```
> frac_cont:=proc(x0,n)
> local a,x,k;
> x:=x0;
> a:=floor(x);
> for k to n do
> x:=evalf(1/(x-a)); a:=floor(x)
> end do;
> a
> end proc;
```

frac_cont := **proc**(*x0*, *n*)
local *a*, *x*, *k*;
$x := x0$; $a :=$ floor(x) ; **for** k **to** n **do** $x :=$ evalf($1/(x-a)$) ; $a :=$ floor(x) **end do** ; a
end proc

Exemple: les 10 premiers termes a_n pour le nombre $x_0 = \pi$:

```
> seq(frac_cont(Pi,k),k=0..9);
```

$$3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 293,\ 10,\ 3,\ 8,\ 2,\ 1$$

II.C.2) Ici $x = \sqrt{2}$.

a) $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 2$, donc on conjecture que $\forall n \geqslant 1,\ a_n = 2$.

```
> seq(frac_cont(sqrt(2),k),k=0..4);
```

$$1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2$$

b) $x_0 = \sqrt{2} \approx 1,414$, $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 \approx 2,414$.

$x_2 = \dfrac{1}{(\sqrt{2}+1)-2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 = x_1$.

On en déduit par une récurrence évidente que: $\forall n \geqslant 1,\ x_n = \sqrt{2}+1$.

La suite (x_n) est donc stationnaire à partir du rang 1, la valeur prise étant $\sqrt{2}+1$.

Il en découle: $\forall n \geqslant 1,\ a_n = E(x_n) = 2$, ce qui démontre la conjecture du a).

c) *Les limites de la calculatrice*

Test de l'algorithme pour $x_0 = \sqrt{2}$ et $n = 30$:

```
> frac_cont(sqrt(2),30);
```

$$k = 1,\ x = 2.414213565,\ a = 2$$
$$k = 2,\ x = 2.414213547,\ a = 2$$
$$k = 3,\ x = 2.414213652,\ a = 2$$
$$k = 4,\ x = 2.414213040,\ a = 2$$
$$k = 5,\ x = 2.414216607,\ a = 2$$
$$k = 6,\ x = 2.414195817,\ a = 2$$
$$k = 7,\ x = 2.414316994,\ a = 2$$
$$k = 8,\ x = 2.413610869,\ a = 2$$
$$k = 9,\ x = 2.417731435,\ a = 2$$
$$k = 10,\ x = 2.393882567,\ a = 2$$
$$k = 11,\ x = 2.538827772,\ a = 2$$
$$k = 12,\ x = 1.855880584,\ a = 1$$

$k \ = 13, \ \ x = 1.168387295, \ a = 1$

$k \ = 14, \ \ x = 5.938690327, \ a = 5$

$k \ = 15, \ \ x = 1.065314056, \ a = 1$

$k \ = 16, \ \ x = 15.31064003, \ a = 15$

$k \ = 17, \ \ x = 3.219160132, \ a = 3$

$k \ = 18, \ \ x = 4.562873689, \ a = 4$

$k \ = 19, \ \ x = 1.776597520, \ a = 1$

$k \ = 20, \ \ x = 1.287668289, \ a = 1$

$k \ = 21, \ \ x = 3.476226050, \ a = 3$

$k \ = 22, \ \ x = 2.099843131, \ a = 2$

$k \ = 23, \ \ x = 10.01571155, \ a = 10$

$k \ = 24, \ \ x = 63.64744408, \ a = 63$

$k \ = 25, \ \ x = 1.544534935, \ a = 1$

$k \ = 26, \ \ x = 1.836429466, \ a = 1$

$k \ = 27, \ \ x = 1.195558072, \ a = 1$

$k \ = 28, \ \ x = 5.113570561, \ a = 5$

$k \ = 29, \ \ x = 8.805098709, \ a = 8$

$k \ = 30, \ \ x = 1.242083721, \ a = 1$

On voit des erreurs à partir de la ligne $k = 12$ où $a_k = 1$ et non pas 2 comme attendu. Ceci est dû au cumul des erreurs d'arrondis lors des calculs des inverses des nombres $x_k - a_k$.

d) Ici $x = \sqrt{3}$.
$a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$, donc on conjecture que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 1$ et $a_{2n+2} = 2$.

```
> seq(frac_cont(sqrt(3),k),k=0..4);
```

$$1, 1, 2, 1, 2$$

$x_0 = \sqrt{3} \approx 1,732$, $a_0 = 1$.
$x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \approx 1,366$. Donc $a_1 = 1$.
$x_2 = \dfrac{1}{x_1 - a_1} = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1 \approx 2,732$. Donc $a_2 = 2$.
$x_3 = \dfrac{1}{x_2 - a_2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = x_1$. Donc $a_3 = 1$.
$x_4 = \dfrac{1}{x_3 - a_3} = \dfrac{1}{x_1 - a_1} = x_2$.
On en déduit par une récurrence évidente la démonstration de la conjecture.

