

I. Premiers pas

1. Les évènements $(\{S_k = i\})_{i=1, \dots, 5}$ forment un système complet d'évènements, donc d'après la

formule des probabilités totales : $P(S_{k+1} = 1) = \sum_{j=1}^5 P(S_{k+1} = 1 | S_k = j) P(S_k = j)$.

Or, le réel $P(S_{k+1} = 1 | S_k = j)$ est indépendant de k ; on peut donc le noter b_{1j} :

$$P(S_{k+1} = 1) = \sum_{j=1}^5 b_{1j} P(S_k = j)$$

$P(S_{k+1} = 1)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des $(P(S_k = j))_{j=1, \dots, 5}$

2. Il existe de même pour tout $i = 2, \dots, 5$ des réels $b_{i,1}, \dots, b_{i,5}$ tels que :

$$P(S_{k+1} = i) = \sum_{j=1}^5 b_{ij} P(S_k = j)$$

d'où : $(X_{k+1})_i = P(S_{k+1} = i) = \sum_{j=1}^5 b_{ij} P(S_k = j) = \sum_{j=1}^5 B_{ij} X_{k,j} = (BX_k)_i$

La matrice $B := (b_{ij} = P(S_1 = i | S_0 = j))_{ij}$ est telle que $BX_{k+1} = X_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. On considère le vecteur $U := \begin{pmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix}$ de la partie III :

$${}^tBU_j = \sum_{i=1}^5 b_{ij} u_i = \sum_{i=1}^5 P(S_1 = i | S_0 = j) \cdot 1 = 1 = U_j \text{ i.e. } {}^tBU = U.$$

Le vecteur U est un vecteur propre de la matrice tB pour la valeur propre 1.

4. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $X_k = X_0$

- Initialisation : Trivial
- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $X_k = X_0$.
Alors

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= BX_k = BX_0 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix} = X_0 \end{aligned}$$

— Conclusion : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k = X_0$.
 Donc, pour tout $k, i \in \mathbb{N}$, $P(S_k = i) = P(S_0 = i)$.

Les variables aléatoires $(S_k)_k$ sont identiquement distribuées.

5. On remarque que $P(S_1 = 1 | S_0 = 1) = 0$ et que $P(S_1 = 1)P(S_0 = 1) = P(S_0 = 1)^2 = 1/16$.
 Cette observation permet de conclure que :

Les variables aléatoires S_0 et S_1 ne sont pas indépendantes.

II. Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

6. Soit $x \in \ker(u - I_E)$. On a : $u(x) = x$ d'où $u^2(x) = u(x) = x$ et par récurrence immédiate, $u^l(x) = x$ pour tout $l \in \mathbb{N}$.

D'où $r_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} x = x \cdot (r_k(x))_k$ est donc la suite constante égale à x :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x) = x$$

7. Soit $x \in \text{Im}(u - I_E)$. Il existe $a \in E$ tel que : $x = u(a) - a$ d'où $u(x) = u^2(a) - u(a)$ et par récurrence immédiate, $u^l(x) = u^{l+1}(a) - u^l(a)$ pour tout $l \in \mathbb{N}$.

D'où $r_k(x) = \frac{u^k(a) - a}{k}$ (somme télescopique). Donc $\|r_k(x)\| \leq \frac{2\|a\|}{k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x) = 0_E$$

8. Soit $x \in \ker(u - I_E) \cap \text{Im}(u - I_E)$. On a d'une part $r_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ et d'autre part $\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x$ d'où $x = 0_E$. Donc $\ker(u - I_E) \cap \text{Im}(u - I_E) = \{0_E\}$
 Posons $F := \ker(u - I_E) \oplus \text{Im}(u - I_E)$. Alors $\dim(F) = \dim(\ker(u - I_E)) + \text{rg}(u - I_E) = n$ d'après le théorème du rang. D'où $F = E$ ce qui conclut :

$$E = \ker(u - I_E) \oplus \text{Im}(u - I_E)$$

9. Soit $x \in E$. Il existe un unique $p(x) \in \ker(u - I_E)$ tel que $x - p(x) \in \text{Im}(u - I_E)$.

$$r_k(x) = \underbrace{r_k(p(x))}_{\rightarrow p(x)} + \underbrace{r_k(x - p(x))}_{\rightarrow 0_E} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} p(x).$$

Pour tout $x \in E$, la suite $(r_k(x))_k$ converge vers $p(x)$ où p est la projection sur $\ker(u - I_E)$ parallèlement à $\text{Im}(u - I_E)$.

10. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est A . u vérifie $\|u(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ donc on peut définir p la projection sur $\ker(u - I_E)$ parallèlement à $\text{Im}(u - I_E)$ comme précédemment.

D'après ce qui précède, on sait que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ on a : $R_k X \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} PX$ où P est la matrice

de p dans la base canonique.

En particulier, $P^2 = P$.

