

I Etude de f_α

1. On a $f_{|\alpha|} = f_\alpha$ et $\alpha \neq 0$, on peut donc se limiter à $\alpha > 0$.
2. f_α est périodique de période : $T_\alpha = \frac{2\pi}{\alpha}$.
3. f_α est solution de : $y'' + \alpha^2 y = 0$, dont la solution générale est : $y = A \cos \alpha t + B \sin \alpha t$.
4. $f_\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha x = 0 \Leftrightarrow \alpha x = \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2\alpha} [\alpha\pi]$.
 $x \geq 0$ entraîne $k \geq 0$, et $x \leq \pi$ entraîne $k \frac{\pi}{\alpha} \leq \pi - \frac{\pi}{2\alpha}$, c'est à dire : $k \leq \alpha - \frac{1}{2}$, ou encore :
 $k \leq E + d - \frac{1}{2}$.

Finalement, on a : $0 \leq k \leq E + d - \frac{1}{2}$ et k entier,

Si $d \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, cela devient : $k \in \{0, 1, \dots, E-1\}$, on a E solutions de $f_\alpha(x) = 0$ dans $[0, \pi]$.

Si $d \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, cela devient : $k \in \{0, 1, \dots, E\}$, on a $E+1$ solutions de $f_\alpha(x) = 0$ dans $[0, \pi]$.

II Etude de $f_{\alpha,\beta}$

1. $f_{\alpha,\beta}$ périodique de période $T \Rightarrow f_{\alpha,\beta}(x+T) = f_{\alpha,\beta}(x)$, qu'on applique en $x = 0$.
Cela donne : $f_{\alpha,\beta}(T) = f_{\alpha,\beta}(0) = 2 \Rightarrow \cos \alpha T + \cos \beta T = 2 \Rightarrow \cos \alpha T = \cos \beta T = 1$.
D'où : $\alpha T = 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et : $\beta T = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.
D'où : $k\alpha T = 2kp\pi = p\beta T \Rightarrow k\alpha = p\beta$, $k, p \in \mathbb{N}^*$.
Réciproquement, si $k\alpha = p\beta$, $k, p \in \mathbb{N}^*$, $f_{\alpha,\beta} \left(x + \frac{2p\pi}{\alpha}\right) = \cos(\alpha x + 2p\pi) + \cos \left(x + \frac{2p\pi\beta}{\alpha}\right)$
 $= \cos(\alpha x) + \cos(\beta x + 2k\pi) = \cos(\alpha x) + \cos(\beta x) = f_{\alpha,\beta}(x)$
 $\Rightarrow T = \frac{2p\pi}{\alpha} = \frac{2k\pi}{\beta}$ est une période de $f_{\alpha,\beta}$.
On a bien l'équivalence demandée.
2. Comme on vient de le voir, dans le cas qui nous intéresse : $T_{\alpha,\beta} = pT_\alpha = kT_\beta$.
3. $f_{\alpha,\beta} = f_\alpha + f_\beta$, d'où $f''_{\alpha,\beta} = -\alpha^2 f_\alpha - \beta^2 f_\beta$.
Ce qui donne : $f''_{\alpha,\beta} + \alpha^2 f_{\alpha,\beta} = -\alpha^2 f_\alpha - \beta^2 f_\beta + \alpha^2 f_\alpha + \alpha^2 f_\beta = (\alpha^2 - \beta^2) f_\beta$.
4. On dérive 2 fois la relation précédente et on obtient, en utilisant une deuxième fois cette relation :
 $f_{\alpha,\beta}^{(4)} + \alpha^2 f''_{\alpha,\beta} = (\alpha^2 - \beta^2) f''_\beta = -\beta^2 (\alpha^2 - \beta^2) f_\beta = -\beta^2 f''_{\alpha,\beta} - \alpha^2 \beta^2 f_{\alpha,\beta}$
Ce qui donne : $f_{\alpha,\beta}^{(4)} + (\alpha^2 + \beta^2) f''_{\alpha,\beta} + \alpha^2 \beta^2 f_{\alpha,\beta} = 0 \quad (E)$
5. On appelle g_α et g_β les applications : $x \mapsto \sin \alpha x$ et $x \mapsto \sin \beta x$.
L'équation différentielle étant linéaire, la question posée revient à montrer que f_α , f_β , g_α , g_β vérifient (E).
 f_α et g_α vérifient $y'' = -\alpha^2 y$ et aussi $y^{(4)} = \alpha^4 y$,
d'où : $y^{(4)} + (\alpha^2 + \beta^2) y'' + \alpha^2 \beta^2 y = (\alpha^4 - \alpha^2 (\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2 \beta^2) y = 0$.
 f_β et g_β vérifient $y'' = -\beta^2 y$ et aussi $y^{(4)} = \beta^4 y$,
d'où : $y^{(4)} + (\alpha^2 + \beta^2) y'' + \alpha^2 \beta^2 y = (\beta^4 - \beta^2 (\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2 \beta^2) y = 0$.
Les quatre fonctions vérifient bien (E).
6. α et β étant non nuls, il suffit de montrer que la famille $\{f_\alpha, f_\beta, g_\alpha, g_\beta\}$ est libre.
On écrit : $a f_\alpha + b f_\beta + c g_\alpha + d g_\beta = 0$, qu'on dérive successivement 3 fois :
 $-a\alpha g_\alpha - b\beta g_\beta + c\alpha f_\alpha + d\beta f_\beta = 0$,
 $-a\alpha^2 f_\alpha - b\beta^2 f_\beta - c\alpha^2 g_\alpha - d\beta^2 g_\beta = 0$, et enfin :