Les limites de la calculatrice
Test de l'algorithme pour $x_0 = \sqrt{3}$ et $n = 30$:

```
> frac_cont(sqrt(3),30);
```

$k \ = 1, \ \ x = 1.366025403, \ a = 1$

$k \ = 2, \ \ x = 2.732050813, \ a = 2$

$k \ = 3, \ \ x = 1.366025394, \ a = 1$

$k \ = 4, \ \ x = 2.732050881, \ a = 2$

$k \ = 5, \ \ x = 1.366025267, \ a = 1$

$$k=6,\ x=2.732051829,\ a=2$$
$$k=7,\ x=1.366023498,\ a=1$$
$$k=8,\ x=2.732065033,\ a=2$$
$$k=9,\ x=1.365998859,\ a=1$$
$$k=10,\ x=2.732248955,\ a=2$$
$$k=11,\ x=1.365655756,\ a=1$$
$$k=12,\ x=2.734812685,\ a=2$$
$$k=13,\ x=1.360891041,\ a=1$$
$$k=14,\ x=2.770919437,\ a=2$$
$$k=15,\ x=1.297152403,\ a=1$$
$$k=16,\ x=3.365276504,\ a=3$$
$$k=17,\ x=2.737652132,\ a=2$$
$$k=18,\ x=1.355652558,\ a=1$$
$$k=19,\ x=2.811732905,\ a=2$$
$$k=20,\ x=1.231932319,\ a=1$$
$$k=21,\ x=4.311602645,\ a=4$$
$$k=22,\ x=3.209215377,\ a=3$$
$$k=23,\ x=4.779763392,\ a=4$$
$$k=24,\ x=1.282440302,\ a=1$$
$$k=25,\ x=3.540571204,\ a=3$$
$$k=26,\ x=1.849895060,\ a=1$$
$$k=27,\ x=1.176615852,\ a=1$$
$$k=28,\ x=5.662005922,\ a=5$$
$$k=29,\ x=1.510560505,\ a=1$$
$$k=30,\ x=1.958631720,\ a=1$$

On voit des erreurs à partir de la ligne $k=16$ où $a_k=3$ et non pas 2 comme attendu. Ceci est dû au cumul des erreurs d'arrondis lors des calculs des inverses des nombres x_k-a_k.

II.C.3.
a) $x_0>0$, donc $a_0=E(x_0)\geqslant 0$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $x_n=f(x_{n-1})$ appartient à l'ensemble image $]1,+\infty[$ de f, donc $x_n>1$. Par suite $a_n\in\mathbb{N}^*$ si $n\geqslant 1$.
Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ que p_n et q_n sont dans $\mathbb{N}^*$.
Cette proposition est vraie au rang $n=1$, car $p_1=a_0a_1+1\in\mathbb{N}^*$ et $q_1=a_1\in\mathbb{N}^*$ d'après ce qui précède.
Supposons que jusqu'à un rang $n\geqslant 1$ donné, on ait pour $1\leqslant k\leqslant n$, p_k et q_k dans $\mathbb{N}^*$.
Alors $p_{n+1}=a_{n+1}p_n+p_{n-1}\in\mathbb{N}^*$, car $a_{n+1}p_n\in\mathbb{N}^*$ et $p_{n-1}\in\mathbb{N}$.
De même, $q_{n+1}=a_{n+1}q_n+q_{n-1}\in\mathbb{N}^*$, car $a_{n+1}q_n\in\mathbb{N}^*$ et $q_{n-1}\in\mathbb{N}^*$.
Ceci établit la proposition au rang $n+1$.
Conclusion: $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ p_n$ et q_n sont dans $\mathbb{N}^*$.

