

I Polynômes de Tchebychev

I.A-

I.A.1)

- a) $\arccos$ étant défini sur $[-1, 1]$ et $\cos$ sur $\mathbb{R}$, par composition F_n est défini sur $[-1, 1]$ ainsi

$$D = [-1, 1].$$

- b) Comme $\cos(\arccos x) = x$ pour tout $x \in D$, par les formules usuelles on obtient :

$$F_1(x) = x, F_2(x) = 2x^2 - 1 \text{ et } F_3(x) = 4x^3 - 3x$$

- c) Comme $\arccos(1) = 0, \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ et $\arccos(-1) = \pi$, on a donc

$$F_n(1) = 0, F_n(0) = \cos(n\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ (-1)^p & \text{si } n = 2p \end{cases} \text{ et } F_n(-1) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

- d) $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$ donc $F_n(-x) = \cos(n\pi - n \arccos(x)) = (-1)^n \cos(-\arccos(x)) = (-1)^n F_n(x)$; ainsi

$$F_n \text{ a la parité de } n.$$

- I.A.2) Par la formule usuelle $\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos(\frac{a+b}{2}) \cos(\frac{a-b}{2})$, on a directement :

$$\forall x \in D, F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x) = 2x F_n(x).$$

- I.A.3) Un polynôme est entièrement déterminé par sa restriction à D : si P et Q coïncident sur D , alors $P - Q$ est nul sur D et possède donc une infinité de racines : c'est le polynôme nul soit $P = Q$. Si F_n est la restriction d'une fonction polynomiale à D , cette fonction polynomiale est donc unique.

Soit la suite polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $\widehat{F}_0(x) = 1$ et $\widehat{F}_1(x) = x$ et pour $n \geq 1$ $\widehat{F}_{n+1}(x) = 2x\widehat{F}_n(x) - \widehat{F}_{n-1}(x)$. On remarque que pour $x \in D$, $\widehat{F}_0(x) = F_0(x)$ et $\widehat{F}_1(x) = F_1(x)$; de plus, compte-tenu de la question précédente, si $\forall x \in D, \widehat{F}_k(x) = F_k(x)$ pour tout $k \leq n$, la relation est vraie à l'ordre $n+1$. Ainsi par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}; \forall x \in D, \widehat{F}_n(x) = F_n(x).$$

Dans la suite, $\widehat{F}_n$ sera noté F_n . Une nouvelle récurrence prouve alors la propriété suivante $\mathcal{P}(n)$: F_n est polynomiale de degré n de coefficient dominant 2^{n-1} si $n \geq 1$. Comme $F_0(x) = 1$ et $F_1(x) = x$, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont bien vérifiées. Si on suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ vérifiées avec $n \geq 1$, F_{n+1} apparaît comme la somme d'une fonction polynomiale de degré $n+1$ ($x \mapsto 2xF_n(x)$) de coefficient dominant $2 \cdot 2^{n-1}$ et d'une fonction polynomiale de degré strictement inférieur ce qui prouve que F_{n+1} est une fonction polynomiale de degré $n+1$ et de coefficient dominant 2^n . On a ainsi montré par récurrence forte que :

$$F_n \text{ est polynomiale de degré } n \text{ de coefficient dominant } 2^{n-1} \text{ si } n \geq 1.$$

Le coefficient dominant de F_0 est 1.

- I.A.4) Voici deux méthodes (une récursive et l'autre non)

```
• tchebychev:=proc(n)option remember;
if n=0 then 1
elif n=1 then x
else expand(2*x*tchebychev(n-1)-tchebychev(n-2),x) fi
end;

• tchebychev:=proc(n) local k,a,b,c;
if n=0 then b:=1
else a:=1:b:=x:
for k from 2 to n do c:=2*x*b - a : a:=b: b:=simplify(c) end do:
end if:
b: end proc;
```