$$a\alpha^3 g_\alpha + b\beta^3 g_\beta - c\alpha^3 f_\alpha - d\beta^3 f_\beta = 0.$$

La première et la troisième relation, appliquées en 0, donnent : $a + b = 0$ et $-a\alpha^2 - b\beta^2 = 0$

d'où on tire facilement : $a = b = 0$ car $\alpha^2 \neq \beta^2$, car α et β sont strictement positifs et distincts.

La deuxième et la quatrième relation, appliquées en 0, donnent : $c\alpha + d\beta = 0$ et $-c\alpha^3 - d\beta^3 = 0$

d'où on tire facilement : $c = d = 0$ car $\alpha\beta^3 \neq \beta\alpha^3$, car α et β sont strictement positifs et distincts.

La famille $\{f_\alpha, f_\beta, g_\alpha, g_\beta\}$ est libre, c'est une base de l'ensemble des solutions de (E).

III Etude de $f_{\frac{1}{2},1}$

1. f est de période 4π , paire. Une étude sur $[0, 2\pi]$ suffit donc. On complète par symétrie par rapport à Oy .

2. $f'(x) = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} - \sin x = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \left(1 + 4 \cos \frac{x}{2}\right)$.

$f'(x) = 0$ sur $[0, 2\pi]$, pour $x = 0$, $x = 2\pi$ et $x_0 = 2 \operatorname{Arccos} \left(-\frac{1}{4}\right)$, qui est la seule valeur qui annule $1 + 4 \cos \frac{x}{2}$ sur l'intervalle ; la solution générale est : $\pm 2 \operatorname{Arccos} \left(-\frac{1}{4}\right)_{[4\pi]}$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	0	x_0	2π
$f'(x)$	0	-	0
$f(x)$	2	$\searrow$	$\nearrow$
		$f(x_0)$	0

3. $f(x_0) = \cos \operatorname{Arccos} \left(-\frac{1}{4}\right) + \cos \left(2 \operatorname{Arccos} \left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \cos \operatorname{Arccos} \left(-\frac{1}{4}\right) + 2 \cos^2 \operatorname{Arccos} \left(-\frac{1}{4}\right) - 1$

$$f(x_0) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} - 1 = -\frac{9}{8}.$$

4. On coupe la courbe selon une droite horizontale.

Pour $c > 2$, on n'a pas de solution ;

pour $c \in]0, 2]$, il y a une solution unique ;

pour $c \in \left]-\frac{9}{8}, 0\right]$, on a 2 solutions distinctes ;

pour $c = -\frac{9}{8}$, il y a une solution unique ;

et pour $c < -\frac{9}{8}$, on n'a pas de solution.

5. $f(x) = \cos \frac{x}{2} + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} - 1 = 2X^2 + X - 1$. On cherchera donc les solutions d'une équation de second degré, puis les solutions correspondantes en x sur $[0, 2\pi]$.

$c = -1$ correspond à $2X^2 + X = 0$, c'est à dire $X = 0$ ou $X = -\frac{1}{2}$.

$X = 0$ correspond à $\cos \frac{x}{2} = 0$ et donc $x = \pi$.

$X = -\frac{1}{2}$ correspond à $\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$ et donc $x = \frac{4\pi}{3}$.