b) Pour $n\geqslant 1$, $q_{n+1}-q_n=a_{n+1}q_n+q_{n-1}-q_n=q_n(a_{n+1}-1)+q_{n-1}>0$, car $q_n\in\mathbb{N}^*$, $a_{n+1}\in\mathbb{N}^*$, et $q_{n-1}\in\mathbb{N}^*$.
Donc la suite $(q_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante.
$q_0=1>0,\ q_1=a_1\geqslant 1$ et si $q_n\geqslant n$, alors $q_{n+1}>q_n\geqslant n$, donc $q_{n+1}\geqslant n+1$, ce qui prouve par récurrence que pour tout entier naturel $n,\ q_n\geqslant n$.

c) Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n = p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n$, alors:
$s_n = (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} - p_{n-1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) = -(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) = -s_{n-1}$.
Donc $s_n = (-1)^{n-1} s_1 = (-1)^{n-1}(p_1 q_0 - p_0 q_1) = (-1)^{n-1}(a_0 a_1 + 1 - a_0 a_1) = (-1)^{n-1}$.

d) Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \dfrac{p_n + p_{n+1} x_{n+2}}{q_n + q_{n+1} x_{n+2}}$, alors:
$$t_n = \frac{p_n + (a_{n+1} p_n + p_{n-1}) \frac{1}{x_{n+1} - a_{n+1}}}{q_n + (a_{n+1} q_n + q_{n-1}) \frac{1}{x_{n+1} - a_{n+1}}} = \frac{p_n (x_{n+1} - a_{n+1}) + (a_{n+1} p_n + p_{n-1})}{q_n (x_{n+1} - a_{n+1}) + (a_{n+1} q_n + q_{n-1})} = \frac{p_{n-1} + p_n x_{n+1}}{q_{n-1} + q_n x_{n+1}} = t_{n-1}.$$
Donc
$$t_n = t_0 = \frac{p_0 + p_1 x_2}{q_0 + q_1 x_2} = \frac{a_0 + (a_0 a_1 + 1) \frac{1}{x_1 - a_1}}{1 + a1.\frac{1}{x_1 - a_1}} = \frac{a_0 (x_1 - a_1) + (a_0 a_1 + 1)}{x_1 - a_1 + a_1} = \frac{a_0 x_1 + 1}{x_1} = a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + x_0 - a_0 = x_0.$$

II.C.4. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n - r_{n-1} = \dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \dfrac{p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}}{q_n q_{n-1}} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$, compte tenu du résultat du II.C.3.c).

b) $q_n q_{n-1} > 0$, donc $r_n - r_{n-1}$ a le signe de $(-1)^{n-1}$ et la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (r_n - r_{n-1})$ est alternée.
Montrons qu'elle vérifie le critère spécial des séries alternées:
On a vu au II.C.3.b) que $q_n \geqslant n$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} q_n = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (r_n - r_{n-1}) = 0$.
D'autre part, la suite (q_n) étant positive et croissante, la suite de terme général $|r_n - r_{n-1}|$ est décroissante.
La série vérifie le critère spécial des séries alternées, donc elle converge.

c) Notons $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (r_k - r_{k-1})$ la somme partielle d'ordre n de cette série et σ sa somme.
La suite de terme général $\sigma_n = r_1 - r_0 + r_2 - r_1 + \ldots + r_n - r_{n-1} = r_n - r_0$ converge vers σ.
Donc la suite (r_n) converge vers $r = r_0 + \sigma$.

d) D'après le cours, les suites (σ_{2p}) et (σ_{2p+1}) sont adjacentes de limite commune σ.
$$\sigma_{2p+2} - \sigma_{2p} = (r_{2p+1} - r_{2p}) + (r_{2p+2} - r_{2p+1}) = \frac{1}{q_{2p+1} q_{2p}} - \frac{1}{q_{2p+2} q_{2p+1}} = \frac{q_{2p+2} - q_{2p}}{q_{2p} q_{2p+1} q_{2p+2}} > 0.$$
Donc la suite (σ_{2p}) est croissante. On montre pareillement la décroissance de la suite (σ_{2p+1}).
On a donc $\sigma_{2p} \leqslant \sigma \leqslant \sigma_{2p+1}$, d'où $r_{2p} - r_0 \leqslant r - r_0 \leqslant r_{2p+1} - r_0$ et $r_{2p} \leqslant r \leqslant r_{2p+1}$.
On montre de même que $r_{2p+2} \leqslant r \leqslant r_{2p+1}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, r est compris entre r_n et r_{n+1}.
Il en découle pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|r - r_n| \leqslant |r_{n+1} - r_n| \leqslant \dfrac{1}{q_{n+1} q_n} \leqslant \dfrac{1}{q_n^2}$.