- I.A.5) En remplaçant dans la relation $\forall x \in \mathbb{R}; F_{n+2}(x) = 2xF_{n+1}(x) - F_n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ par leur expression en fonction des T_k on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}; T_{n+2}(x) = xT_{n+1}(x) - \frac{1}{4}T_n(x)$$

Ainsi

$$a = 1 \text{ et } b = -\frac{1}{4}$$

I.B-

I.B.1)

- a) F_n étant polynomiale, F_n est $\mathcal{C}^\infty$.
- b) $n \arccos$ est $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$ de dérivée $x \mapsto \frac{-n}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\cos$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée $-\sin$, par formule de composition, on a donc :

$$\forall x \in] -1, 1[, F'_n(x) = \frac{n \sin(n \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}$$

I.B.2)

- a) Comme $1 - \cos(y) \underset{y \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{y^2}{2}$, en composant par $\arccos$, on a alors $2(1-x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} (\arccos(x))^2$. Comme $\arccos(x)$ est positif ($\arccos(x) \in [0, \pi]$), en prenant la racine carrée ($u \sim v \Rightarrow \sqrt{u} \sim \sqrt{v}$), on a bien :

$$\sqrt{2(1-x)} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \arccos(x).$$

- b) Comme $n \arccos(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 1, on a alors :

$$F_n(1) - 1 = \cos(n \arccos(x)) - 1 \sim \frac{-n^2 \arccos^2(x)}{2} \underset{IB2a}{\sim} n^2(x-1)$$

F_n étant $\mathcal{C}^1$, il suffit de calculer le nombre dérivé à gauche ; d'où

$$F'_n(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F_n(1) - 1}{x - 1} = n^2$$

et F_n ayant la parité de n :

$$F'_n(-1) = (-1)^{n-1} n^2$$

I.B.3) Soit $x \in] -1, 1[$, En dérivant une nouvelle fois l'expression trouvée en I.B.1.b) comme produit, on obtient :

$$\forall x \in] -1, 1[, F''_n(x) = \frac{-n^2 \cos(n \arccos(x))}{1-x^2} + \frac{n \sin(n \arccos(x))}{(1-x^2)^{3/2}}$$

Soit en multipliant par $1-x^2$:

$$(1-x^2)F''_n(x) - xF'_n(x) + n^2F_n(x) = 0$$

La fonction polynomiale $x \mapsto (1-x^2)F''_n(x) - xF'_n(x) + n^2F_n(x)$ étant nulle sur $] -1, 1[$, c'est la fonction identiquement nulle. Comme T_n est proportionnelle à F_n , on a de même :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, (1-x^2)T''_n(x) - xT'_n(x) + n^2T_n(x) = 0$$

I.C-

I.C.1) La fonction $x \mapsto \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $] -1, 1[$ de plus la fonction $x \mapsto |f(x)g(x)|$ étant bornée sur le segment $[-1, 1]$ par M , on a alors :

$$\left| \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} \right| \leq \frac{M}{\sqrt{1-x^2}}$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ étant intégrable sur $[-1, 1]$ (de primitive bornée sur $] -1, 1[$), par comparaison entre fonctions continues, il en est de même de $x \mapsto \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

I.C.2) φ est trivialement bilinéaire symétrique. De plus $\varphi(f, f) = \int_{-1}^1 \frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ est l'intégrale d'une fonction **continue** positive sur $] -1, 1[$ donc $\varphi(f, f) \geq 0$; de plus $\varphi(f, f) = 0$ si et seulement si $f(x) = 0$ sur $] -1, 1[$; f étant polynomiale et ayant une infinité de racines, $f = 0$.

$$\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.$$

I.C.3)

- a) Le seul polynôme de degré 0 et de coefficient dominant 1 est $p_0 = 1$. Pour $n \geq 1$, E_n étant de dimension finie, l'orthogonal de E_{n-1} dans E_n est une droite engendrée par un polynôme P_n de $E_n - E_{n-1}$ (donc de degré n) de coefficient dominant a_n ; sur cette droite, il existe un unique polynôme de coefficient dominant $p_n = \frac{1}{a_n} P_n$. Ainsi :

$$p_n \text{ est l'unique polynôme de coefficient dominant 1 de } E_{n-1}^\perp \cap E_n.$$

