

PARTIE I

1) 1) Pour tout x réel, $|u_n(x)| \leq \frac{2|x|}{n^2\pi^2}$ donc puisque la série de terme général $\frac{2|x|}{n^2\pi^2}$ converge, la règle de comparaison des séries à termes positifs prouve que la série de terme général $u_n(x)$ est absolument convergente donc convergente ce qui assure que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

1) 2) Si $x \in [-a, a]$ alors $|u_n(x)| \leq \frac{2|x|}{n^2\pi^2} \leq \frac{2|a|}{n^2\pi^2}$ donc puisque la série de terme général $\frac{2|a|}{n^2\pi^2}$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$. On a $u_n(n) = \frac{2}{(1+\pi^2)^n} \Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n(x)| \geq \frac{2}{(1+\pi^2)^n}$ et puisque la série de terme général $\frac{2}{(1+\pi^2)^n}$ diverge alors la série $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

1) 3) Les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}$ et puisqu'il y a convergence normale de la série $\sum u_n$ sur tout segment de $\mathbb{R}$ cela prouve que U est continue sur $\mathbb{R}$.

2) 1) Comme $x \mapsto \frac{2x}{x^2+n^2\pi^2}$ est la dérivée de $x \mapsto \ln(x^2 + n^2\pi^2)$ alors la primitive qui s'annule en 0 de la fonction u_n est $x \mapsto \ln(x^2 + \pi^2 n^2) - \ln(\pi^2 n^2) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.

2) 2) Pour tout x réel, $0 \leq v_n(x)$ et $v_n(x) \sim \frac{x^2}{n^2\pi^2}$ donc puisque la série de terme général $\frac{x^2}{n^2\pi^2}$ converge, la règle des équivalents des séries à termes positifs prouve que la série de terme général $v_n(x)$ est convergente ce qui assure que la série $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

2) 3) Soit $a > 0$, puisque la série $\sum v'_n = \sum u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$ alors V est dérivable sur $[-a, a]$ et $\forall x \in [-a, a], V'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = U(x)$. Ainsi puisque $V(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(0) = 0$ alors V est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction U .

3) Posons pour tout $x \in \mathbb{R} : q_0(x) = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*, q_n(x) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$, comme $q_n(x) \geq 1$ alors la suite $(q_n(x))_{n \geq 0}$ converge si et seulement si la suite $(\ln(q_n(x)))_{n \geq 0}$ converge ce qui équivaut à la convergence de la série de terme général $v_n(x)$, donc d'après la question 2)2) la suite (q_n) donc la suite (p_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$. On a en utilisant la continuité de la fonction exponentielle

$$p(x) = x \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n(x) = x \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(\ln(q_n(x))) = x \exp\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n v_k(x)\right) = x \exp(V(x)) \\ = x \exp\left(\int_0^x U(t) dt\right).$$

PARTIE II

1) 1) La fonction g_x est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc le théorème de la convergence normale de Dirichlet assure que la fonction g_x est égale en tout point $t \in \mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourier.

1) 2) La fonction g_x est paire donc $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, b_n(x) = 0$.

1) 3) -) Si $x = 0$, alors $a_0(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 1 dt = 2$ et si $n \in \mathbb{N}^*, a_n(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi n} [\sin(nt)]_0^\pi = 0$.

-) Si $x \neq 0$, alors $a_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos\left(\frac{xt}{\pi}\right) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re}\left(\int_0^\pi \left(e^{\frac{xt}{\pi}} + e^{-\frac{xt}{\pi}}\right) e^{int} dt\right) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re}\left(\left[\frac{\pi}{in\pi+x} e^{\left(\frac{in\pi+x}{\pi}\right)t} + \frac{\pi}{in\pi-x} e^{\left(\frac{in\pi-x}{\pi}\right)t}\right]_0^\pi\right) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{2(-1)^n \pi x \operatorname{sh}(x)}{x^2+n^2\pi^2} + i2n\pi \left(\frac{\pi}{x^2+n^2\pi^2} - \frac{(-1)^n \pi \operatorname{ch}(x)}{x^2+n^2\pi^2}\right)\right) = \frac{2(-1)^n x \operatorname{sh}(x)}{x^2+n^2\pi^2}.$