e) Algorithme d'arguments x_0 et n donnant r_n écrit en MAPLE:
```
> reduite:=proc(x0,n)
> local k,p,q;
> p[0]:=frac_cont(x0,0); q[0]:=1;
> p[1]:=frac_cont(x0,0)*frac_cont(x0,1)+1; q[1]:=frac_cont(x0,1);
> for k from 2 to n do
> p[k]:=frac_cont(x0,k)*p[k-1]+p[k-2];
> q[k]:=frac_cont(x0,k)*q[k-1]+q[k-2]
> end do;
> p[n]/q[n];
> end proc:
```

```
> seq(reduite(sqrt(2),k),k=0..5);
```

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70}$$

En effet: $p_0 = a_0 = 1$ et $q_0 = 1$, donc $r_0 = 1$.
$p_1 = a_0a_1 + 1 = 1.2 + 1 = 3$ et $q_1 = a_1 = 2$, donc $r_1 = \dfrac{3}{2} = 1,5$.
$p_2 = a_2p_1 + p_0 = 2.3 + 1 = 7$ et $q_2 = a_2q_1 + q_0 = 2.2 + 1 = 5$, donc $r_2 = \dfrac{7}{5} = 1,4$.
$p_3 = a_3p_2 + p_1 = 2.7 + 3 = 17$ et $q_3 = a_3q_2 + q_1 = 2.5 + 2 = 12$, donc $r_3 = \dfrac{17}{12} \approx 1,4167$.
On retrouve bien les premiers résultats obtenus par MAPLE et on conjecture que les termes r_n convergent vers $r = \sqrt{2} = x_0$.

II.D.1) Comme $\beta = 1 + \alpha\delta$ et $\gamma = 1$, $y_0 = g(x_0) = \dfrac{\alpha x_0 + \beta}{\gamma x_0 + \delta} = \dfrac{\alpha(x_0 + \delta) + 1}{x_0 + \delta} = \alpha + \dfrac{1}{x_0 + \delta}$.
$x_0 + \delta \neq 0$, car $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $\delta \in \mathbb{N}^*$, donc y_0 est bien défini.
α est un entier donc un rationnel, et $x_0 + \delta$ est un irrationnel (somme d'un irrationnel et d'un rationnel) donc aussi son inverse, ainsi $y_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

II.D.2) Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 2$, $x_{n-1} = y_n$.
$y_0 = \alpha + \dfrac{1}{x_0 + \delta}$, avec $x_0 > 0$ et $\delta \in \mathbb{N}^*$, donc $0 < \dfrac{1}{x_0 + \delta} < 1$ et comme α est entier, $b_0 = E(y_0) = \alpha$.
Il en découle $y_1 = \dfrac{1}{y_0 - b_0} = \dfrac{1}{y_0 - \alpha} = x_0 + \delta$, donc $b_1 = E(y_1) = E(x_0) + \delta = a_0 + \delta$.
D'où $y_2 = \dfrac{1}{y_1 - b_1} = \dfrac{1}{(x_0 + \delta) - (a_0 + \delta)} = \dfrac{1}{x_0 - a_0} = x_1$, ce qui montre que cette proposition est vraie au rang $n = 2$.
Supposons la proposition vraie au rang $n \geqslant 2$, donc que $x_{n-1} = y_n$, alors $f(x_{n-1}) = f(y_n)$, soit $x_n = y_{n+1}$, ainsi la proposition vraie au rang $n + 1$.
Conclusion: pour tout entier $n \geqslant 2$, $x_{n-1} = y_n$, ce qui implique $a_{n-1} = b_n$ en composant avec la fonction partie entière.