- b) Si la famille Q_n existe, alors pour tout k , $(Q_0, Q_1, \dots, Q_k)$ est une famille étagée en degré de polynômes non nuls de E_k : c'est une famille libre maximale donc une base de E_k . La condition (i) équivaut alors pour tout n non nul, Q_n est orthogonal à tout élément de E_{n-1} . Ainsi si la famille $(Q_n)_n$ existe, $Q_n = p_n$. Il est évident que la famille $(p_n)_n$ convient.

I.C.4) Par définition : $(T_m|T_n) = \alpha \int_{-1}^1 \frac{\cos(m \arccos(x)) \cos(n \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} dx$ où $\alpha = \frac{1}{2^{n+m-2}}$ si $nm \neq 0$,

$\alpha = \frac{1}{2^{n+m-1}}$ si n ou m est nul et 1 si $n = m = 0$.

$\arccos$ étant un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $] -1, 1[$ sur $]0, \pi[$, par théorème de changement de variables dans les intégrales généralisées, le changement de variable $y = \arccos(x)$ conserve l'intégrabilité et :

$$(T_m|T_n) = \alpha \int_0^\pi \cos(ny) \cos(my) dy = \frac{\alpha}{2} \int_0^\pi \cos((n+m)y) + \cos((n-m)y) dy$$

$$\text{Or } \int_0^\pi \cos(py) dy = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq 0 \\ \pi & \text{si } p = 0 \end{cases} \text{ donc :}$$

$$(T_m|T_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 2^{1-2m} \pi & \text{si } n = m \neq 0 \\ \pi & \text{si } n = m = 0 \end{cases}$$

On remarque que :

- i) La famille des $(T_n)_n$ est donc orthogonale.
 ii) De plus $T_0 = 1$ et comme pour $n \in \mathbb{N}^*$, F_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} , T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 1.
 $(T_n)_n$ vérifiant les relations caractérisant la famille $(Q_n)_n$, on obtient :

$$\forall n, T_n = Q_n$$

II Inégalités de Bernstein et Markov

II.A-

II.A.1)

- a) Soit $f(\theta) = \sin(n\theta) - n \sin(\theta)$ de dérivée $f'(\theta) = n(\cos(n\theta) - \cos(\theta))$. Sur $I_n = [0, \frac{\pi}{2n}]$, $0 \leq \theta \leq n\theta \leq \frac{\pi}{2}$, et $\cos$ étant décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f'(\theta) \leq 0$. f est donc décroissante sur I_n donc

$$f(\theta) = \sin(n\theta) - n \sin(\theta) \leq f(0) = 0$$

soit

$$\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2n}], \sin(n\theta) \leq n \sin(\theta)$$

- b) La fonction $\sin$ étant concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, la courbe est au dessus de sa corde d'équation $y = \frac{2}{\pi}x$, donc

$$\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin(\theta) \geq \frac{2}{\pi} \theta$$

- c) En multipliant l'inégalité précédente par n et en remarquant que si $\theta \geq \frac{\pi}{2n}$, $\frac{2n\theta}{\pi} \geq 1$, on a alors

$$\forall \theta \in [\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2}], n \sin(\theta) \geq 1$$

- d) Sur I_n , $\sin(n\theta)$ est positif donc $|\sin(n\theta)| \geq n \sin(\theta)$ par a) et comme pour tout θ , $|\sin(n\theta)| \leq 1$ par c, on obtient $\forall \theta \in [\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2}]$, $|\sin(n\theta)| \leq n \sin(\theta)$; on a donc bien vérifié que

$$\boxed{\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], |\sin(n\theta)| \leq n \sin(\theta)}$$

