Concours d'Admission 1978

ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON
ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

SUJET OPTION MP'

Epreuve de MATHEMATIQUES II

(2 pages de texte)

Un espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}$, de dimension 3, est muni d'un repère orthonormé direct $r = (O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; les coordonnées dans ce repère seront notées : (x, y, z).
On étudie des mouvements de points et de solide par rapport à $\mathcal{E}$, le temps t variant de $-\infty$ à $+\infty$, sauf dans la partie II où on se limite à $t \in]0, +\infty[$.

I

Soient A et B deux points mobiles par rapport à $\mathcal{E}$ tels que :
- à tout instant t, les vecteurs-accélération de A et B sont $\vec{w}_A(t) = \vec{w}_B(t) = a\vec{k}$, où a est un réel donné, tel que $a > 0$;
- à l'instant $t = 0$, A et B occupent respectivement les positions O $(0, 0, 0)$ et B_0 $(0, 0, b)$, où b est un réel donné, avec les vecteurs vitesses respectifs $\vec{v}_A(0) = a\vec{i}$ et $\vec{v}_B(0) = a(\vec{j} + \vec{k})$.

1°- Exprimer les coordonnées de $A(t)$ et $B(t)$ en fonction de t. Construire les trajectoires de A et B et indiquer leur nature.

2°- Etudier le mouvement du point E défini par $\overrightarrow{OE(t)} = \overrightarrow{A(t)B(t)}$ et la variation de la distance $d(t)$ des points $A(t)$ et $B(t)$.

.../...

II

La partie II est indépendante des parties III et IV ; dans cette partie II, on se limite à $t \in]0,+\infty[$.

1°- Déterminer les points M mobiles par rapport à $\mathcal{E}$, vérifiant les deux conditions :
- à tout instant t, $M(t)$ est aligné avec $A(t)$ et $B(t)$, (cf § I) ;
- à tout instant t, le vecteur accélération $\vec{W}_M(t)$ est colinéaire à $\vec{k}$.

Que peut-on dire des trajectoires de ces points M lorsque $b = 0$? lorsque $b \neq 0$?

2°- Parmi les points mobiles M obtenus au 1°, quels sont ceux pour lesquels $\overrightarrow{W_M(t)}$ est un vecteur constant ?

III

1°- Pour t donné, $D(t)$ désigne (quand elle existe) la droite déterminée par les points $A(t)$ et $B(t)$. Ecrire un système d'équations cartésiennes de $D(t)$ dans le repère r, lorsque $b \neq 0$ et lorsque $b = 0$; comment peut-on définir $D(0)$ dans ce dernier cas ?

2°- Former des équations $S_0(x, y, z) = 0$ et $S_b(x, y, z) = 0$ des surfaces (S_0) et (S_b) engendrées par $D(t)$ quand t varie, dans les cas $b = 0$ et $b \neq 0$. Montrer que (S_0) est un cylindre.

3°- Donner une représentation paramétrique de (S_0) et de (S_b), en fonction de t et du paramètre $\rho = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$, qui détermine un point P de la droite AB.

4°- Pour $b \neq 0$, quels sont les points de (S_b) en lesquels le plan tangent est perpendiculaire à $(O; \vec{i}, \vec{j})$? Comment ces plans tangents coupent-ils (S_b) ?

IV

On reprend la surface (S_0) trouvée au § III (cas où $b = 0$).

Un espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}_1$, de dimension 3, mobile par rapport à $\mathcal{E}$, est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (A ; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ ainsi défini :
- à tout instant t, l'axe $(A(t); \vec{I}(t))$ est porté par $D(t)$ de sorte que $\vec{I}(t) = \dfrac{-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}$
- à tout instant t, l'axe $(A(t); \vec{J}(t))$ est porté par la normale à (S_0) en $A(t)$, le produit scalaire $\vec{k}.\vec{J}(t)$ étant positif.
- à tout instant t, $\vec{K}(t) = \vec{I}(t) \wedge \vec{J}(t)$.

1°- Exprimer $\vec{J}(t)$ et $\vec{K}(t)$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ et t : pour simplifier l'écriture, on posera: $u(t) = \sqrt{2t^2 + 2t + 2}$.

2°- A l'instant t, on désigne par $\overrightarrow{\Omega(t)}$ le vecteur rotation instantanée et par $\Delta(t)$ l'axe central du torseur de distribution des vitesses des points de $\mathcal{E}_1$ dans son mouvement par rapport à $\mathcal{E}$.

Montrer que $\overrightarrow{\Omega(t)}$ est colinéaire à $\vec{I}$, ce qui permet de poser : $\overrightarrow{\Omega(t)} = \omega(t)\,\vec{I}$.

Exprimer $\omega(t)$ en fonction de t, ou mieux, en fonction de $u(t)$.

3°- a) Un point Q est invariablement lié à $\mathcal{E}_1$ et mobile par rapport à $\mathcal{E}$; il est défini par $\overrightarrow{AQ} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$, où X, Y et Z sont des constantes.

Exprimer $\overrightarrow{V_Q(t)}$ vecteur vitesse de Q par rapport à $\mathcal{E}$ à l'instant t, en fonction de $\overrightarrow{V_A(t)}, \omega(t)$, $\overrightarrow{I(t)}, \overrightarrow{J(t)}, \overrightarrow{K(t)}$. En déduire les équations cartésiennes de $\Delta(t)$ dans le repère $\mathcal{R}$.

b) Déterminer le vecteur-vitesse de glissement de $\mathcal{E}_1$ par rapport à $\mathcal{E}$ à l'instant t. Y a-t-il des instants en lesquels le mouvement instantané de $\mathcal{E}_1$ par rapport à $\mathcal{E}$ est une rotation ?

4°- Montrer que, quand t parcourt $]-\infty,+\infty[$, $\Delta(t)$ engendre un demi-plan de $\mathcal{E}_1$ et un cylindre Σ de $\mathcal{E}$. Déterminer et construire la section Γ de Σ par le plan $(O; \vec{i}, \vec{k})$.

-FIN-