II.E - Le cas quadratique
II.E.1. Supposons que Δ soit le carré d'un entier $p \in \mathbb{N}^*$. Alors $p^2 - (\delta + \alpha)^2 = 4$, $(p - (\delta + \alpha))(p + (\delta + \alpha)) = 4$, où $p - (\delta + \alpha)$ et $p + (\delta + \alpha)$ sont des entiers divisant 4 tels que $p - (\delta + \alpha) < p + (\delta + \alpha)$.
Ceci conduit à deux possibilités:
Si $\begin{cases} p - (\delta + \alpha) = 1 \\ p + (\delta + \alpha) = 4 \end{cases}$, alors $2p = 5$, ce qui est impossible.
Si $\begin{cases} p - (\delta + \alpha) = 2 \\ p + (\delta + \alpha) = 2 \end{cases}$, alors $p = 2$ et $\delta + \alpha = 0$, ce qui est impossible puisque α et δ sont dans $\mathbb{N}^*$.
Donc Δ n'est pas le carré d'un entier (on admet que $\sqrt{\Delta}$ est un irrationnel).

II.E.2. L'équation $x^2 + (\delta - \alpha)x - \alpha\delta - 1 = 0$ a un discriminant $(\delta - \alpha)^2 + 4(\alpha\delta + 1) = (\delta + \alpha)^2 + 4 = \Delta > 0$.
Donc elle possède deux solutions réelles distinctes $z_0 = \dfrac{-\delta + \alpha + \sqrt{\Delta}}{2}$ et $z_1 = \dfrac{-\delta + \alpha - \sqrt{\Delta}}{2}$.
$\dfrac{-\delta + \alpha}{2}$ est un rationnel et $\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}$ est un irrationnel, donc z_0 et z_1 sont irrationnelles.

$(\delta + \alpha)^2 + 4 > (\delta - \alpha)^2$ car leur différence $4(\alpha\delta + 1)$ est positive, donc en composant avec la fonction racine carrée, on obtient $\sqrt{\Delta} > |\delta - \alpha| > \delta - \alpha$ ce qui implique que $z_0 > 0$.

II.E.3. $g(z_0) = \alpha + \dfrac{1}{z_0+\delta} = \alpha + \dfrac{1}{\frac{-\delta+\alpha+\sqrt{\Delta}}{2}+\delta} = \alpha + \dfrac{2}{\delta+\alpha+\sqrt{\Delta}}$.
En multipliant et divisant par l'expression conjuguée du dénominateur, il vient:
$g(z_0) = \alpha + \dfrac{2(\delta+\alpha-\sqrt{\Delta})}{(\delta+\alpha)^2-\Delta} = \alpha - \dfrac{\delta+\alpha-\sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{-\delta+\alpha+\sqrt{\Delta}}{2} = z_0$.

II.E.4. On utilise le résultat du II.D.2. avec $x_0 = z_0$, alors $y_0 = g(z_0) = z_0 = x_0$ et (b_n) est à la fois la suite des développements en fraction continue de x_0 et de y_0. On a donc $a_{n-1} = a_n$ pour tout $n \geqslant 2$.
Le développement en fraction continue de z_0 est donc stationnaire à partir du rang 1.
$x_1 = \dfrac{1}{z_0-\alpha} = \dfrac{1}{\frac{-\delta-\alpha+\sqrt{\Delta}}{2}}$. Montrons que sa partie entière est $a_1 = \delta+\alpha$:
Comme $(\delta+\alpha)^2 < \Delta < (\delta+\alpha+2)^2$, on obtient
$x_1 - (\delta+\alpha) = \dfrac{1}{\frac{-\delta-\alpha+\sqrt{\Delta}}{2}} - (\delta+\alpha) = \dfrac{2}{\sqrt{\Delta}-(\delta+\alpha)} - (\delta+\alpha) = \dfrac{\sqrt{\Delta}-(\delta+\alpha)}{2} \in]0,1[$.
Ainsi pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \delta+\alpha$.

II.E.5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
On étudie le cas particulier obtenu en posant $\delta = \alpha = p$: alors $\Delta = 4(p^2+1)$ et $z_0 = \sqrt{p^2+1}$.
Le développement en fraction continue de z_0 est donc stationnaire à partir du rang 1, avec pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \delta+\alpha = 2p$.

Vérifions le avec MAPLE pour p entre 1 et 5:

```
> for p to 5 do
> seq(frac_cont(sqrt(p^2+1),k),k=0..9)
> end do;
```

$$1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2$$
$$2, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4$$
$$3, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6$$
$$4, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8$$
$$5, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10$$

***************** FIN ******************

corrigé par A. LE STANG
professeur de CPGE TSI 2ème année
Lycée Saint-Joseph LaSalle, LORIENT

****