- e) Il y a bien entendu égalité si $n = 1$ pour tout θ . Si $n > 1$, en a), f est strictement décroissante et il y a égalité si et seulement si $\theta = 0$. Si $n > \frac{\pi}{2n}$, l'inégalité de c) devient stricte : il ne peut pas y avoir égalité.

$$\boxed{\text{il y a égalité pour tout } \theta \text{ si } n=1 \text{ et seulement pour } \theta = 0 \text{ si } n \geq 2}$$

- II.A.2) Compte-tenu de la parité, il suffit d'étudier T'_n sur $[0, 1]$. Soit $\theta = \arccos(x) \in [0, \frac{\pi}{2}]$; compte-tenu de la formule donnant $F'_n(x)$ obtenue en question I.B, on obtient :

$$T'_n(x) = 2^{1-n} F'_n(x) = \begin{cases} 2^{1-n} \frac{n \sin(n\theta)}{\sin(\theta)} & \text{si } x \neq 1 \\ 2^{1-n} n^2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Par le II.A, on a alors

$$\forall x \in [0, 1], |T'_n(x)| \leq 2^{1-n} n^2$$

avec égalité pour tout x si $n = 1$ et seulement pour $x = 1$ sinon. Par parité de $|T'_n|$, on a donc :

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1], |T'_n(x)| \leq 2^{1-n} n^2}$$

et égalité si $n=1$ pour tout x et si $n > 1$, égalité pour $x = 1$ ou $x = -1$.

- II.A.3) Comme $F_n(1)$ et $F_n(-1)$ sont non nuls, 1 et -1 ne sont pas racines de T_n . Soit $x \in]-1, 1[$ et $\theta = \arccos(x) \in]0, \pi[$.

$$T_n(x) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$$

les valeurs de k correspondant au domaine d'appartenance de θ . La fonction $\cos$ étant strictement décroissante sur $[0, \pi]$, on a bien n racines distinctes sur $] -1, 1[$ et pour ordonner les racines correspondantes dans l'ordre croissant il faut poser $j = n - k$ et on a alors pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\boxed{x_{n,j} = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{(n-j)\pi}{n}\right) = -\cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2n}\right)}$$

- II.A.4) Par théorème, le nombre de racines de T_n comptées avec leur multiplicité est majoré par n (degré de T_n); or on a trouvé précédemment n racines distinctes : ce sont donc les seules racines de T_n et elles sont simples.

Comme le coefficient dominant de T_n est 1, on a alors : $T_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_{n,j})$ et $T'_n(x) = \sum_{j=1}^n \prod_{k \neq j} (x - x_{n,k})$,

on obtient directement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_{n,j}, 1 \leq j \leq n\}, \frac{T'_n(x)}{T_n(x)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{x - x_{n,j}}}$$

II.A.5)

- a) Soit $L_j(x) = \prod_{k \neq j} \frac{(x - x_{n,k})}{(x_{n,j} - x_{n,k})}$ la famille de polynômes de Lagrange associée aux n racines de T_n . Par théorème, cette famille est une base de E_{n-1} et pour tout polynôme de E_{n-1} on a

$$\forall x, P(x) = \sum_{j=1}^n P(x_{n,j}) L_j(x)$$

Or d'après l'expression de T'_n établie précédemment $T'_n(x_{n,j}) = \prod_{k \neq j} (x_{n,j} - x_{n,k})$. ainsi, l'expression de

L_j devient, pour x non racine de T_n , $L_j(x) = \frac{T_n(x)}{T'_n(x_{n,j})(x - x_{n,j})}$ ce qui donne le résultat demandé :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_{n,j}\}, \forall P \in E_{n-1}, P(x) = \sum_{j=1}^n \frac{P(x_{n,j}) T_n(x)}{T'_n(x_{n,j})(x - x_{n,j})}}$$