2) 1) D'après 1)1) de la partie II, pour tout $t \in]-\pi, \pi]$ et $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$g_x(t) = \operatorname{ch}\left(\frac{xt}{\pi}\right) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{x} + \operatorname{sh}(x) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n(x) \cos(nt) \text{ donc pour } t = \pi \text{ on a}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \operatorname{ch}(x) = \operatorname{sh}(x) \left(\frac{1}{x} + U(x)\right) \Rightarrow U(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} - \frac{1}{x}.$$

2) 2) On a au voisinage de 0, $\frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)}{x \operatorname{sh}(x)} \sim \frac{x(1+o(x)) - (x+o(x^2))}{x^2} = \frac{o(x^2)}{x^2} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{sh}(t)} - \frac{1}{t}\right) = 0$

ce qui assure que l'intégrale $\int_0^x \left(\frac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{sh}(t)} - \frac{1}{t}\right) dt$ est faussement impropre et donc d'après la question précédente pour

$$x \neq 0, V(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^x \left(\frac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{sh}(t)} - \frac{1}{t}\right) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\ln\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{sh}(\varepsilon)}\right) - \ln\left(\frac{\operatorname{sh}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\right) = \ln\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{x}\right) \text{ car } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1.$$

2) 3) D'après la question précédente pour $x \neq 0, \frac{\operatorname{sh}(x)}{x} = \exp(V(x)) \Rightarrow \operatorname{sh}(x) = x \exp(V(x))$, et par continuité

l'égalité est vraie pour $x = 0$ donc en utilisant la question 3) de la partie I, on a $sh(x) = p(x) = x \exp(V(x)) = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right)$.

PARTIE III

1) 1) Pour t au voisinage de 0 on a, $\frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t)-1} \sim \frac{xt}{\pi t} = \frac{x}{\pi} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} h(x, t) = \frac{x}{\pi}$.

1) 2) D'après la question précédente l'intégrale $\int_0^{+\infty} |h(x, t)| dt$ est faussement impropre en 0 et au voisinage de $+\infty$, $|h(x, t)| \leq \frac{1}{\exp(\pi t)-1} \sim \exp(-\pi t)$, et puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty} \exp(-\pi t) dt$ converge alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} |h(x, t)| dt$ converge donc finalement l'intégrale $\int_0^{+\infty} |h(x, t)| dt$ converge ce qui assure que $t \mapsto h(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

2) 1) Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t)-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc h possède des dérivées partielles par rapport à x en tout point de $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et à tout ordre. Soit pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$, $H(x, t) = \frac{\exp(itx)}{\exp(\pi t)-1}$. On a $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t) = \text{Im} \left(\frac{\partial^n H}{\partial x^n}(x, t) \right) = \text{Im} \left(\frac{(it)^n \exp(itx)}{\exp(\pi t)-1} \right) = \frac{t^n}{\exp(\pi t)-1} \text{Im} \left(\exp(i \frac{n\pi}{2} + itx) \right) = \frac{t^n \sin(tx + \frac{n\pi}{2})}{\exp(\pi t)-1}$. Ainsi

-) si n est pair, $n = 2m$, alors $\frac{\partial^{2m} h}{\partial x^{2m}}(x, t) = \frac{t^{2m}(-1)^m \sin(tx)}{\exp(\pi t)-1}$;

-) si n est impair, $n = 2m + 1$, alors $\frac{\partial^{2m+1} h}{\partial x^{2m+1}}(x, t) = \frac{t^{2m+1}(-1)^m \cos(tx)}{\exp(\pi t)-1}$.