$c = 0$ correspond à $2X^2 + X - 1 = 0$, c'est à dire $X = -1$ ou $X = \frac{1}{2}$.

$X = -1$ correspond à $\cos \frac{x}{2} = -1$ et donc $x = 2\pi$.

$X = \frac{1}{2}$ correspond à $\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ et donc $x = \frac{2\pi}{3}$.

6. $2X^2 + X - 1 = c$ s'écrit $2X^2 + X - (1 + c) = 0$.

La somme des racines de cette équation du second degré est : $\cos \frac{x_1}{2} + \cos \frac{x_2}{2} = -\frac{1}{2}$,

et leur produit est : $\cos \frac{x_1}{2} \cos \frac{x_2}{2} = -\frac{1+c}{2}$.

7. L'équation différentielle : $8y'' + 5y = 3\cos\frac{x}{2} - 3\cos x$, est linéaire du second ordre, à coefficients constants et avec second membre. Le second membre est double.

Solution générale de l'équation homogène associée.

$$\omega^2 = \frac{5}{8} \text{ et on a donc : } y = A \cos \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}x + B \sin \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}x.$$

Solution particulière correspondant au second membre : $3\cos\frac{x}{2}$.

On la cherche sous la forme : $y = a \cos \frac{x}{2} + b \sin \frac{x}{2}$, ce qui donne :

$$-2a \cos \frac{x}{2} - 2b \sin \frac{x}{2} + 5a \cos \frac{x}{2} + 5b \sin \frac{x}{2} = 3 \cos \frac{x}{2}, \quad a = 1 \text{ et } b = 0 \text{ conviennent.}$$

Solution particulière correspondant au second membre : $-3\cos x$.

On la cherche sous la forme : $y = a \cos x + b \sin x$, ce qui donne :

$$-8a \cos x - 8b \sin x + 5a \cos x + 5b \sin x = -3 \cos x, \quad a = 1 \text{ et } b = 0 \text{ conviennent.}$$

Solution générale de l'équation avec second membre :

$$y = A \cos \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}x + B \sin \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}x + \cos \frac{x}{2} + \cos x.$$

Solution générale de l'équation avec second membre et conditions initiales.

$$y = A \cos \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}x + B \sin \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}x + \cos \frac{x}{2} + \cos x \text{ avec :}$$

$$y(0) = 2, \text{ donne } A + 2 = 2 \text{ et enfin : } A = 0.$$

$$y'(0) = 0 \text{ donne } \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}B = 0 \text{ et enfin : } B = 0.$$

$$\text{La solution est donc } y = \cos \frac{x}{2} + \cos x = f(x).$$

8. Dans tous les cas, on pose : $\alpha^2 = \frac{5}{8}$ d'où $8f''_{\alpha,\beta} + 5f_{\alpha,\beta} = (5 - 8\beta^2)f_\beta$,

$\beta = \frac{1}{2}$ fournit $5 - 8\beta^2 = 3$ et correspond à la solution particulière du premier second membre.

$\beta = 1$ fournit $5 - 8\beta^2 = -3$ et correspond à la solution particulière du second second membre.

On retrouve bien la solution demandée.

IV Etude d'une suite de fonctions

1. $U_0(x) = \sin(x) P_0(x) = \sin(x) f_1(x) = \sin x \cos x$.

$$U_1(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) P_1(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) f'_1(x) f_{\frac{1}{2}}(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos(x) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin(x) \cos(x).$$

$$\text{On a bien : } U_1 = \frac{1}{2}U_0.$$

2. Cela revient donc à montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n$.

La question précédente nous a fourni la raison.

$$\begin{aligned} U_{n+1}(x) &= \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) P_{n+1}(x) = \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) f_{\frac{1}{2^{n+1}}}(x) \prod_{k=0}^n f_{\frac{1}{2^k}}(x) = \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=0}^n f_{\frac{1}{2^k}}(x) \\ &= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{k=0}^n f_{\frac{1}{2^k}}(x) = \frac{1}{2} U_n(x). \end{aligned}$$

On a bien le résultat demandé, la suite $(u_n(x))$ est géométrique.

3. On a donc : $U_n(x) = \frac{1}{2^n} U_0(x) = \frac{1}{2^n} \sin x \cos x = \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) P_n(x)$

$$\text{D'où, pour } x \in]0, \pi], \quad P_n(x) = \frac{\sin x \cos x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x \cos x}{x}$$

$$4. P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x \cos x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$\text{Par ailleurs, } P_n(0) = \prod_{k=0}^n \cos 0 = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

La limite de $P_n(x)$ pour $n \rightarrow \infty$ est bien continue.