- b) Comme $T'_n(x) = \frac{n \sin(n \arccos(x))}{2^{n-1} \sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in]-1, 1[$ et compte-tenu de $\sin(n \arccos(x_{n,j})) = \sin(\frac{\pi}{2} + (n-j)\pi) = (-1)^{n-j}$, on obtient en remplaçant $T'_n(x_{n,j})$ par sa valeur :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_{n,j}\}, \forall P \in E_{n-1}, P(x) = \frac{2^{n-1}}{n} \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \sqrt{1-x_{n,j}^2} P(x_{n,j}) \frac{T_n(x)}{x-x_{n,j}}$$

II.B- Inégalité de Bernstein

II.B.1) Pour $x \in [-1, 1]$, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ (sin est positive sur $[0, \pi]$)

Pour $x \in [x_{n,1}, x_{n,n}]$, $\arccos(x) \in [\frac{\pi}{2n}, \pi - \frac{\pi}{2n}]$; compte-tenu des variations du sin et du fait que $\sin(\frac{\pi}{2n}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{2n})$, on obtient :

$$\forall x \in [x_{n,1}, x_{n,n}], \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} \geq \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \geq \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2n} = \frac{1}{n}$$

la dernière inégalité provenant de II.A.1.b.

II.B.2)

a) Comme le suggère le texte on étudie différents cas :

- $x \in [x_{n,1}, x_{n,n}]$. Par hypothèse, $|P(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et par la question précédente, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq n$ d'où $|P(x)| \leq n$.
- Dans les autres cas, x n'est pas racine de T_n . Par inégalité triangulaire en utilisant l'expression de P obtenue en II.A.5.b), on obtient :

$$|P(x)| \leq \frac{2^{n-1}}{n} \sum_{j=1}^n \left| \frac{T_n(x)}{x-x_{n,j}} \right|$$

Dans l'expression de $\frac{T'_n(x)}{T_n(x)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{x-x_{n,j}}$ tous les termes sont négatifs si $x < x_{n,1}$ et positifs si $x > x_{n,n}$. D'où la valeur absolue de la somme est la somme des valeurs absolues et :

$$\frac{|T'_n(x)|}{|T_n(x)|} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{|x-x_{n,j}|}$$

Ainsi $|P(x)| \leq \frac{2^{n-1}}{n} |T'_n(x)|$. En utilisant le maximum de T'_n trouvé en question II.A.2, on obtient alors

$$|P(x)| \leq \frac{2^{n-1}}{n} 2^{1-n} n^2 = n.$$

Les différents cas traités recouvrent bien $[-1, 1]$:

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1], |P(x)| \leq n}$$

- b) Si P est nul, c'est trivial et si P est non nul; en posant $\alpha = \sup_{x \in [-1, 1]} \sqrt{1-x^2} |P(x)|$ nombre non nul (borne supérieure d'une fonction continue non nulle sur un segment) on applique la question précédente au polynôme $\frac{1}{\alpha} P$.

II.B.3)

a) Plusieurs méthodes sont possibles notamment faire le lien avec ce qui précède ou exhiber B_k . (On peut prouver son existence par récurrence mais c'est plus long).

- En dérivant la relation $\cos(k\theta) = F_k(\cos \theta)$ on obtient $k \sin(k\theta) = F'_k(\cos \theta) \sin(\theta)$ ainsi

$$\boxed{B_k = \frac{1}{k} F'_k \text{ convient}}$$

F_k étant de degré k , il est immédiat que B_k est de degré $k-1$.

- Par la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton :

$$\cos(k\theta) + i \sin(k\theta) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\cos \theta)^{k-j} (i \sin \theta)^j$$

En prenant la partie imaginaire (donc en ne conservant que les termes impairs de la somme $j = 2p+1$) et en remplaçant $\sin^2(\theta)$ par $1 - \cos^2(\theta)$, on obtient après avoir posé $q = E(\frac{k-1}{2})$:

$$\sin(k\theta) = \left(\sum_{p=0}^q (-1)^p \binom{k}{2p+1} (\cos \theta)^{k-2p-1} (1 - \cos^2(\theta))^p \right) \sin \theta$$

Si on pose $B_k = \sum_{p=0}^q \binom{k}{2p+1} (X)^{k-2p-1} (X^2 - 1)^p$, on obtient bien un polynôme, somme de polynômes de degré $k-1$: c'est donc un polynôme de degré au plus $k-1$; le coefficient de X^{k-1} est $\sum_{p=0}^q \binom{k}{2p+1} > 0$ donc le degré de B_k est bien $k-1$.