Pour $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ où le 1 est sur la j -ème ligne on a l'égalité : $\begin{pmatrix} R_{1j}^{(k)} \\ \vdots \\ R_{nj}^{(k)} \end{pmatrix} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}$. Donc la

suite $(R_k)_k$ converge vers la matrice P coefficient à coefficient.

La suite de matrices $(R_k)_k$ converge vers une matrice P telle que $P^2 = P$.

III. Matrices stochastiques

11. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 (4) &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot 1 = 1 \\
 &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sum_{j=1}^n A_{ij} \cdot U_j = U_i \\
 &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, (AU)_i = U_i
 \end{aligned}$$

d'où :

$$A \text{ vérifie (4) si et seulement si } AU = U.$$

12. Soient $A, B \in \mathcal{E}$.

Il est évident que AB est à coefficient positifs donc AB vérifie (3).

De plus, $ABU = AU = U$ donc AB vérifie aussi (4).

$$\mathcal{E} \text{ est stable par } \times$$

13. Soit $(A_n) \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ telle que $A_n \rightarrow A$ pour une certaine matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que $A \in \mathcal{E}$.

Les coefficients des matrices A_n convergent vers les coefficients de la matrice A et sont positifs, donc par passage à la limite, les coefficients de A sont aussi positifs. Donc A vérifie (3).

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}
 \|U - AU\| &= \|A_n U - AU\| \\
 &= \|(A_n - A)U\| \\
 &\leq \underbrace{\|A_n - A\|_{\text{op}}}_{\rightarrow 0} \|U\|
 \end{aligned}$$

Donc $\|U - AU\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ i.e. $AU = U$.

Donc A vérifie aussi (4) d'où $A \in \mathcal{E}$.

$$\mathcal{E} \text{ est un fermé de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Soient $A, B \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in [0; 1]$. Montrons que $C := \lambda A + (1 - \lambda)B \in \mathcal{E}$.

Il est clair que C est à coefficient positifs, donc C vérifie (3).

De plus, $CU = \lambda AU + (1 - \lambda)BU = \lambda U + (1 - \lambda)U = U$. Donc C vérifie (4).

Donc $C \in \mathcal{E}$ d'où :

$$\mathcal{E} \text{ est un connexe de } \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$$

14. Soient $A \in \mathcal{E}$ et $X \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{Soit } i \in \llbracket 1; n \rrbracket. \text{ On a : } |AX_i| = \left| \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=i}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| \leq \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij}}_{=1} \|X\|_{\infty} \leq \|X\|_{\infty}.$$

Par passage à la borne supérieure, on en déduit l'inégalité souhaitée :

$$\forall A \in \mathcal{E}, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n, \quad \|AX\|_{\infty} \leq \|X\|_{\infty}.$$

15. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(A^p - I_n)$. Soit $s \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $x_s = \|X\|_{\infty}$ On a $A^p X = X$ d'où

$$x_s = \sum_{i=1}^n a_{si}^{(p)} x_i \quad \text{i.e.} \quad 0 = \sum_{i=1}^n \underbrace{a_{si}^{(p)} (x_s - x_i)}_{\geq 0}.$$

En effet, $\sum_{i=1}^n a_{si}^{(p)} = 1$ car $A^p \in \mathcal{E}$ ($A \in \mathcal{E}$ et \mathcal{E} est stable par \times).

On en déduit que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $a_{si}^{(p)}(x_s - x_i) = 0$ et puisque $a_{si}^{(p)} \neq 0$ par hypothèse sur A^p , on a $x_s - x_i = 0$. X est de la forme : $X = \begin{pmatrix} x_s \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = x_s U$ donc $X \in \text{Vect}(U)$. D'où

$\ker(A^p - I_n) \subset \text{Vect}(U)$ ce qui implique $\dim \ker(A^p - I_n) \leq 1$.

Réciproquement, comme $U \in \ker(A^p - I_n)$ car A^p est stochastique, on a aussi $\text{Vect}(U) \subset \ker(A^p - I_n)$. D'où $\ker(A^p - I_n) = \text{Vect}(U)$ ce qui permet de conclure :

$$\boxed{\dim \ker(A^p - I_n) = 1}$$

16. Soit $X \in \ker(A - I_n)$. On a $A^2 X = A(AX) = AX = X$ et par récurrence immédiate, $A^p X = X$. Donc $\ker(A - I_n) \subset \ker(A^p - I_n) = \text{Vect}(U)$. Par ailleurs, on a $U \in \ker(A - I_n)$ donc on a l'inclusion inverse $\text{Vect}(U) \subset \ker(A - I_n)$.

$$\boxed{\ker(A - I_n) = \text{Vect}(U)}$$

17. Soit $k \in \mathbb{N}$.

Toutes les matrices A^l pour $l \in \mathbb{N}$ sont à coefficients positifs donc $\frac{1}{k}(A^0 + \dots + A^{k-1})$ est à coefficients positifs : R_k vérifie (3).