V Un développement de $\cot \alpha \pi$

1. Si $k \in \mathbb{N}^*$, alors $f_k(x) = \cos kx$ est 2π périodique, de même que $F_k(x)$.

Par ailleurs, f_k et F_k coïncident sur $[-\pi, \pi]$, elles sont donc égales.

2. $f_{\frac{1}{3}}$ est de période 6π , et $f_{\frac{4}{3}}$ est de période $\frac{3\pi}{2}$.

3. Le problème de continuité est en $\pi_{[2\pi]}$, et, compte tenu de la périodicité, à étudier seulement en π , à gauche et à droite.

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} F_\alpha(x) = F_\alpha(\pi) = f_\alpha(\pi) = \cos \alpha \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} F_\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} F_\alpha(x) = F_\alpha(-\pi) = f_\alpha(-\pi) = \cos(-\alpha \pi) = \cos \alpha \pi.$$

F est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Toujours par périodicité, le problème de dérivabilité n'est à étudier qu'en π .

Etude à gauche.

$$F'_{\alpha_g}(\pi) = f'_{\alpha_g}(\pi) = f'_\alpha(\pi) = -\alpha \sin \alpha \pi.$$

Etude à droite.

$$F'_{\alpha_d}(\pi) = F'_{\alpha_d}(-\pi) = f'_{\alpha_d}(-\pi) = f'_\alpha(-\pi) = \alpha \sin \alpha \pi.$$

Mais $\alpha \sin \alpha \pi \neq 0$, donc F_α n'est pas dérivable en $\pi_{[2\pi]}$.

4. $F_\alpha(\pi) = \cos \alpha \pi = \cos(E\pi + d\pi) = (-1)^E \cos d\pi$ avec $d \in]0, 1[$.

Le signe de $F_\alpha(\pi)$ dépend donc de la parité de E et de la position de d par rapport à $\frac{1}{2}$.

D'où le tableau :

	E pair	E impair
$d \in]0, \frac{1}{2}[$	+	-
$d \in]\frac{1}{2}, 1[$	-	+
$d = \frac{1}{2}$	0	0

Par ailleurs, $F'_{\alpha_g}(\pi) = -\alpha \sin \alpha \pi = -\alpha \sin(E\pi + d\pi) = (-1)^{E+1} \alpha \sin d\pi$.

Mais ici, $\alpha \sin d\pi > 0$, le signe de $F'_{\alpha_g}(\pi)$ ne dépend que de E .

Si E est pair, $F'_{\alpha_g}(\pi) < 0$, et, si E est impair, $F'_{\alpha_g}(\pi) > 0$.

5. F_α est paire, donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(\alpha) = 0$.

$$a_0(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \alpha t \, dt = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi}.$$

On travaille maintenant avec $n \in \mathbb{N}^*$.

$$a_n(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos \alpha t \cos n t \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n+\alpha)t + \cos(n-\alpha)t \, dt = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n} \right)$$

$$a_n(\alpha) = (-1)^n \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha+n} + \frac{1}{\alpha-n} \right) = (-1)^n \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}.$$

La série de Fourier de F_α est donc : $S(F_\alpha)(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} + \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \cos nx$.

Par ailleurs, F_α est 2π périodique, continue et de classe C_1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, la série de Fourier de F_α converge donc vers F_α .

6. $a_n(\alpha) = (-1)^n \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} = \frac{\sin \alpha \pi}{(\alpha - n)\pi} \frac{2(-1)^n \alpha}{\alpha + n} = \frac{\sin(\alpha - n)\pi}{(\alpha - n)\pi} \frac{2\alpha}{\alpha + n} \xrightarrow{\alpha \rightarrow n} 1$,
car chacun des facteurs tend vers 1.

Par ailleurs, $a_n(\alpha) = (-1)^n \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \xrightarrow[\substack{\alpha \rightarrow k \\ k \neq n}]{} 0$, car ce n'est pas alors une forme indéterminée.

7. De l'égalité entre F_α et sa série de Fourier, on tire facilement :

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad \cos \alpha x = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \cos nx \right).$$

On applique ceci en $x = \pi$, et comme $\sin \alpha \pi \neq 0$: $\cot \alpha \pi = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \right)$.