- b) Lorsque θ décrit $\mathbb{R}$, $x = \cos(\theta)$ décrit $[-1, 1]$ donc $|\sqrt{1-x^2}P(x)| = |\sin \theta| |P(\cos \theta)|$. En utilisant le résultat de II.B.2), on a :

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |P(x)| \leq n \sup_{x \in [-1, 1]} \sqrt{1-x^2} |P(x)| = n \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |\sin(\theta)| |P(\cos \theta)|$$

Or $2|P(\cos \theta)| |\sin(\theta)| = |T(\theta_0 + \theta) - T(\theta_0 - \theta)| \leq 2 \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |T(\theta)|$ d'où le résultat :

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |P(x)| \leq n \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |T(\theta)|$$

- c) Lorsque $\sin \theta$ est non nul, on peut poser :

$$\left(\underbrace{\frac{T(\theta_0 + \theta) - T(\theta_0)}{\theta}}_{\mapsto T'(\theta_0)} - \underbrace{\frac{T(\theta_0 - \theta) - T(\theta_0)}{\theta}}_{\mapsto -T'(\theta_0)} \right) \frac{\theta}{\sin(\theta)} = 2P(\cos(\theta))$$

En faisant tendre θ vers 0, comme P est continue, on trouve alors $2T'(\theta_0) = 2P(1)$.

D'où $|T'(\theta_0)| = |P(1)| \leq \sup_{x \in [-1, 1]} |P(x)| \leq n \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |T(\theta)|$. Ceci étant vrai pour tout réel θ_0 , on a bien :

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} |T'(\theta)| \leq n \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |T(\theta)|$$

II.C- Comme le suggère le texte on pose $T(\theta) = P(\cos(\theta))$. T est de la forme donnée en II.B.3 par linéarisation des termes $\cos^k(\theta)$ (pour $k \leq n$, en développant par la formule du binôme $\cos^k(\theta) = \frac{1}{2^k} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^k$ est donc un polynôme trigonométrique de degré k). Par dérivation de la relation définissant T , on obtient : $T'(\theta) = -\sin(\theta)P'(\cos(\theta))$ soit $|T'(\theta)| = |\sin(\theta)| |P'(\cos(\theta))|$. Le résultat de II.B3.d donne alors

$$\forall x \in [-1, 1], |\sqrt{1-x^2}P'(x)| \leq n \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |(\theta)| = n \sup_{x \in [-1, 1]} |P(x)|$$

Or P' est élément de E_{n-1} d'où par II.B.2.b :

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |P'(x)| \leq n \sup_{x \in [-1, 1]} \sqrt{1-x^2} |P'(x)| \leq n^2 \sup_{x \in [-1, 1]} |P(x)|$$

III Approximation polynomiale

III.A-

III.A.1) Par définition de $\mathcal{S}$, la suite $(n^{j+2}\alpha_n)_n$ est bornée ; ainsi il existe un nombre M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |n^j \alpha_n| \leq \frac{M}{n^2}$$

Par comparaison à une série de Riemann convergente,

$$\text{la série } \sum_n n^j \alpha_n \text{ est absolument convergente donc convergente.}$$

III.A.2) La suite $(R_n(j))_n$ est bornée comme suite convergeant vers 0 (reste d'une suite convergente).