Toutes les matrices A^l pour $l \in \mathbb{N}$ sont stochastiques, donc $A^l U = U$ pour tout $l \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket$:

$$R_k U = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^l U = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} U = U : \text{ donc } R_k \text{ vérifie (4).}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, R_k \in \mathcal{E}}$$

18. D'après la question 14, $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ donc A vérifie l'hypothèse de la question 10. Celle-ci nous permet d'affirmer que la suite $(R_k)_k \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ converge vers une matrice P . D'après la question 13, \mathcal{E} est fermé donc P est stochastique.

Enfin, la question 9 nous dit que P est la matrice de projection d'image $\ker(A - I_n)$ qui est de dimension 1 d'après la question 16.

La suite de matrices $(R_k)_k$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P ,
stochastique, de rang 1.

19. Chaque colonne de la matrice P peut être vue comme la matrice colonne d'un vecteur de son image.

Or, $\text{Im} P = \ker(A - I_n) = \text{Vect}(U)$ donc pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe $\lambda_j \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \lambda_j U$.

$$\text{D'où } U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = UL \text{ où } L = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}).$$

Comme P est stochastique, la somme des coefficients de chacune de ses lignes vaut 1 i.e. $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$

d'où :

P s'écrit $P = UL$ où L est une matrice-ligne stochastique.

20. Soit $X \in \mathbb{R}^n$. $(PA - P)X = P \underbrace{(A - I_n)X}_{\in \text{Im}(A - I_n)} = 0$ d'où $PA - P = 0_n$.

$$\boxed{PA = P}$$

Montrons que L vérifie $LA = L$:

On a : $PA = P$ i.e. $ULA = UL$ d'où $\underbrace{{}^tUU}_{=n} LA = \underbrace{{}^tUU}_{=n} L$ donc $UL = L$.

Montrons maintenant que L est la seule matrice-ligne stochastique vérifiant cette égalité :

Soit L' une matrice-ligne vérifiant $L'A = L'$. Alors L' vérifie aussi $L'A^l = L'$ pour tout

$l \in \mathbb{N}$. Donc $L'R_k = \frac{1}{k} \cdot \sum_{l=0}^{k-1} L'A^l = \frac{1}{k} \cdot \sum_{l=0}^{k-1} L' = L' \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} L'P$. Nous venons donc d'établir

que $\underbrace{L'UL}_{=1} = L'$ i.e. $L' = L$.

L est la seule matrice-ligne stochastique vérifiant $LA = L$.

21. Supposons par l'absurde qu'il existe $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $\lambda_j = 0$.

En utilisant l'égalité $LA^p = L$ on obtient : $\lambda_j = 0 = \sum_{i=1}^n \underbrace{a_{ij}^{(p)}}_{\geq 0} \lambda_i$ donc pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$\underbrace{a_{ij}}_{>0} \lambda_i = 0$. Donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ ce qui est absurde car vecteur ligne nul n'est évidemment pas stochastique.

Les coefficients de L sont tous strictement positifs.

22. $AU = U$ car A est stochastique et $U \neq 0$ d'où :

1 est valeur propre de A .

IV. Application au labyrinthe

23. On considère le vecteur X_0 donné à la question 4. $BX_0 = X_0$ donc ${}^tX_0A = {}^tX_0$. Or tX_0 est un vecteur-ligne stochastique, donc d'après la question 20, ${}^tX_0 = L$ où L est tel que $P = UL$. Ainsi,

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1/4 \quad 3/16 \quad 3/16 \quad 3/ \quad 3/16) :$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/16 & 3/16 & 3/16 & 3/16 \\ 1/4 & 3/16 & 3/16 & 3/16 & 3/16 \\ 1/4 & 3/16 & 3/16 & 3/16 & 3/16 \\ 1/4 & 3/16 & 3/16 & 3/16 & 3/16 \\ 1/4 & 3/16 & 3/16 & 3/16 & 3/16 \end{pmatrix}$$

24. Se donner une loi de probabilité sur $\llbracket 1; 5 \rrbracket$ revient à se donner une matrice -colonne stochastique de taille 5. On cherche $V \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$ tel que $X_k = V$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Raisonnons par analyse-synthèse.

Soit V un tel vecteur. Alors $V = X_1 = BX_0 = BV$ donc ${}^tVA = V$ et d'après la question 20, ${}^tV = L$ car tV est une matrice-ligne stochastique.

Réciproquement, L vérifie $LA = L$ d'où $B {}^tL = {}^tL$. Si on prend $X_0 = {}^tL$, alors on aura bien $X_k = X_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Il existe une unique loi de probabilité sur $\llbracket 1; 5 \rrbracket$ telle que les variables aléatoires $(S_k)_k$ soient identiquement distribuées et il s'agit de la loi donnée par le vecteur tL associée à A .

*** Fin de la correction ***