2) 2) Pour tout x réel, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$ et d'après la question 1) 2) de la partie III elle est intégrable sur $]0, +\infty[$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$ et au voisinage de 0,

$\left| \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t) \right| \sim \frac{1}{\pi} t^{n-1} \left| \sin(tx + \frac{n\pi}{2}) \right|$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t) \right| dt$ est faussement impropre en 0, et puisque pour $t > 0$, $t^2 \left| \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \frac{t^{n+2}}{\exp(\pi t)-1} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \left| \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t) \right| = 0$, alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t) \right| dt$ converge

donc finalement l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t) \right| dt$ converge ce qui assure que $t \mapsto \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

-) La fonction h est n fois continûment dérivable par rapport à x sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ d'après III) 2) 1),

-) Pour tout x réel et pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$, $t \mapsto h(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x, t)$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après III) 2) 2),

-) $\forall p \in \{1, \dots, n\}$, $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $\left| \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x, t) \right| \leq \frac{t^p}{\exp(\pi t)-1} = \varphi_p(t)$ avec φ_p positive, continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\varphi_p(t) \sim \frac{t^{p-1}}{\pi}$ donc φ_p a une limite finie en 0 et $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \varphi_p(t) = 0$,

donc d'après le théorème de dérivation des intégrales paramétrées la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall p \in \{1, \dots, n\}$, $f^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x, t) dt$. Ainsi la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $f^{(2m)}(x) =$

$$\int_0^{+\infty} \frac{(-1)^m t^{2m} \sin(tx)}{\exp(\pi t)-1} dt \text{ et } f^{(2m+1)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^m t^{2m+1} \cos(tx)}{\exp(\pi t)-1} dt.$$

4) 1) Si $t > 0$ on a $\frac{1}{\exp(\pi t)-1} = \frac{\exp(-\pi t)}{1-\exp(-\pi t)}$ d'où puisque $0 < \exp(-\pi t) < 1$ alors $\frac{1}{\exp(\pi t)-1} = \exp(-\pi t) \sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-n\pi t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-n\pi t)$.

4) 2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \exp(-n\pi t) \sin(tx)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on a $|\exp(-n\pi t) \sin(tx)| \leq \exp(-n\pi t)$, et comme $t \mapsto \exp(-n\pi t)$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc la fonction $t \mapsto \exp(-n\pi t) \sin(tx)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Dès lors on a

$$\int_0^{+\infty} \exp(-n\pi t) \sin(tx) dt = \text{Im} \left(\int_0^{+\infty} \exp(-n\pi t + itx) dt \right) = \text{Im} \left(\lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{\exp(-n\pi t + itx)}{-n\pi + ix} \right]_0^y \right) = \text{Im} \left(\frac{-1}{-n\pi + ix} \right) = \frac{x}{x^2 + n^2 \pi^2} = \frac{u_n(x)}{2} \text{ car } |e^{ixy}| = 1 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} \exp(-n\pi y) \exp(ixy) = 0.$$

4) 3) Si $q = \exp(-\pi t)$, $t > 0$, donc $q \neq 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n q^k = q \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) = \frac{1-q^n}{q^{-1}-1}$ d'où $h_n(x, t) = \frac{1-\exp(-n\pi t)}{\exp(\pi t)-1} \sin(tx)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

-) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $h_{n,x} : t \mapsto h_n(x, t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme finie de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question III) 4) 2),

-) La suite $(h_{n,x})_{n \geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $t \mapsto h(x, t)$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$,

-) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a en utilisant ce qui précède, $|h_n(x, t)| \leq \left| \frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t)-1} \right| = |h(x, t)|$ et puisque $t \mapsto |h(x, t)|$ est positive, continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question III) 1) 2),

alors le théorème de la convergence dominée assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} h_n(x, t) dt = \int_0^{+\infty} h(x, t) dt = f(x)$. Dès lors

puisque $\int_0^{+\infty} h_n(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^n \exp(-k\pi t) \sin(tx) dt = \sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} \exp(-k\pi t) \sin(tx) dt = \sum_{k=1}^n \frac{u_k(x)}{2}$ d'après la

question III) 4) 2), alors $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{u_k(x)}{2} = \frac{U(x)}{2}$.