Soit $k \geq 1$. La suite $(p^{j+k+1}\alpha_p)_p$ étant bornée, il existe M tel que pour tout $p \geq 1$, $p^j |\alpha_p| \leq \frac{M}{p^{k+1}}$. La

fonction $t \mapsto t^{-k-1}$ étant décroissante, par comparaison série et intégrale $\frac{1}{p^{k+1}} \leq \int_{p-1}^p \frac{1}{t^{k+1}} dt$. La fonction $t \mapsto t^{-k-1}$ étant intégrable sur $[1, +\infty[$, on obtient alors par sommation :

$$\forall n \geq 1, |R_n(j)| \leq \int_n^{+\infty} \frac{M}{t^{k+1}} dt = \frac{M}{k} \frac{1}{n^k}$$

soit $n^k |R_n(j)| \leq M_1$.

Cette relation étant encore vérifiée pour $n = 0$, on a bien vérifié que :

Pour tout j , $(R_n(j))_n$ est élément de $\mathcal{S}$.

III.B-

III.B.1) Pour $x \in [-1, 1]$, on a $|F_n(x)| = |\cos(n \arccos x)| \leq 1$ d'où

$$\forall x \in [-1, 1]; |\alpha_n F_n(x)| \leq |\alpha_n|$$

La série $\sum \alpha_n$ étant absolument convergente (question III.A.1) avec $j = 0$), la série $\sum \alpha_n F_n$ est donc normalement convergente sur $[-1, 1]$ ainsi

la série $\sum \alpha_n F_n(x)$ est convergente pour tout x élément de $[-1, 1]$.

III.B.2) On cherche à utiliser le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions. Les fonctions F_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1, 1]$. De plus comme F_n est élément de E_n , pour tout entier naturel $k \leq n$, $F_n^{(k)}$ est élément de E_{n-k} donc par l'inégalité de Markov démontrée en partie II.,

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |F_n^{(k+1)}| \leq (n-k)^2 \sup_{x \in [-1, 1]} |F_n^{(k)}| \leq n^2 \sup_{x \in [-1, 1]} |F_n^{(k)}|$$

ainsi en utilisant ce résultat p fois, on obtient que pour $p \leq n$,

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |F_n^{(p)}| \leq n^{2p} \sup_{x \in [-1, 1]} |F_n| = n^{2p}$$

Cette dernière relation est encore vraie pour $n \leq p$ puisqu'alors $F_n^{(p)} = 0$. Ainsi

$$\forall x \in [-1, 1], |\alpha_n F_n^{(p)}(x)| \leq |\alpha_n| n^{2p}$$

La suite majorante étant convergente, pour tout p , la série $\sum_n \alpha_n F_n^{(p)}$ est normalement convergente sur $[-1, 1]$. Par théorème,

f est $\mathcal{C}^\infty$

et ses dérivées sont obtenues par dérivation terme à terme.

III.B.3) Comme $\sum_{p=0}^n \alpha_p F_p$ est élément de V_n , par définition d'une borne inférieure :

$$d(f, V_n) \leq \|f - \sum_{p=0}^n \alpha_p F_p\|_\infty = \left\| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \alpha_p F_p \right\|_\infty$$

Or $|F_n|$ étant majorée par 1 sur $[-1, 1]$, on obtient :

$$\left\| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \alpha_p F_p \right\|_\infty \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} |\alpha_p| = u_n$$

Comme la suite $(\alpha_n)_n$ est élément de $\mathcal{S}$ équivaut à $(|\alpha_n|)_n$ est élément de $\mathcal{S}$, par la question III.A.2 pour $j = 0$, la suite $(u_n)_n$ est élément de $\mathcal{S}$. Comme pour tout entier k , $n^k d(f, V_n) \leq n^k u_n$,

la suite $(d(f, V_n))_n$ est à décroissance rapide.

III.C-

III.C.1) $\tilde{f}$ est $\mathcal{C}^\infty$ comme composée de fonctions indéfiniment dérivables et par relation sur les coefficients de Fourier $a_n(\tilde{f}^{(2j)}) = (-1)^j n^{2j} a_n(\tilde{f})$. Comme la suite $a_n(\tilde{f}^{(2j)})$ est bornée (coefficient de Fourier d'une fonction continue 2π -périodique), on obtient bien que :

$(a_n(\tilde{f}))_n$ est à décroissance rapide.

$\tilde{f}$ étant paire, les coefficients $b_n(f)$ sont nuls.

III.C.2) Par théorème de convergence normale des séries de Fourier, $\tilde{f}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$:

la série de Fourier de $\tilde{f}$ converge normalement vers $\tilde{f}$.

III.C.3) Le résultat précédent s'écrivant

$$\tilde{f}(\theta) = f(\cos(\theta)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\tilde{f}) \cos(n\theta)$$

en appliquant à $\theta = \arccos(x)$ on a alors :

$$\forall x \in [-1, 1], f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\tilde{f}) F_n(x)$$

D'après la question III.C.1, la suite $\alpha_n(f) = a_n(\tilde{f})$ convient donc :

$$\text{pour } n \geq 1, \alpha_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos(\theta)) \cos(n\theta) d\theta \text{ et } \alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos(\theta)) d\theta$$

III.D-

III.D.1) Soit $v_n = e^{-n^2}$ suite de réels est élément de $\mathcal{S}$ par croissance comparée de l'exponentielle et des puissances en l'infini. Par définition de $d(f, V_n)$, on a :

$$\exists p_n \in V_n, d(f, V_n) \leq \|f - p_n\|_{\infty} \leq d(f, V_n) + v_n$$

La somme de deux suites à décroissance rapide étant à décroissance rapide (la somme de deux suites bornées est bornée), la suite $(\|f - p_n\|_{\infty})_n$ est à décroissance rapide et p_n étant élément de V_n , p_n est de degré inférieur ou égal à n .

III.D.2)

a) Pour $k \geq 1$ et P polynomiale, on remarque $a_k(\tilde{P}) = \frac{-(P|T_k)}{\pi}$ par le changement de variables vu en fin de partie II à savoir $\theta = \arccos(x)$. Comme T_k appartient à $E_{k-1}^{\perp}$ si P est élément de E_{k-1} $a_k(\tilde{P}) = 0$. Par linéarité de $f \mapsto a_n(\tilde{f})$, on a alors :

$$P \in E_{k-1} \implies a_k(\tilde{f}) = a_k(\widetilde{f - P})$$

b) En utilisant la suite p_n construite en III.D.1, on obtient que $a_k(\tilde{f}) = a_k(\widetilde{f - p_{k-1}})$. Or par l'inégalité de la moyenne, on a donc

$$|a_k(\tilde{f})| = |a_k(\widetilde{f - p_{k-1}})| \leq \frac{2\pi \|f - p_{k-1}\|_{\infty}}{\pi} = 2 \|f - p_{k-1}\|_{\infty}$$

Comme pour tout entier j , il existe M_j tel que $\forall n, n^j \|f - p_n\|_{\infty} \leq M_j$, on a alors pour $n \geq 2$

$$n^j |a_n(\tilde{f})| \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^j (n-1)^j 2 \|f - p_{n-1}\|_{\infty} \leq 2^{j+1} M_j$$

donc en posant $M'_j = \max(2^{j+1} M_j, \|f\|_{\infty})$, on obtient un majorant de la suite $(n^j |a_n(\tilde{f})|)_n$ ce qui prouve que

$$\text{la suite } (a_n(\tilde{f}))_n \text{ est à décroissance rapide}$$

c) Soit $g = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\tilde{f}) T_n$ fonction bien définie et de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ d'après la question III.B.1. En introduisant une fonction $\tilde{g}$ comme en III.C, on obtient alors par le résultat de la question III.C.3 que

$$\forall n, a_n(\tilde{f}) = a_n(\tilde{g}) \text{ et } b_n(\tilde{f}) = b_n(\tilde{g}) = 0$$

Les fonctions étant continues et l'application qui à une fonction continue associe la suite de ses coefficients de Fourier étant injective, $\tilde{f} = \tilde{g}$ et donc leur restrictions à $[-1, 1]$ sont égales d'où $f = g$ ce qui prouve bien que

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^{\infty}$$